Die Bellsche Ungleichung einfach erklärt

John Bell hat 1964 ein Gedankenexperiment beschrieben und eine dazu passende mathematische Ungleichung aufgestellt. Alle drei Physik-Nobelpreisträger 2022 haben nach Bells Ideen konkret durchführbare Experimente zusammen mit den dazu passenden Ungleichungen entwickelt. Hier wird eine einfach zu verstehende Bell-Ungleichung aus der Mengenlehre abgeleitet, die durch nichtlokale Korrelationen der Quantentheorie verletzt wird.

Ein Bell-Test für Menschengruppen

Wir untersuchen Eigenschaften einer beliebigen Gruppe von Menschen wie beispielsweise einer Schulklasse. Wir möchten eine mathematische Ungleichung finden, die immer erfüllt sein muss, wenn die betrachteten Eigenschaften lokal und realistisch sind. Dies heisst, sie sind mit den einzelnen Personen verbunden und haben keinen Einfluss auf die entsprechenden Eigenschaften anderer Personen (lokal). Weiter sind wir überzeugt, dass die betrachteten Eigenschaften auch existieren, bevor wir die Personen untersuchen (realistisch). Wir betrachten nur binäre Eigenschaften, die die Gruppe jeweils in genau zwei Untergruppen teilen.

Als Beispiel wählen wir die Augenfarbe braun/nicht braun, die Haarfarbe schwarz/nicht schwarz und das Geschlecht weiblich/nicht weiblich. Wir bezeichnen die Anzahl schwarzhaariger, braunäugiger Menschen in unserer Gruppe als N(s,b). Nun unterteilen wir diese Untergruppe weiter nach dem Geschlecht in zwei Teile und können folgende triviale Gleichung aufstellen (braune Flächen in **Abb. 1**):

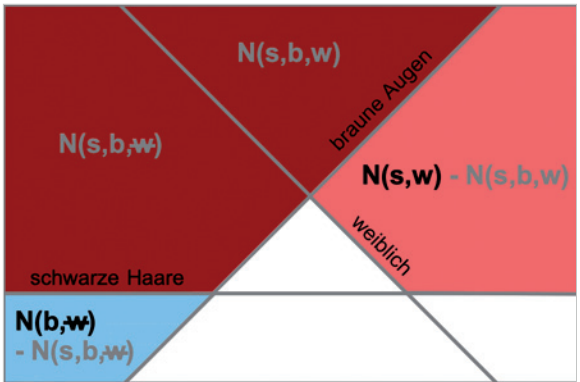
$N(s,b) = N(s,b,w) + N(s,b,\cancel{w})$

Das durchgestrichene $\cancel{w}$ steht dabei für «nicht weiblich». Die braunen Flächen umfassen also alle Menschen, die braune Augen und schwarze Haare haben.

Lässt man nun in den beiden Termen auf der rechten Seite der obigen Gleichung jeweils einen der eingrenzenden Bedingungen weg, erhalten wir in jedem Fall gleich viele oder mehr Menschen. In **Abb. 1** kommen also noch die rosa und blaue Flächen dazu. Wir können also die unter **Abb. 1** angegebene Ungleichung formulieren, die in unserer Erfahrungswelt immer erfüllt ist: «Es gibt in einer Menschengruppe weniger schwarzhaarige, braunäugige Menschen als schwarzhaarige weibliche Menschen + braunäugige nicht-weibliche Menschen».

Indem man in **Abb. 1** jede Teilfläche als Prozentsatz der Gesamtfläche ausdrückt, erhält man eine Wahrscheinlichkeits-Ungleichung, die den Vorteil hat, dass man die drei Terme auch in einzelnen Erhebungen mit unterschiedlichen Beobachtungszahlen gewinnen kann (um den statistischen Fehler genügend klein zu halten, muss man jedoch genügend viele Menschen untersuchen). Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeiten mit p für probability, ergibt sich: $p(s,b) \leq p(s,w) + p(b,\cancel{w})$. Das ist der einfachste Bell-Test mit 3 Termen.

Bells Ungleichung **(Bell 1964)** war komplizierter (sie enthält 4 Terme) und basiert auf einer längeren mathematischen Herleitung. Sie beruhte wie die obige Ungleichung darauf, dass Eigenschaften von Körpern *realistisch und lokal* sind. Bells grosse Leistung war, dass er seine Ungleichung mit einem Photonen-Gedankenexperiment verknüpfen und mit Hilfe der Quantentheorie durchrechnen konnte. Er fand dabei erstaunlicherweise Situationen, bei denen seine Ungleichung verletzt wird, d.h. falsch ist.



$$N(s,b) = N(s,b,w) + N(s,b,\cancel{w}) \leq N(s,w) + N(b,\cancel{w})$$

Abb. 1: Bellsche Ungleichung mit 3 Termen, wobei die Flächen proportional zu den entsprechenden Personenzahlen N( ) seien. Die Ungleichung gilt für jede beliebige auch krummlinige Unterteilung, weil sie sich schreiben lässt als: Braun ≤ Braun + Rosa + Blau. In Grenzfällen können die Flächen Rosa und Blau beide Null werden, dann gilt das Gleichheitszeichen =, sonst immer das Ungleichheitszeichen <. (Bild: Fritz Gassmann)

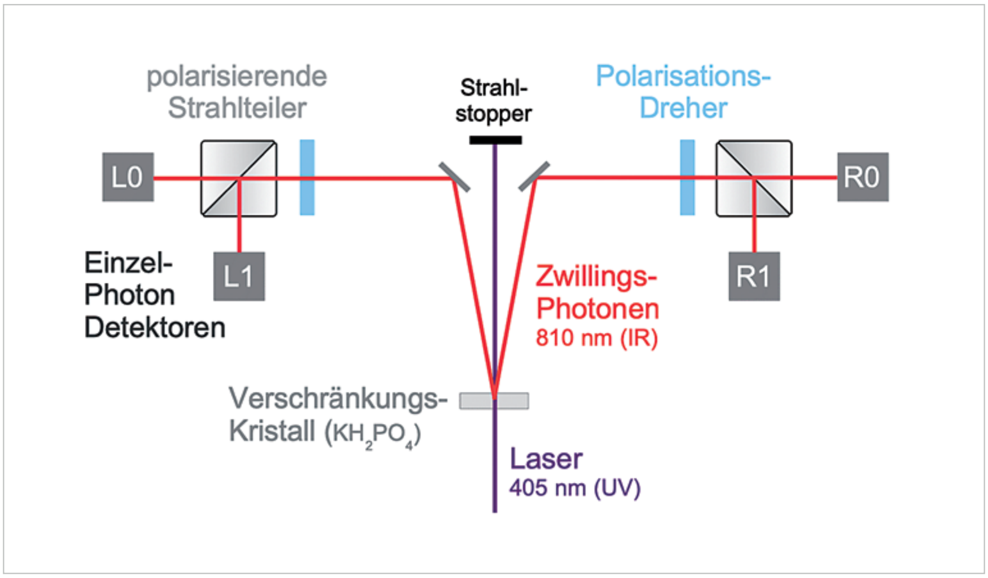


Abb. 2: Prinzipskizze der Experimente von Clausen, Aspen und Zeilinger. Mit Hilfe von Koinzidenzzählern wird gemessen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Zwillingsphotonen in L0 und R0 gelangen. Erklärungen im Text. (Bild: Fritz Gassmann)

Wie kann der einfachste Bell-Test verletzt werden? Die Experimente der Nobelpreisträger hatten im Prinzip den in der **Abb. 2** skizzierten Aufbau **(vgl. auch «Bellsche Ungleichung», Wikipedia)**. In einem Verschränkungskristall entstehen aus einem hochfrequenten Photon (violett) zwei verschränkte infrarote Photonen (rot) mit je halber Energie. Diese haben vorerst keine Polarisation, da sie sich in einem überlagerten Zustand befinden *(nichtrealistisch)*. In je einem Polarisationsdreher kann der undefinierte Zustand jedoch um beliebige Winkel gedreht werden.

Wir berechnen nun auf der Basis der Quantentheorie, mit welcher Wahrscheinlichkeit p(x,y) das linke Photon im Detektor L0 *und* das rechte Photon im Detektor R0 landen. Dabei sind x und y die Stellungen der Polarisationsdreher links und rechts, wobei für die Messresultate nur die Winkeldifferenzen y-x massgebend sind. Diese Wahrscheinlichkeiten können in Experimenten mit Hilfe von Koinzidenzzählern gemessen und mit den theoretischen Werten verglichen werden.

Wir nehmen an, dass das linke Photon etwas früher im polarisierenden Strahlteiler ankommt als dasjenige auf der rechten Seite. Der Strahlteiler ist so gebaut, dass unpolarisierte Photonen mit Wahrscheinlichkeit ½ in den Detektor L0 gelangen. Sobald dies geschieht, ist der Zustand des linken Photons bestimmt. An diesem Vorgang erkennt man, dass im Rahmen der Quantentheorie eine Messung nicht einfach als Ablesung einer Eigenschaft interpretiert werden kann, sondern dass sie den Zustand aktiv erzeugt.

Mit dem so definierten Zustand des linken Photons ist instantan auch der Zustand des Zwillingsphotons auf der rechten Seite als parallel dazu definiert *(Nichtlokalität)*, da verschränkte Photonen gemäss der Quantentheorie immer im gleichen Zustand sind, egal wie weit sie voneinander entfernt sind (auch astronomische Distanzen sind zugelassen!).

Ohne Polarisationsdreher würde nun das rechte Photon mit Wahrscheinlichkeit 100% in den Detektor R0 gelangen. Der Polarisationsdreher dreht jedoch die Polarisation des Photons um den Winkel b-s gegenüber dem linken. Nach dem Gesetz von Etienne Louis Malus (um 1810) ist deshalb die Wahrscheinlichkeit gleich $\cos^2(b-s)$, dass das rechte Photon in den Detektor R0 gelangt. Damit können wir den Bell-Test mit den optimalen Werten s=0°, b=30°, w=60° berechnen (andere Werte geben kleinere oder gar keine Verletzung des Bell-Tests). Dabei verwenden wir die Regel, dass die Wahrscheinlichkeit für gleichzeitige Klicks der Detektoren L0 und R0 gleich dem *Produkt* der beiden separaten Wahrscheinlichkeiten ist:

$p(s,b) = \frac{1}{2}\cos^2 30° = \frac{3}{8} \quad (\cos 30° = \sqrt{3}/2)$

$p(s,w) = \frac{1}{2}\cos^2 60° = \frac{1}{8} \quad (\cos 60° = \frac{1}{2})$

$p(b,\cancel{w}) = \frac{1}{2}\sin^2 30° = \frac{1}{8} \quad (\sin 30° = \frac{1}{2})$

Der letzte Term braucht eine zusätzliche Überlegung: Hier müssen die *nicht weiblichen* ~~w~~, nicht die weiblichen w gezählt werden, es muss also die Gegenwahrscheinlichkeit verwendet werden. Diese ist für den Winkel von 30° zwischen b und w gleich $1 - \cos^2 30°$ $= \sin^2 30°$. Der Bell-Test lautet nun $3/8 \leq 1/8 + 1/8$, was offensichtlich falsch ist, der Bell-Test wird also bei Wahl dieser Winkel verletzt.

Sollten Experimente dieselben Resultate wie die obige quantentheoretische Rechnung ergeben, wäre bewiesen, dass es im Mikrokosmos *nicht lokal-realistisch* zugeht. Die drei Physik-Nobelpreisträger von 2022 haben dies experimentell zweifelsfrei gezeigt und damit das physikalische Weltbild revolutioniert. Verschränkung ist heute ein experimentell bewiesenes *nichtlokales* und *nichtrealistisches* Phänomen ausserhalb Raum und Zeit, das durch keine Theorie mit lokalen versteckten Variablen, wie Einstein dies wollte, erklärt werden kann.

Kryptografie mit Zwillingsphotonen

Ein junger polnischer Doktorand an der Oxford University, Artur Ekert, hat 1991 erkannt, dass die rätselhaften nicht-lokalen Quantenkorrelationen als kryptografische Schlüssel verwendet werden könnten. Diese Idee öffnete eine Türe zur Quanteninformations-Community und bereits 1995 demonstrierten Physiker der Université de Genève die Verteilung eines Schlüssels via Glasfaserkabel der Swisscom zwischen Lausanne, Nyon und Genf (Gisin 2023). Aus diesem Projekt wurde als Spinoff 2001 die Firma «ID Quantique» in Genf gegründet. Zeilinger interessierte sich ebenfalls für Quanteninformation und patentierte 1999 sein EPR-Protokoll zum Schlüssel-Austausch.

Weshalb kann ein Schlüssel ausgetauscht werden aber trotzdem soll es unmöglich sein, damit instantane Informationsübermittlung zu entwickeln? Der Schlüsseltausch basiert darauf, dass zwei Stationen, L und R, von einer zwischen ihnen liegenden Quelle verschränkte Photonen erhalten und diese messen. Wenn die Polarisatoren parallel gestellt sind, gehen die Photonen bei beiden Stationen in die analogen Detektoren, d.h. beide in 0 oder beide in 1 (vgl. Abb. 2). Fasst man diese Detektornummern als Binärzahlen auf, entsteht so an beiden Stationen dieselbe binäre Zufallszahlenfolge, was äquivalent zu zwei identischen Schlüsseln ist. Es ist aber nicht möglich, diesen Vorgang zur Übertragung von Information zu verwenden, weil das erstankommende Photon den Kanal 0 oder 1 zufällig auswählt und nicht gesteuert werden kann.

Zusätzlich zum Schlüsselaustausch lässt sich durch einen Bell-Test feststellen, ob jemand versucht, die Verbindung zu hacken. Zu diesem Zweck wechselt man an beiden Stationen unabhängig voneinander und zufällig die Polarisationsdreher zwischen optimalen Positionen. Durch anschliessenden Austausch der eingestellten Positionen via das normale Internet lässt sich durch einen Bell-Test feststellen, ob die Photonen verschränkt waren. Falls dabei die Bell-Ungleichung erfüllt wird, war dies nicht der Fall und der Schlüssel wird verworfen und es wird ein anderer Übertragungsweg gesucht. Dieser Test beruht darauf, dass es keinen «Quantenkopierer» gibt, d.h. dem Hacker ist es nicht möglich, das ankommende Photon zu kopieren, um es zu analysieren und die Kopie weiterzuschicken, damit niemand etwas merken sollte (die Kopie ist nicht mehr verschränkt mit dem Photon der Gegenstation).

Diese Kryptografieanwendung hat weltweit riesige Aufmerksamkeit auf sich gezogen und das Interesse vieler Forschungsgruppen auf die Quantenoptik gelenkt. In kurzer Zeit entstanden neue Ansätze zu Quanten-Computern, zur Teleportation von Quantenzuständen und zum Quanten-Internet; der Weg zu Nobelpreisen wurde geöffnet.

Fritz Gassmann

Literatur

Bell J.S. 1964. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. Physics 1(3): 195-200.

Gisin N. 2023. Quantum non-locality: from denigration to the Nobel Prize, via quantum cryptography. Europhysics News 54/1: 20-23