MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

No 115. 1855.

W. Denzler. — Ein Beitrag zur Analysis der complexen Zahlen.

(Forsetzung.)

m den grössten gemeinschaftlichen Faktor für r_1 und q_1,

$m_1 m$ den grössten gemeinschaftlichen Faktor für $p_1 r_1$ und $q_1 s_1$, mithin m_1 denjenigen für p_1 und s_1,

so hat man folgende Beziehungen:

1) Die Zahl der verschiedenen Werthe

$$\text{von} \quad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{m}$$

2) Die Zahl der verschiedenen Werthe

$$\text{von} \quad a^{\frac{pr}{qs}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{m m_1}$$

3) Die Zahl der den beiden Potenzen $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}$ und $a^{\frac{pr}{qs}}$ gemeinsamen Werthe ist $= \frac{q_1 s_1}{m m_1}$

4) Es ist nur dann: $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}$, wenn $m_1 = 1$. wenn mithin die absoluten Werthe von p und s relative Primzahlen sind.

Anmerkung. Ohm behauptet in seinem „Geist der mathem. Anal. pag. 122«, wenn wir unsere Zeichen gebrauchen, dass

$$_{0}\left[_{0}(p+qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} = {}_{0}(p+qi)^{(\alpha+\beta i)(\alpha_1+\beta_1 i)}$$

Diess ist im Allgemeinen nach dem Lehrsatze I. unrichtig, was übrigens auch schon folgendes Beispiel zeigt:

Es ist

$$(-1)^2 = 1, \quad {}_{0}1^{\frac{1}{2}} = 1, \quad (-1)^1 = -1;$$

mithin wäre nach der Ohm'schen Gleichung

$$_{0}\left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad 1 = {}_{0}(-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1.$$

Der Lehrsatz I. giebt in diesem Falle $\gamma = -1$, und mithin die Gleichung

$$_{0}\left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot {}_{-1}1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Die Ohm'sche Gleichung ist durchaus nur dann richtig, wenn für γ aus der Gleichung

$$2\gamma\pi + \beta lm + \alpha\varphi = (\pi \text{ oder zwischen } \pi \text{ und } -\pi)$$

der Werth o, oder, wenn $\beta_1 = o$, ein solcher Werth für γ gezogen wird, der mit α_1 multiplicirt, eine pos. oder neg. ganze Zahl oder o als Produkt erzeugt, welch' letzterer Fall z. B. immer eintritt, wenn α_1 nicht gebrochen, und eben $\beta_1 = o$ ist.

Ohm sagt in derselben Schrift pag. 134: »Die Gleichung $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{\mu}{\gamma}} = a^{\frac{m\mu}{n\gamma}}$ ist eine vollkommen richtige und bedarf keiner Correction in allen den besondern Fällen, in denen die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{\mu}{\gamma}$ in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, und zu gleicher Zeit m und γ, desgleichen n und μ keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben.« Hierüber möchten wir nur bemerken, dass es in dieser Frage nach II. 4) nicht auf die Beschaffenheit von n und μ ankömmt. So sind z. B.

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{1}} = a \quad \text{und} \quad \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{3}}$$

vollkommene Gleichungen, obschon hier n und μ den gemeinschaftlichen Theiler 3 oder 2 haben.

§. 14. Lehrsätze.

I. Wenn $m = \mathrm{Mod}(p + qi)$ und $\varphi = \arg(p + qi)$, wenn ferner

γ_1 und γ reell, aber nicht gebrochen, und

$$2\gamma_1\pi + \beta_1 \mathrm{l}m + \alpha_1(2\tau\pi + \varphi) = (\pi \text{ oder zw. } \pi \text{ und } -\pi)$$
$$2\gamma\pi + \beta \mathrm{l}m + \alpha(2\tau\pi + \varphi) = (\pi \text{ oder zw. } \pi \text{ und } -\pi)$$

so hat man die gesonderte Gleichung:

$$_{\tau_1}\left[{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} \cdot {}_{\tau_0}1^{\alpha+\beta i}$$
$$= {}_{-\gamma_1+\tau_0}\left[{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}\right]^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\gamma+\tau_1}1^{\alpha_1+\beta_1 i}$$
$$_{\tau_1}\left[{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i}$$
$$= {}_{-\gamma_1}\left[{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}\right]^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\gamma+\tau_1}1^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

und hieraus die vollkommene Gleichung

$$\left[(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} \cdot 1^{\alpha+\beta i}$$
$$= \left[(p + qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}\right]^{\alpha+\beta i} \cdot 1^{\alpha_1+\beta_1 i}.$$

II. Bezeichnet a eine complexe Zahl

p und q pos. oder neg. ganze Zahlen, deren abs. Werthe p_1 und q_1 rel. Primzahlen sind,

r und s pos. oder neg. ganze Zahlen, deren abs. Werthe r_1 und s_1 rel. Primzahlen sind,

m den grössten gemeinschaftlichen Faktor für q_1 und r_1,

m_1 den grössten gemeinschaftlichen Faktor für p_1 und s_1,

wo mithin m und m_1 rel. Primzahlen sind, und mm_1 der grösste gemeinschaftliche Faktor für p_1r_1 und q_1s_1 ist, so findet folgendes Statt:

1) Die Zahl der verschiedenen Werthe

von $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}$ ist $= \frac{q_1s_1}{m}$ und von $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{q_1s_1}{m_1}$

2) Die Zahl der den beiden Potenzen $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}$ und $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}}$ gemeinsamen Werthe ist $= \frac{q_1s_1}{mm_1}$

3) Die Zahl der verschiedenen Werthe sowohl von $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \cdot 1^{\frac{p}{q}}$, als auch von $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}} \cdot 1^{\frac{r}{s}} = q_1s_1$

4) Es ist nur dann $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}}$, wenn $m = m_1$, mithin $m = m_1 = 1$, wenn also nicht bloss q_1 und r_1, sondern auch p_1 und s_1 relative Primzahlen sind.

5) Es ist nur dann $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}} \cdot 1^{\frac{r}{s}}$, wenn $m = 1$.

6) Wenn $m > 1$, so gibt es keine Potenz, mit der $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}}$ multiplicirt ein mit $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}$ gleichbedeutendes Produkt gäbe.

7) Es ist in jedem Falle: $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \cdot 1^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{p}{q}} \cdot 1^{\frac{r}{s}}$

§. 15. Aufgabe.

Die Gleichung:

$$ {}_{\gamma_1}\left[\gamma(p+qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} \cdot {}_{\gamma_0}1^{\alpha+\beta i} \tag{1} $$

$$ = {}_{\gamma_1+\varepsilon_1}\left[\gamma+\varepsilon(p+qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} \cdot {}_{\gamma_0+\varepsilon_0}1^{\alpha+\beta i} $$

nach ε, ε_1 und ε_0 in ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung.

Man löse die Gleichungen

$$ 2\mu\pi + 2\alpha\varepsilon\pi = (\pi \text{ oder zw. } \pi \text{ und } -\pi) \tag{2} $$

$$ 2\mu_1\pi + \beta l r + \alpha(2\gamma\pi + \varphi) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi) \tag{3} $$

$$ 2(\mu_0 + \mu_1 + \mu + \alpha\varepsilon)\pi + \beta l r + \alpha(2\gamma\pi + \varphi) = \tag{4} $$
$$ = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi), $$

wo $r = \text{Mod.}(p + qi)$ und $\varphi = \arg.(p + qi)$, nach μ, μ_1 und μ_0 in ganzen Zahlen auf, substituire dann die gefundenen Werthe in die Gleichungen

$$ \beta\varepsilon_0 + \beta_1(\varepsilon_1 + \mu_0) + (\alpha_1\beta + \alpha\beta_1)\varepsilon = -\beta_1\mu \tag{5} $$

$$ \alpha\varepsilon_0 + \alpha_1(\varepsilon_1 + \mu_0) + (\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1)\varepsilon = \mp \alpha_1\mu - \varsigma \tag{6} $$

und löse endlich diese 2 letztern Gleichungen nach ε, ε_1, ε_0 und ς in ganzen Zahlen auf. Die Auflösungen dieser Gleichungen sind dann die Auflösungen der gegebenen Gleichungen, und umgekehrt.

Setzt man z. B. in die gegebene Gleichung 2 für γ, dann 5 für ε_1, 30 für ε und -36 für ε_0, so hat man eine identische Gleichung.

Die Aufgabe kann im Allgemeinen nur dann gelöst werden, wenn p, q, α, β, α_1, β_1 und γ in bestimmten Zahlen gegeben sind, dagegen können γ_1 und γ_0 beliebig gegeben sein, und es sind von γ_1 und γ_0 die Zahlen ε, ε_1 und ε_0 ganz unabhängig.

Die Auflösung dieser Aufgabe involvirt mehrere interessante Lehrsätze als Specialitäten.

§. 16. Aufgaben.

I. Die Gleichung

1) $$(p + qi)^{\alpha + \beta i} = (p_1 + q_1 i)^{\alpha + \beta i}$$

nach $p + qi$, und die Gleichung

2) $$_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i} = {}_{\tau_1}(p_1 + q_1 i)^{\alpha + \beta i}$$

nach $p + qi$ und τ aufzulösen.

Auflösung.

Die Gleichung I. wird nur dann identisch, wenn man

3) $$p + qi = (p_1 + q_1 i) \cdot E^{\frac{\log 1}{\alpha + \beta i}} = (p_1 + q_1 i) \cdot 1^{\frac{1}{\alpha + \beta i}}$$

setzt.

Bezeichnet ς irgend eine pos. oder neg. ganze Zahl oder o, so wird die Gleichung 2) nur dann identisch, wenn man

4) $$p + qi = (p_1 + q_1 i) \cdot E^{\frac{\varsigma \log 1}{\alpha + \beta i}}$$ und

5) $$\tau = \tau_1 - \gamma$$

setzt, wo γ aus folgender Gleichung zu ziehen ist:

6) $$2\gamma\pi + \arg.(p_1 + q_1 i) + \frac{2\alpha\pi\varsigma}{\alpha^2 + \beta^2} = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$$

woraus ohne Schwierigkeit folgt, dass:

7) $$\text{Mod.}(p + qi) = E^{\frac{2\beta\varsigma\pi}{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \text{Mod.}(p_1 + q_1 i)$$

8) $$\arg.(p + qi) = \arg.(p_1 + q_1 i) + \frac{2\alpha\varsigma\pi}{\alpha^2 + \beta^2} + 2(\tau_1 - \tau)\pi$$

wenn nämlich τ, oder, wenn man $\tau = \tau_1$ annähme, die ς so bestimmt wird, dass der zweite Theil der Gleichung 8) zu einem Bogen wird, der entweder $= \pi$ ist, oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt.

Man hat z. B. folgende identische Gleichungen:

$$_{11}\left[13{,}172(\cos\frac{11}{30}\pi + i\sin\frac{11}{30}\pi)\right]^{1+3i}$$

$$= {}_{11}\left[2(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi)\right]^{1+3i}$$

$$_{6}\left[7(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi)\right]^{\frac{3}{5}} = {}_{4}(-7)^{\frac{3}{5}}$$

II. Bezeichnen α und β, wie oben, eindeutige Grössen, und hat man die vollkommene Gleichung

$$(x + yi)^{\alpha+\beta i} = P + Qi$$

so muss nothwendig

$$P + Qi = (P + Qi) \cdot 1^{\alpha+\beta i}$$

und

$$x + yi = (P + Qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$$

III. Die Gleichung

$$_{\tau}(x + yi)^{\alpha+\beta i} = P + Qi$$

wo α, β, P und Q eindeutige Zahlen bezeichnen, nach $x + yi$ und τ aufzulösen.

Auflösung.

Es ist immer

$$x + yi = E^{\frac{_{\mu}\log(P+Qi)}{\alpha+\beta i}} = {}_{\mu}(P + Qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$$

Zur Ermittlung des τ nehme man nun μ beliebig reell, nur nicht gebrochen an, bestimme hierauf μ_1 in ganzen Zahlen so, dass

$$2\mu_1\pi + \frac{\alpha[2\mu\pi + \arg.(P + Qi)] - \beta l\mathrm{Mod.}(P + Qi)}{\alpha^2 + \beta^2} =$$

$$= (\pi \text{ oder zw. } \pi \text{ und } -\pi)$$

und löse endlich die Gleichungen

$$\beta(\mu_1 + \tau) = 0$$
$$\alpha(\mu_1 + \tau) = \varsigma$$

nach τ und ς in ganzen Zahlen auf. Jeder der auf diese Weise für τ erhaltenen Werthe gehört den für τ verlangten Werthen an, und umgekehrt.

§. 17. Lehrsatz.

Die Gleichung

$$_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i} = {}_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}$$

wird nur dann identisch, wenn

$$\alpha + \beta i = (\alpha_1 + \beta_1)\, {}_{\tau_1}\log^{\tau p+qi}(p + qi) + {}_{\varsigma}\log^{\tau p+qi} 1$$

gesetzt wird, wo ς beliebig reell, jedoch nicht gebrochen, angenommen werden darf.

§. 18. Aufgaben.

I. Welche besondere Werthe der $(\alpha + \beta i)^{\text{ten}}$ Potenz von ${}_{\tau}\sqrt[\alpha+\beta i]{(p + qi) \cdot {}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i}}$ coincidiren mit $(p + qi) \cdot {}_{\mu}1^{\alpha + \beta i}$?

Auflösung.

Es sei

$$1)\qquad {}_{\tau_2}\left[{}_{\tau}\sqrt[\alpha+\beta i]{(p + qi) \cdot {}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i}}\right]^{\alpha + \beta i} = (p + qi) \cdot {}_{\mu}1^{\alpha + \beta i}$$

Zur Berechnung der Werthe von τ_2 löse man nun von den 2 Gleichungen

$$2)\quad 2\tau_0\pi + 2\tau_1\pi\alpha + \arg.(p + qi) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$$

$$3)\quad 2\tau_3\pi + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\left[2\pi(\tau + \tau_0) + \arg.(p + qi) + 2\alpha\tau_1\pi\right] - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\left[l \text{ Mod.}(p + qi) - 2\beta\tau_1\pi\right] = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$$

die 2) nach τ_0, dann die 3) nach τ_3 in ganzen Zahlen auf, setze dann den für τ_3 gefundenen Werth in die Gleichungen

$$4)\qquad \beta(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = \beta\mu$$

$$5)\qquad \alpha(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = \alpha\mu + \varsigma$$

und löse endlich diese 2 letztern Gleichungen nach τ_2 und ς in ganzen Zahlen auf. Die für τ_2 auf diese Weise erhaltenen Werthe sind die Auflösungen der Gleichung 1) nach τ_2, und umgekehrt.

Setzt man z. B. $\beta = \tau_1 = \mu = 0$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $p = 16$ so wird nach den obigen Gleichungen $\tau_3 = 4$ und $\tau_2 = 4\,(1 + \varsigma)$, woraus natürlich folgt, dass nur dann $_{\tau_2}\left[{}_1\sqrt[1/4]{16}\right]^{1/4} = 16$, wenn τ_2 entweder o oder eine reelle ganze Zahl ist, die 4 als Faktor enthält. Diess Beispiel zeigt zugleich, wie nothwendig die Beibehaltung des β in der Gleichung 4) ist.

II. Die Gleichung

$$1)\qquad {}_\tau\sqrt[\alpha+\beta i]{(p + qi)\cdot {}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i}} = {}_\mu(p + qi)^{\frac{1}{\alpha + \beta i}}$$

nach μ aufzulösen.

Auflösung.

Man bestimme zuerst τ_0, das nicht gebrochen sein darf, so, dass

$$2\tau_0\pi + \arg.(p + qi) + 2\alpha\tau_1\pi = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi)$$

wird, und löse hierauf die Gleichungen

$$\beta(\tau + \tau_0) = \beta\mu$$

$$\frac{\alpha\mu}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha(\tau + \tau_0)}{\alpha^2 + \beta^2} + g$$

nach μ und g in ganzen Zahlen auf. Dadurch gelangt man nur zu den sämmtlichen verlangten Werthen von μ.

§. 19. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt ist, dass

1) $2\mu\pi + \arg.(p + qi) + \arg.(p_1 + q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } - \pi)$

so hat man folgende gesonderte Gleichungen:

2) $_{\tau}\log[(p + qi)(p_1 + q_1 i)] = {}_{\tau}\log(p + qi) + {}_{\mu}\log(p_1 + q_1 i)$

3)
$$_{\tau_1 + \tau_0 - \mu}\log[(p + qi)(p_1 + q_1 i)] = {}_{\tau_1}\log(p + qi) + {}_{\tau_0}\log(p_1 + q_1 i)$$

und hieraus die vollkommene Gleichung:

4) $\log[(p + qi)(p_1 + q_1 i)] = \log(p + qi) + \log(p_1 + q_1 i)$

II. Wenn γ reell, aber nicht gebrochen und so bestimmt ist, dass

5) $2\gamma\pi + \arg.(p + qi) - \arg.(p_1 + q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } - \pi)$

so hat man die gesonderten Gleichungen

6) $$_{\tau}\log\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i} = {}_{\tau}\log(p + qi) - {}_{-\gamma}\log(p_1 + q_1 i)$$

7) $$_{\tau_1 - \tau_0 - \gamma}\log\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i} = {}_{\tau_1}\log(p + qi) - {}_{\tau_0}\log(p_1 + q_1 i)$$

und hieraus die vollkommene Gleichung

8) $$\log\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i} = \log(p + qi) - \log(p_1 + q_1 i)$$

Anmerkung 1. Ohm hat in seinem „Geist der math. Anal. 1842, pag. 117", wenn wir unsere Bezeichnung beibehalten, das Stattfinden folgender Gleichungen behauptet:

$$_{0}\log[(p + qi)(p_1 + q_1 i)] = {}_{0}\log(p + qi) + {}_{0}\log(p_1 + q_1 i)$$

$$_{0}\log\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i} = {}_{0}\log(p + qi) - {}_{0}\log(p_1 + q_1 i)$$

Diese beiden Gleichungen sind aber nach I. und II. unrichtig, wie diess übrigens auch schon folgendes einfache Beispiel zeigt: Es ist ${}_0\log - 1 = \pi i$ und ${}_0\log + 1 = o$. Setzt man nun in den Ohm'schen Gleichungen $q = q_1 = o$ und $p = p_1 = -1$, so findet sich:

$${}_0\log[(-1)(-1)] \text{ oder } o = {}_0\log(-1) + {}_0\log(-1) \text{ oder } 2\pi i$$

$${}_0\log\frac{+1}{-1} \text{ oder } \pi i = {}_0\log 1 - {}_0\log(-1) \text{ oder } -\pi i$$

Die obigen Lehrsätze I. und II. aber geben in diesem Falle $\mu = -1$ und $\gamma = +1$, mithin:

$${}_0\log[(-1)(-1)] = {}_0\log(-1) + {}_0\log -1 + {}_{-1}\log 1$$
$$= 2\pi i - 2\pi i$$

$${}_0\log\frac{+1}{-1} = {}_0\log 1 - {}_0\log -1 + {}_1\log 1 = -\pi i + 2\pi i$$

Von den Ohm'schen Gleichungen ist die erste durchaus nur dann richtig, wenn $\arg(p + qi) + \arg(p_1 + q_1 i)$ ein Bogen ist, der entweder $= \pi$ oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt, und die 2te, wenn $\arg(p + qi) - \arg(p_1 + q_1 i)$ ebenfalls ein solcher Bogen ist.

Anmerkung 2. So wenig man aus der Gleichung 8) schliessen darf, dass im Falle $p + qi = p_1 + q_1 i$ die Gleichung Statt finde: $\log 1 = o$; eben so wenig geht aus 4) die Gleichung $\log(p + qi)^2 = 2\log(p + qi)$ hervor. Die sämmtlichen Werthe des 2ten Theils dieser Gleichung sind zwar auch Werthe des ersten Theils, aber nicht umgekehrt. So ist z. B., wenn γ eine unendlich vieldeutige Zahl darstellt, die o und jede pos. oder neg. ganze Zahl zu ihren Werthen hat, jeder der unendlich vielen Werthe des Ausdrucks $4\gamma\pi i$ ein Werth von $\log(-1)^2$; aber auch nicht einen einzigen von allen diesen Werthen vermag $2\log(-1)$ zu geben.

§. 20. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt wird, dass

1) $$2\mu\pi + \beta \mathrm{lMod.}(p + qi) + \alpha[2\tau_1\pi + \arg.(p + qi)] = (\pi \text{ oder zw. } \pi \text{ u. } - \pi)$$

so hat man die gesonderten Gleichungen:

2) $${}_{\tau}\log_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha+\beta i} = (\alpha + \beta i)_{\tau_1}\log(p + qi) + {}_{\tau+\mu}\log 1$$

3) $$(\alpha + \beta i)_{\tau_1}\log(p + qi) = {}_{-\mu}\log_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha+\beta i}$$

Aus der 2) folgt dann die vollkommene Gleichung:

4) $$\log(p + qi)^{\alpha+\beta i} = (\alpha + \beta i)\log(p + qi) + \log 1$$

II. Aus I. ergeben sich folgende bemerkenswerthe Specialitäten: wenn

1) $$2\mu_1\pi + \frac{1}{m}[2\tau_1\pi + \arg.(p + qi)] = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } - \pi)$$

wo m aber nur eine pos. oder neg. ganze Zahl bedeuten darf; so ist:

2) $${}_{\tau}\log_{\tau_1}\sqrt[m]{(p + qi)} = \frac{{}_{\tau_1+(\mu_1+\tau)m}\log(p + qi)}{m}$$

und hieraus bei derselben Bedeutung von m

3) $$\log\sqrt[m]{(p + qi)} = \frac{1}{m}\log(p + qi)$$

Wenn ferner

4) $$2\mu_0\pi + \frac{1}{m}[2\tau_1\pi + \arg.(p + qi)^m] = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } - \pi)$$

wo wieder m nur eine pos. oder neg. ganze Zahl bedeutet; so ist:

5) $${}_{\tau_1+m(\mu_0+\tau)}\log(p + qi)^m = m_{\tau}\log_{\tau_1}\sqrt[m]{(p + qi)^m}$$

und hieraus

$$6) \qquad \log(p + qi)^m = m \log\sqrt[m]{(p + qi)^m}$$

So ist z. B. $\log 3^2 = 2 \log\sqrt{3^2} = 2 \log(\pm 3)$ und nicht $= 2\log 3$, da sämmtliche in dem Ausdruck $l9 + 2(2\gamma + 1)\pi i$ enthaltenen Werthe nur Werthe von $\log 3^2$, nicht auch zugleich von $2\log 3$ sind.

In dem besondern Falle, da α ein positiver oder negativer ächter Bruch, findet immer auch die Gleichung Statt:

$$7) \qquad {}_o\log_o(p + qi)^\alpha = \alpha_o\log(p + qi)$$

Anmerkung. In „Ohm's Geist der math. Anal. 1842, p. 122" findet sich, wenn wir unsere Bezeichnungsweise gebrauchen, die Gleichung behauptet

$${}_o\log_o(p + qi)^{\alpha + \beta i} = (\alpha + \beta i)\,{}_o\log(p + qi)$$

Diess ist unrichtig. Setzen wir z. B. $p = - e = - 2{,}718\ldots$, $q = \beta = o$, $\alpha = 2$; so findet man aus dieser Gleichung

$${}_o\log(-e)^2 \text{ oder } 2 = 2{}_o\log(-e) = 2(1 + \pi i)$$

Die obige Gleichung I. 1) aber gibt in diesem Falle $\mu = -1$, und hernach die Gleichung I. 2)

$${}_o\log(-e)^2 = 2\,{}_o\log(-e) + {}_{-1}\log 1 = 2(1 + \pi i) - 2\pi i$$

Die Ohm'sche Gleichung ist durchaus nur dann richtig, wenn β lMod$(p + qi) + \alpha$ arg$(p + qi)$ entweder $= \pi$, oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt.

§. 21. Lehrsätze.

I. Wenn

$$1) \qquad {}_{\tau_1}\log(p_1 + q_1 i)^{\tau p + qi} = {}_{\gamma_1}\log(p_1 + q_1 i)^{\gamma p + qi}$$

so muss nothwendig

$$2)\quad \frac{\tau_1 - \gamma_1}{\tau - \gamma} = \frac{\mathrm{lMod.}(p_1 + q_1 i)}{\mathrm{lMod.}(p + qi)} = \frac{2\tau_1\pi + \arg(p_1 + q_1 i)}{2\tau\pi + \arg.(p + qi)}$$

In dem besondern Falle, da $\tau_1 = \tau = \arg(p_1 + q_1 i) = o$ muss $\frac{\mathrm{lMod}(p_1 + q_1 i)}{\mathrm{lMod}(p + qi)} = \frac{\gamma_1}{\gamma}$ sein. Die Gleichung 2) drückt hier die Bedingungen aus, unter welchen die beiden Indices eines Logarithmus bei constantem Werthe desselben eine Aenderung verstatten.

II. Wenn P eine reelle Zahl bezeichnet, so ist von den 2 Gleichungen

$$1)\quad {}_{\gamma_1}^{\gamma p+qi}\log(p_1 + q_1 i) = P$$

$$2)\quad P = \frac{\mathrm{lMod.}(p_1 + q_1 i)}{\mathrm{lMod.}(p + qi)} = \frac{2\gamma_1\pi + \arg.(p_1 + q_1 i)}{2\gamma\pi + \arg.(p + qi)}$$

jede eine Folge der andern.

III. Von den 3 Gleichungen:

$$1)\quad {}_{\gamma_1}^{\gamma p+qi}\log(p_1 + q_1 i) = P + Qi$$

$$2)\quad \gamma = \frac{P\,\mathrm{lMod.}(p + qi) - \mathrm{lMod.}(p_1 + q_1 i) - Q\arg.(p + qi)}{2\pi Q}$$

$$3)\quad \gamma_1 = \frac{(P^2 + Q^2)\,\mathrm{lMod.}(p + qi) - \mathrm{lMod.}(p_1 + q_1) - Q\arg.(p_1 + q_1 i)}{2\pi Q}$$

ist die erste eine Folge der 2 übrigen, und umgekehrt.

Anmerkung. Mit Hülfe der 2 letztern Lehrsätze kann leicht untersucht werden, ob eine gegebene Zahl ein Werth von einem durch den Logarithmanden und die Basis gegebenen Logarithmus ist. So findet man z. B., dass 0,0247 . . — 0,155 . . i zwar nicht ein Werth von $\log e$, wohl aber von $\overset{e}{\log}\, e$, und zwar der specielle Werth ${}_0\overset{1e}{\log}\, e$ ist.

§. 22. Lehrsätze.

I. Wenn μ reell, aber nicht gebrochen, und so bestimmt wird, dass

1) $2\mu\pi + \arg.(p_1 + q_1 i) + \arg.(p_2 + q_2 i) = (\pi$ od. zw. π u. $-\pi)$

so hat man die gesonderten Gleichungen:

$$2)\quad {}_{\tau_1}\overset{\tau p+qi}{\log}[(p_1 + q_1 i)(p_2 + q_2 i)]$$

$$= {}_{\tau_1}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1 + q_1 i) + {}_{\mu}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_2 + q_2 i)$$

$$3)\quad {}_{\tau_1+\gamma_1-\mu}\overset{\gamma p+qi}{\log}[(p_1 + q_1 i)\cdot(p_2 + q_2 i)] +$$

$${}_{\tau_1}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1 + q_1 i)\cdot {}_{\gamma-\tau}\overset{\gamma p+qi}{\log} 1 = {}_{\tau_1}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1 + q_1 i) + {}_{\gamma_1}\overset{\gamma p+qi}{\log}(p_2 + q_2 i)$$

$$4)\quad {}_{\tau_1+\gamma_1-\mu}\overset{\tau p+qi}{\log}[(p_1 + q_1 i)(p_2 + q_2 i)]$$

$$= {}_{\tau_1}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1 + q_1 i) + {}_{\gamma_1}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_2 + q_2 i)$$

und aus dieser letztern die vollkommene Gleichung:

$$5)\quad \overset{\tau p+qi}{\log}[(p_1 + q_1 i)(p_2 + q_2 i)] = \overset{\tau p+qi}{\log}(p_1 + q_1 i) + \overset{\tau p+qi}{\log}(p_2 + q_2 i)$$

II. Wenn ξ reell, aber nicht gebrochen ist, und so bestimmt wird, dass

1) $2\xi\pi + \arg.(p_1 + q_1 i) - \arg.(p_2 + q_2 i) = (\pi$ od. zw. π u. $-\pi)$

so hat man die gesonderten Gleichungen:

$$2)\quad {}_{\tau_1}\overset{\tau p+qi}{\log}\frac{p_1 + q_1 i}{p_2 + q_2 i} = {}_{\tau_1}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1 + q_1 i) - {}_{-\xi}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_2 + q_2 i)$$

$$3)\quad {}_{\tau_1-\gamma_1-\xi}\overset{\gamma p+qi}{\log}\frac{p_1 + q_1 i}{p_2 + q_2 i} + {}_{\tau_1}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1 + q_1 i)\cdot {}_{\gamma-\tau}\overset{\gamma p+qi}{\log} 1$$

$$= {}_{\tau_1}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1 + q_1 i) - {}_{\gamma_1}\overset{\gamma p+qi}{\log}(p_2 + q_2 i)$$

$$4)\quad {}_{\tau_1-\gamma_1-g}\overset{\tau p+qi}{\log}\frac{p_1+q_1 i}{p_2+q_2 i} = {}_{\tau_1}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) - {}_{\gamma_1}\overset{\tau p+qi}{\log}(p_2+q_2 i)$$

und hieraus die vollkommene Gleichung:

$$5)\quad \overset{\tau p+qi}{\log}\frac{p_1+q_1 i}{p_2+q_2 i} = \overset{\tau p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) - \overset{\tau p+qi}{\log}(p_2+q_2 i)$$

Zusatz. Die Weglassung des τ aus den Gleichungen I. 5) und II. 5) würde diese Gleichungen in unvollkommene verwandeln; die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen hätten dann unendlichmal mehr Werthe als die links. Eine brauchbare vollkommene Gleichung zwischen $\overset{c}{\log}(ab)$ oder $\overset{c}{\log}\frac{a}{b}$ und den beiden Zahlen $\overset{c}{\log}\, a$ und $\overset{c}{\log}\, b$ wird wohl kaum existiren.

Anmerkung. In Ohm's »Geist der math. Anal. 1842 pag. 126« findet man 2 Lehrsätze, die in unsern Zeichen sich durch folgende Gleichungen darstellen lassen:

$$_{0}\overset{{}_0 p+qi}{\log}[(p_1+q_1 i)(p_2+q_2 i)] = {}_{0}\overset{{}_0 p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) + {}_{0}\overset{{}_0 p+qi}{\log}(p_2+q_2 i)$$

$$\overset{{}_0 p+qi}{\log}\frac{p_1+q_1 i}{p_2+q_2 i} = {}_{0}\overset{{}_0 p+qi}{\log}(p_1+q_1 i) - {}_{0}\overset{{}_0 p+qi}{\log}(p_2+q_2 i)$$

Für den Fall, da $p+qi = e = 2{,}718\ldots$, fanden wir diese Gleichungen schon im §. 19 im Allgemeinen unrichtig. Richtig wird die erste nur in dem besondern Falle, da $\arg(p+qi)+\arg(p_1+q_1 i)$ ein Bogen ist, der entweder gleich π oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt, und die 2te jener zwei Gleichungen nur dann, wenn $\arg(p_1+q_1 i)-\arg(p_2+q_2 i)$ ein Bogen von derselben Beschaffenheit ist.