MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

No 116. ——————— 1855.

W. Denzler. — Ein Beitrag zur Analysis der complexen Zahlen.

(Schluss.)

§. 23. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen und so bestimmt wird, dass

$$2\mu\pi + \beta \mathrm{lMod.}(p_1 + q_1 i) + \alpha[2\gamma\pi + \mathrm{arg.}(p_1 + q_1 i)] = \quad (1$$
$$(\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$$

so hat man die gesonderten Gleichungen:

$$ {}_{\xi}\log_{\gamma}\overset{\tau p+qi}{(p_1 + q_1 i)}{}^{\alpha+\beta i} = (\alpha+\beta i)_{\gamma}\log\overset{\tau p+qi}{(p_1 + q_1 i)} + {}_{\xi+\mu}\log\overset{\tau p+qi}{1} \quad (2$$

$$(\alpha + \beta i)_{\gamma}\log\overset{\tau p+qi}{(p_1 + q_1 i)} = {}_{-\mu}\log_{\gamma}\overset{\tau p+qi}{(p_1 + q_1 i)}{}^{\alpha+\beta i} \quad (3$$

Die erste dieser 2 Gleichungen gibt sofort die vollkommene Gleichung:

$$\log\overset{\tau p+qi}{(p_1 + q_1)}{}^{\alpha+\beta i} = (\alpha + \beta i)\log\overset{\tau p+qi}{(p_1 + q_1 i)} + \log\overset{\tau p+qi}{1} \quad 4)$$

II. Folgerungen von I. sind folgende Sätze:

Wenn

$$2\mu_1\pi + \frac{1}{m}[2\gamma\pi + \mathrm{arg.}(p_1 + q_1 i)] = (\pi \text{ od zw. } \pi \text{ u.} - \pi) \quad (1$$

wo m aber nur eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten darf; so ist

$$2)\qquad {}_{\xi}\log_{\gamma}\overset{\tau p+qi}{\sqrt[m]{(p_1+q_1 i)}} = \frac{1}{m}\cdot {}_{\gamma+m(\xi+\mu_1)}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1+q_1 i)$$

und hieraus bei derselben Bedeutung von m:

$$3)\qquad \log\overset{p+qi}{\sqrt[m]{(p_1+q_1 i)}} = \frac{1}{m}\cdot\log(\overset{p+qi}{p_1}+q_1 i)$$

Wenn ferner

$$2\mu\pi+\frac{1}{m}\left[2\gamma\pi+\arg(p_1+q_1 i)^m\right] = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi) \qquad (4$$

wo wieder m nur eine pos. oder neg. ganze Zahl bedeutet, so ist:

$$5)\qquad {}_{\gamma+m(\xi+\mu)}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1+q_1 i)^m = m\,{}_{\xi}\log_{\gamma}\overset{\tau p+qi}{\sqrt[m]{(p_1+q_1 i)^m}}$$

und hieraus:

$$6)\qquad \log(\overset{p+qi}{p_1}+q_1 i)^m = m\log\overset{p+qi}{\sqrt[m]{(p_1+q_1 i)^m}}$$

In dem besondern Falle, da α ein positiver oder negativer ächter Bruch ist, findet stets auch folgende Gleichung Statt:

$${}_{0}\overset{\tau p+qi}{\log}{}_{0}(p+qi)^{\alpha} = \alpha\,{}_{0}\overset{\tau p+qi}{\log}(p+qi)$$

Anmerkung 1. Wenn in I. 4) die τ weggelassen würden, so erhielte man eine Gleichung, bei der zwar sämmtliche Werthe des ersten Theils auch zugleich Werthe des 2ten Theils wären, hingegen unendlich viele Werthe des 2ten Theils sich alsdann nicht unter den Werthen des ersten Theils befänden.

Anmerkung 2. In Ohm's »Geist der math. Anal. 1842, pag. 126«. findet sich, wenn wir unsere Zeichen beibehalten:

$$ {}_0\log_0^{\,{}_0p+qi}(p_1 + q_1i)^{\alpha+\beta i} = (\alpha + \beta i)\,{}_0\log^{\,{}_0p+qi}(p + qi) $$

Diese Gleichung ist durchaus nur in dem besondern Falle richtig, da $[\beta\,\mathrm{l\,Mod}(p_1 + q_1i) + \arg(p_1 + q_1i)]$ entweder $= \pi$, oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt. Uebrigens haben wir für den Fall, da $p + qi = e = 2{,}718\ldots$, die Unrichtigkeit dieser Gleichung schon im §. 20 bemerkt.

§. 24.

Die logarithmische Reihe $(p + qi) - \frac{1}{2}(p + qi)^2 + \frac{1}{3}(p + qi)^3 - \ldots\ldots$ gibt in den sämmtlichen Fällen ihrer Convergenz den speziellen Werth ${}_0\log(1 + p + qi)$ von $\log(1 + p + qi)$, was leicht daraus gefolgert werden kann, dass die binomische Reihe für $(1 + p + qi)^{\alpha+\beta i}$, so oft sie convergirt, den besondern Werth ${}_0(1 + p + qi)^{\alpha+\beta i}$ und die Exponentialreihe E^{p+qi} den speziellen Werth ${}_0e^{p+qi}$ von e^{p+qi} ausdrückt.

Die Fortsetzung dieser Mittheilungen, welche der Raum dieser Blätter nicht gestattet, muss ich einer spätern Gelegenheit vorbehalten.

Küsnach, den 11. März 1855.