MITTHEILUNGEN
DER
NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT
IN ZÜRICH.

№ 114. 1855.

W. Denzler. — Ein Beitrag zur Analysis der complexen Zahlen.

(Forsetzung.)

2) Bezeichnen wieder p, q und ς pos. oder neg. reelle Zahlen, γ eine unendlich vieldeutige Zahl, welche o, sowie auch jede positive und jede negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, endlich n und m positive oder negative ganze Zahlen, deren absolute Werthe zu einander relative Primzahlen sind, so ist die Gleichung

$$(p + qi)^{\frac{n}{m}} = E^{\frac{n}{m} \log (p + qi)} = E^{\frac{n}{2m} l(p^2 + q^2)} \times \left[\cos\left[\frac{n}{m}[2\gamma\pi + \arg(p + qi)]\right] + i\sin\left[\frac{n}{m}(2\gamma\pi + \arg(p + qi))\right]\right]$$
$$= (p + qi)^{\frac{n\varsigma}{m\varsigma}}$$

eine vollkommene, d. h. eine solche, in welcher die Werthe von irgend einem der 4 Theile auch zugleich die Werthe von jedem der übrigen Theile sind; und jeder dieser 4 Theile hat nicht mehr und nicht weniger als m verschiedene Werthe.

In Beziehung auf den Beweis dieses Lehrsatzes nur folgende Andeutungen: Wer sich den Zahlort von p + qi, ferner die Bedeutung von $(p + qi)^{\frac{1}{m}}$, wo m vorerst positiv sein soll und die Erklärung von der Multiplikation klar denkt, der wird gewiss sogleich finden, dass die Zahlorte von m verschiedenen Werthen der Potenz

$(p + qi)^{\frac{1}{m}}$ in einem und demselben Kreisumfang liegen, der in der Zahlebene um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschrieben ist und dessen Radius $= \varepsilon. \, {}_0\sqrt[m]{\text{Mod}\,(p. + qi)} = \varepsilon. \, E^{\frac{1}{2m} \, l\,(p^2 + q^2)}$, wo ε die die absolute Einheit in der Zahlebene vorstellende Gerade ist; und dass die Argumente dieser Zahlorte folgende sind:

$$\frac{\arg (p + qi)}{m}, \; \frac{2\pi + \arg (p + qi)}{m}, \; \frac{2 \cdot 2\pi + \arg (p + qi)}{m} \ldots \frac{2\,(m - 1)\,\pi + \arg\,(p + qi)}{m}.$$

Ferner käme man bei der Annahme, die Zahl der verschiedenen Werthe von $(p + qi)^{\frac{1}{m}}$ sei grösser als m, sehr leicht auf den Schluss, dass es entweder verschiedene Bogen gäbe, die m mal genommen arg $(p + qi)$ ausmachten, oder dann ein Bogen existirte, der mit m multiplizirt eine solche ganze Anzahl von ganzen Peripherieen gäbe, die zwischen 2 nur um eine Einheit verschiedenen ganzen Zahlen läge. Von jetzt an könnte der Beweis mit Zuziehung eines bekannten Satzes aus der Theorie der Primzahlen leicht vervollständigt werden.

Für den Fall, da $m = 1$, hat der Beweis gar keine Schwierigkeiten.

§. 5. Erklärungen und Lehrsätze.

I. Bezeichnen α, β, p und q reelle Zahlen, so nehmen wir nach dem Vorgange Ohm's für den Fall, dass β nicht o, die Gleichung

$$(p + qi)^{\alpha + \beta i} = E^{(\alpha + \beta i) \log (p + qi)}$$

die dann, wenn $\beta = o$, entweder die bereits gegebene Erklärung von $(p + qi)^o$, oder dann den Lehrsatz in

§. 4 ausdrückt, als Darstellung der Erklärung von der Potenzirung irgend einer Zahl mit einer Complexen an.

II. Den speciellen Werth $E^{(\alpha+\beta i)_\tau \log(p+qi)}$ von $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$ bezeichne ich mit $_\tau(p+qi)^{\alpha+\beta i}$, welcher Ausdruck offenbar noch jeden der speciellen Werthe von $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$ vorstellen kann.

III. Wenn arg $(p+qi)=\varphi$, Mod. $(p+qi)=m$, und γ eine unendlich vieldeutige Zahl bezeichnet, die o und jede positive, sowie auch negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, so ist die Gleichung

$$1)\quad (p+qi)^{\alpha+\beta i} = E^{\alpha lm - \beta(2\gamma\pi+\varphi) + [\beta lm + \alpha(2\gamma\pi+\varphi)]i}$$
$$= E^{\alpha lm - \beta(2\gamma\pi+\varphi)}\left[\cos[\beta lm + \alpha(2\gamma\pi+\varphi)] + i\sin[\beta lm + \alpha(2\gamma\pi+\varphi)]\right]$$

eine vollkommene, und ebenso die Gleichung

$$2)\qquad (p+qi)^{-\alpha-\beta i} = \frac{1}{(p+qi)^{\alpha+\beta i}}$$

woraus aber nicht geschlossen werden darf, dass

$$(p+qi)^{\alpha+\beta i}\cdot(pq+i)^{-\alpha-\beta i} = 1$$

sei, da diese Gleichung offenbar eine unvollkommene wäre. Uebrigens erkennt man schon bei dem einfachen Produkt $4^{\frac{1}{2}}\,.\,4^{-\frac{1}{2}}$ oder $\frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}$, dass dieses nicht bloss den Werth 1, sondern auch den Werth -1 hat.

IV. Sämmtliche Werthe der Potenz $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$ werden auch erhalten, wenn man irgend einen speciellen Werth von $(p+qi)^{\alpha+\beta i}$, z. B. $_\tau(p+pi)^{\alpha+\beta i}$ mit allen Werthen von $1^{\alpha+\beta i} = E^{(\alpha+\beta i)\log 1} = E^{2\gamma\pi i(\alpha+\beta i)}$ multiplizirt, und es ist daher

$$1) \qquad (p + qi)^{\alpha + \beta i} = {}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i} \, . \, 1^{\alpha + \beta i}$$

eine vollkommene Gleichung, da offenbar

$$2\gamma\pi i + {}_{\tau}\log(p + qi) = \log(p + qi)$$

Diese letztere Gleichung findet aber auch nach Weglassung des τ statt, und es ist daher auch

$$2) \qquad (p + qi)^{\alpha + \beta i} = (p + qi)^{\alpha + \beta i} \, . \, 1^{\alpha + \beta i}$$

§. 6. Lehrsatz.

Entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatz die Potenz $[1 + (p + qi)]^{\alpha + \beta i}$, so drückt die dadurch erhaltene Reihe in allen den Fällen ihrer Convergenz den speziellen Werth

$${}_{0}(1 + p + qi)^{\alpha + \beta i} \text{ von } (1 + p + qi)^{\alpha + \beta i} \text{ aus.}$$

Ich habe den Beweis dieses Lehrsatzes wiederholt und so genau mit Rücksicht auf jede Einzelnheit geprüft, dass ich in der That nicht einsehen kann, was Ohm in seinem »Geist der mathem. Analysis. 1842 pag. 143« in folgendem Satze behauptet: »die binomische Reihe drückt natürlich nur einen der Werthe von $(1 + p + qi)^{\alpha + \beta i}$ aus, aber man müsste erst in jedem Falle noch untersuchen, welcher der Werthe es ist, und man darf daher nicht so geradezu behaupten, dass man den einfachsten Werth dieser Potenz habe. Wenn aber $q = \beta = o$, dann ist es keinem Zweifel unterworfen, dass der Werth dieser Binomialreihe der einfachste (nämlich der reelle) Werth von $(1 + p)^{\alpha}$ ist.« Es scheint hieraus die Ansicht von Ohm hervorzugehen, dass, wenn q und β nicht Nullen sind, die binomische Reihe nicht immer den Werth ${}_{0}(1 + p + qi)^{\alpha + \beta i}$, oder nach seiner Terminologie den einfachsten Werth gebe, was nach meinen Untersuchungen, deren Mittheilung jetzt zu viel Raum forderte, unrichtig wäre.

§. 7. Erklärungen und Lehrsätze.

I. Irgend eine Zahl $(p + qi)$, sei sie reell oder complex, mit einer 2ten Zahl $(\alpha + \beta i)$ derselben Art depotenziren, heisst alle die Zahlen bestimmen, die mit der 2ten potenzirt, Werthe geben, von welchen einer mit der ersten jener 2 Zahlen coincidirt. Das im Allgemeinen unendlich vieldeutige Ergebniss dieser Depotenzirung bezeichne ich mit $\sqrt[\alpha + \beta i]{p + qi}$

II. Lehrsatz. Bezeichnen p und q, α und β reelle Zahlen, γ die unendlich vieldeutige Zahl, die o und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat, ist endlich $\varphi = \arg(p + qi)$ und $m = \text{Mod.}\,(p + qi)$, so hat man folgende vollkommene Gleichung:

$$
1) \qquad \sqrt[\alpha + \beta i]{(p + qi)} = (p + qi)^{\frac{1}{\alpha + \beta i}}
$$
$$
= E^{\frac{\alpha l m + \beta(2\gamma\pi + \varphi)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{-\beta l m + \alpha(2\gamma\pi + \varphi)}{\alpha^2 + \beta^2} i}
$$

d. h. mit Rücksicht auf die 2 ersten Theile dieser Gleichung: Jede complexe Zahl, deren $(\alpha + \beta i)^{te}$ Potenz $p + qi$ zu einem Werthe hat, ist unter den Werthen von $(p + qi)^{\frac{1}{\alpha + \beta i}}$ enthalten, und jeder Werth von $(p + qi)^{\frac{1}{\alpha + \beta i}}$ ist eine Zahl, deren $(\alpha + \beta i)^{te}$ Potenz $(p + qi)$ zu einem Werthe hat.

Aus 1) darf man aber nicht schliessen, dass $\left[(p + qi)^{\frac{1}{\alpha + \beta i}}\right]^{\alpha + \beta i} = p + qi$, welche Gleichung möglichst unvollkommen wäre.

Ferner ist auch folgende Gleichung eine vollkommene:

$$
2) \qquad \sqrt[\alpha + \beta i]{(p + qi)\, 1^{\alpha + \beta i}} = (p + qi)^{\frac{1}{\alpha + \beta i}}
$$

und aus dieser kann man jetzt auf die vollkommene Gleichung schliessen:

$$3)\qquad (p+qi)\cdot 1^{\alpha+\beta i} = \left[(p+qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}\right]^{\alpha+\beta i}$$

III. Den speziellen Werth $_{\tau}(p+qi)^{\frac{1}{\alpha+\beta i}}$ von $\sqrt[\alpha+\beta i]{p+qi}$ stellen wir durch $_{\tau}\sqrt[\alpha+\beta i]{p+qi}$ dar, welcher Ausdruck offenbar noch jeden Werth jenes Radikals vorzustellen geeignet ist.

Nach dieser Bezeichnung ist $_{0}\sqrt{4} = {}_{2\gamma}\sqrt{4} = -\ {}_{2\gamma+1}\sqrt{4} = 2.$

§. 8. Erklärungen und Lehrsätze.

1) Irgend eine Zahl $p_1+q_1 i$ durch eine 2^{te} $(p+qi)$ logarithmiren heisst, jede Zahl bestimmen, mit welcher $p+qi$ potenzirt eine Potenz gibt, die $p_1+q_1 i$ zu einem Werthe hat. Das Ergebniss der Logarithmation wird durch $\overset{p+qi}{\log}(p_1+q_1 i)$ bezeichnet.

2) Die Gleichung

$$\overset{p+qi}{\log}(p_1+q_1 i = \frac{\log(p_1+q_1 i)}{\log(p+qi)}$$

ist eine vollkommene. Hieraus aber folgt keineswegs, dass auch $(p+qi)^{\frac{\log(p_1+q_1 i)}{\log(p+qi)}} = p_1+q_1 i$ eine vollkommene Gleichung ist, obschon $p+qi$ mit jedem Werthe von $\frac{\log(p_1+q_1 i)}{\log(p+qi)}$ potenzirt eine Potenz erzeugt, unter deren Werthen sich auch $(p_1+q_1 i)$ befindet. Hingegen ist die Gleichung

$$_{\tau}(p+qi)^{\tau\frac{\log(p_1+q_1 i)}{\log(p+qi)}} = p_1+q_1 i$$

eine vollkommene.

3) Den Quotienten $\frac{\log\,(p_1 + q_1 i)}{{}_\tau\log\,(p + qi)}$ bezeichne ich mit $\overset{{}_\tau p + qi}{\log}\,(p_1 + q_1 i)$, so dass dieser Ausdruck jede Zahl darstellt, mit welcher $p + qi$ potenzirt immer $p_1 + q_1 i$ gibt, insofern bei dieser Potenzirung stets nur derjenige specielle Werth heraus gehoben wird, der dem Index τ der Potenz angehört.

4) Die Gleichung

$$ {}_{\tau_1}\overset{{}_\tau p + qi}{\log}\,(p_1 + q_1 i) = \frac{{}_{\tau_1}\log\,(p_1 + q_1 i)}{{}_\tau\log\,(p + qi)} $$

stellt die Erklärung des ersten Theils derselben dar. Diese eindeutige Grösse ${}_{\tau_1}\overset{{}_\tau p + qi}{\log}\,(p_1 + q_1 i)$, welche übrigens so lange für τ und τ_1 nicht bestimmte Zahlen gesetzt sind, noch jeden Werth von $\overset{p + qi}{\log}\,(p_1 + q_1 i)$ auszudrücken vermag, ist offenbar das, womit $p + qi$ potenzirt, $p_1 + q_1 i$ gibt, wenn nämlich τ der Index des Ergebnisses jener Potenzirung ist, d. h. man hat:

$$ {}_\tau(p + qi)^{{}_{\tau_1}\overset{{}_\tau p + qi}{\log}\,(p_1 + q_1 i)} = p_1 + q_1 i $$

5) Wenden wir diese Erklärungen und Lehrsätze auf die Logarithmen mit der Basis e oder 2,71828 . . . an, so gelangen wir zu folgenden Gleichungen, in welchen $m_1 = \text{Mod.}\,(p_1 + q_1 i)$ und $\varphi_1 = \arg\,(p_1 + q_1 i)$.

$$ \overset{e}{\log}\,(p_1 + q_1 i) = \frac{\log\,(p_1 + q_1 i)}{\log\,e} $$

Dabei ist: $$ {}_\tau e^{\frac{\log\,(p_1 + q_1 i)}{{}_\tau\log\,e}} = p_1 + q_1 i $$

$$\overset{\tau e}{\log}\,(p_1 + q_1 i) = \frac{\log\,(p_1 + q_1 i)}{{}_{\tau}\log\,e}$$

$$ {}_{\tau_1}\overset{\tau e}{\log}\,(p_1 + q_1 i) = \frac{{}_{\tau_1}\log\,(p_1 + q_1 i)}{{}_{\tau}\log\,e} =$$

$$= \frac{lm_1 + 2\tau\pi\,(2\tau_1\pi + \varphi_1)}{1 + (2\tau\pi)^2} + i\,\frac{2\tau_1\pi + \varphi_1 - 2\tau\pi lm_1}{1 + (2\tau\pi)^2}$$

6) Wir sehen hieraus, dass jeder Logarithmus eine Function des Logarithmanden, der Basis und zweier von einander unabhängigen Unbestimmten ist, und der früher betrachtete nur von einer Unbestimmten abhängende log $(p + qi)$ nicht jeden Werth vorstellt, mit dem e potenzirt eine Potenz erzeugt, unter deren Werthen sich $p + qi$ befindet; wie diess übrigens auch leicht schon aus dem Umstande erhellet, dass E^x eben nicht $= e^x$, sondern, wenn x eindeutig, lediglich nur den einzigen Werth von e^x ausdrückt, den die Exponentialreihe $1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots$ gibt. So ist z. B. $-{}_0\sqrt{e}$ oder $-{}_0e^{\frac{1}{2}}$ ein Werth von $e^{\frac{1}{2}}$, mithin $\frac{1}{2}$ ein besonderer Werth des Logarithmus von $-{}_0\sqrt{e}$ in Beziehung auf die Basis e. Aber $\frac{1}{2}$ ist nicht ein Werth von $\log - {}_0\sqrt{e}$ oder von $\frac{1}{2} + (2\gamma + 1)\,\pi i$, wohl aber ein Werth von $\overset{e}{\log} - {}_0\sqrt{e}$. Es ist nämlich

$$ {}_{\tau_1}\overset{1+2\tau_1 e}{\log} - {}_0\sqrt{e} = \frac{1}{2}$$

§. 9. Lehrsätze.

Die Begründung der in den folgenden Paragraphen enthaltenen Resultate meiner Arbeiten liess mich 2 Sätze finden, die ich hier eben um des Folgenden willen mittheile:

1) Bezeichnen a, b, c, d .... eindeutige positive oder negative ganze Zahlen

ε eine ganze Zahl über 1, die zum grössten gemeinschaftlichen Faktor n der absoluten Werthe (a, b, c, d ....) eine relative Primzahl ist.

$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .... jede derselben eine unendlich vieldeutige Zahl, die ausser der Null jede positive und jede negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat:

so ist der Quotient

$$\frac{a\gamma + b\gamma_1 + c\gamma_2 + d\gamma_3 \ldots\ldots}{\varepsilon}$$

eine Summe aus 2 Summanden, von welchen der eine unendlich vieldeutig, aber immer eine positive oder negative ganze Zahl oder o ist, der 2te Summand aber nur ε deutig ist, und folgende ε Werthe enthält:

$$\frac{o}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{2}{\varepsilon}, \frac{3}{\varepsilon}, \ldots\ldots \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

2) Bezeichnet a eine positive ganze Zahl,

b eine n deutige reelle Zahl mit den Werthen $b_1, b_2, b_3 \ldots b_n$,

γ eine unendlich vieldeutige Zahl, die o und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat:

so ist die Exponentialreihe

$$E^{(\frac{\gamma}{a} + b)\, 2\pi i} \; *$$

*) $E^{(\frac{\gamma}{a} + b)\, 2\pi i}$ ist immer wohl zu unterscheiden von der Potenz $e^{(\frac{\gamma}{a} + b)\, 2\pi i}$, die in diesem Falle unendlich vieldeutig wäre.

(ag) deutig, wo g eine positive n nicht übersteigende ganze Zahl bezeichnet.

§. 10.

Wenn man bei der Rechnung mit unendlich vieldeutigen Grössen stets vollkommene Gleichungen anstrebt, wie sich diess zur Erzielung richtiger Resultate oft durchaus nicht vermeiden lässt; so wird man bald finden, welche grosse Vorsicht die Rechnung verlangt, und wie unendlich verschieden diese von der Rechnung mit eindeutigen Grössen ist. Bezeichnen z. B. γ und γ_1 vieldeutige, hingegen ε und ε_1 eindeutige Grössen, so darf man offenbar für $\gamma - \gamma$ nicht o, für $2\gamma - \gamma$ nicht γ, für $\frac{\gamma}{\gamma}$ nicht 1, für $\frac{2\gamma}{3\gamma}$ nicht $\frac{2}{3}$ u. s. f. setzen; man darf ferner aus der vollkommenen Gleichung

$$\gamma + \varepsilon = \gamma_1 \text{ nicht auf } \varepsilon = \gamma_1 - \gamma$$

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = \gamma_1 \quad » \quad » \quad \varepsilon = \gamma\gamma_1 \text{ u. s. f. schliessen.}$$

Dieser Umstand brachte mich auf den Gedanken, die Rechnung mit vieldeutigen Grössen auf eine solche mit eindeutigen zu reduciren. Die Realisirung dieses Gedankens führte mich dann zur Beantwortung der Frage: Wenn man irgend eine vollkommene Gleichung zwischen vieldeutigen Grössen hat, z. B.

$$\text{Arc. cos}\,(p + qi) + \text{Arc. cos}\,(p_1 + q_1 i)$$
$$= \text{Arc. cos}\left[(p + qi)(p_1 + q_1 i) - \sqrt{[1 - (p + qi)^2][1 - (p_1 + q_1 i)^2]}\right]$$

wie lässt sich dann jeder specielle Werth des einen Theils der Gleichung mit der nöthigen Bestimmtheit herausheben, und wie kann der herausgehobene Werth dem andern Theil der Gleichung entnommen werden? Solche Gleichungen, welche die vollständige Antwort auf diese Frage geben, will ich gesonderte Gleichungen heissen.

§. 11. Lehrsätze.

I. Bezeichnen p, q, α und β reelle Zahlen überhaupt, hingegen τ und τ_1 nur positive oder negative ganze Zahlen, o nicht ausgeschlossen, so hat man die gesonderte Gleichung:

$$1) \qquad {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\tau_1}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i} = {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i} \cdot {}_{\tau_1 - \tau}1^{\alpha+\beta i}$$

$$2) \qquad {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i} = {}_{\tau}(p+di)^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\tau}(p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

Die Gleichung 1) zeigt, dass jeder Werth von $(p+qi)^{\alpha+\beta i} . (p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i}$ zugleich ein Werth von $(p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i} . 1^{\alpha+\beta i}$; und umgekehrt, jeder Werth des letztern Ausdruckes zugleich ein Werth vom erstern ist, woraus natürlich folgt, dass

$$3) \qquad (p+qi)^{\alpha+\beta i} . (p+qi)^{\alpha_1+\beta_1 i} = (p+qi)^{\alpha+\beta i+\alpha_1+\beta_1 i} . 1^{\alpha+\beta i}$$

eine vollkommene Gleichung ist. Obschon nun 1) eine Gleichung zwischen eindeutigen Grössen ist, so lehrt sie doch dasselbe, was die Gleichung 3) zwischen unendlich vieldeutigen Grössen; aber ausserdem zeigt sie, wie die Werthe des ersten Theils von 3) mit Bestimmtheit gesondert werden können, und wie jeder Werth des ersten Theils von 3) dem 2ten Theil derselben entnommen werden kann. Ferner kann man auf 1) alle Umformungsgesetze für eindeutige Grössen anwenden, während diess bei 2) nicht möglich ist. Leichte Folgerungen von 1) sind die Gleichungen:

$$4) \qquad {}_{\tau}1^{\alpha+\beta i} \cdot {}_{\tau_1}1^{\alpha+\beta i} = {}_{\tau+\tau_1}1^{\alpha+\beta i}$$

5) $\quad {}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i} = {}_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha + \beta i} \cdot {}_{\tau - \tau_1}1^{\alpha + \beta i}$

6) $\dfrac{{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i}}{{}_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}} = {}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} \cdot {}_{\tau - \tau_1}1^{\alpha_1 + \beta_1 i}$

$$= {}_{\tau_1}(p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)}{}_{\tau - \tau_1}1^{\alpha + \beta i}$$

7) $\quad {}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} = \dfrac{{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i}}{{}_{\tau}(p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}}$

und hieraus wieder die vollkommene Gleichung:

8) $\dfrac{(p + qi)^{\alpha + \beta i}}{(p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}} = (p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} \cdot 1^{\alpha_1 + \beta_1 i}$

$$= (p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} \cdot 1^{\alpha + \beta i}$$

Anstatt der Gleichungen 3) und 8) gibt Ohm in seinem System der Math. VIII. p. 8 folgende:

$$(p + qi)^{\alpha + \beta i} \cdot (p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}$$
$$= (p + qi)^{\alpha + \beta i + \alpha_1 + \beta_1} e^{2\pi i[\mu(\alpha + \beta i) + \gamma(\alpha_1 + \beta_1 i)]}$$
$$(p + qi)^{\alpha + \beta i} : (p + qi)^{\alpha_1 + \beta_1 i}$$
$$= (p + qi)^{\alpha + \beta i - (\alpha_1 + \beta_1 i)} e^{2\pi i[\mu(\alpha + \beta i) + \gamma(\alpha_1 + \beta_1 i)]}$$

deren Richtigkeit aber nicht aufgehoben wird, wenn man von den 2 unendlich vieldeutigen Zahlen μ und γ, deren Werthe o und jede pos. oder neg. ganze Zahl sind, irgend eine derselben = o setzt, wodurch die Formeln in die von mir Berechneten übergehen.

II. Bezeichnet a eine complexe Zahl,
p und q pos. oder neg. ganze Zahlen, deren absol. Werthe p_1 und q_1 relative Primzahlen sind,
r und s pos. oder neg. ganze Zah-

len, deren absol. Werthe r_1 und s_1 relative Primzahlen sind,

τ den grössten gemeinschaftlichen Faktor für q_1 und s_1,

$\tau\tau_1$ den grössten gemeinschaftlichen Faktor für die absol. Werthe von $ps \pm qr$ und qs,

so hat man folgende Relationen:

1) Die Zahl der verschiedenen Werthe

$$\text{von} \quad a^{\frac{p}{q}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{:} a^{\frac{r}{s}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{\tau}$$

2) Die Zahl der verschiedenen Werthe

$$\text{von} \quad a^{\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}} \text{ ist } = \frac{q_1 s_1}{\tau\tau_1}$$

3) Die Zahl der den Ausdrücken $[a^{\frac{p}{q}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{:} a^{\frac{r}{s}}]$ und $a^{\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}}$ gemeinsamen Werthe ist $= \frac{q_1 s_1}{\tau\tau_1}$

4) Es ist nur dann $a^{\frac{p}{q}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{:} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}}$,

$$\text{wenn } \tau_1 = 1,$$

wenn demnach der grösste gemeinschaftliche Faktor von q_1 und s_1 gleich demjenigen der absoluten Werthe von $(ps \pm qr)$ und qs ist.

Es ist wohl kaum nothwendig zu bemerken, dass hier entweder durchgehends nur die obern Operationszeichen, oder dann nur die untern zu nehmen sind.

Anmerkung. Ohm behauptet in seinem »Geist der mathem. Analysis 1842 p. 133«, die Gleichung in 4) bedürfe dann schon einer Correction, wenn τ nicht 1 ist. Diess ist nach den obigen Behauptungen nicht richtig, wie übrigens schon die Gleichung

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a$$

zeigt, die ohne Correction eine vollkommene ist.

§. 12. Lehrsätze.

I. Wenn μ die Bedeutung der o, oder einer positiven oder negativen ganzen Zahl hat und zugleich so bestimmt wird, dass $[2\mu\pi + \arg(p + qi) + \arg(p_1 + q_1 i)]$ zu einem Bogen wird, der entweder $= \pi$ ist oder dann zwischen π und $- \pi$ liegt, wenn also

$$2\mu\pi + \arg.(p + qi) + \arg.(p_1 + q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } - \pi) \quad (1$$

so ist

$$_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i} \cdot {}_{\tau_1}(p_1 + q_1 i)^{\alpha + \beta i} \quad (2$$
$$= {}_{\tau + \tau_1 - \mu}[(p + qi)\ (p_1 + q_1 i)]^{\alpha + \beta i}$$

Spätere Untersuchungen zwangen mich, Gleichungen von der Beschaffenheit der 1) aufzulösen. Man findet bloss aus der Vorstellung von $\arg(p + qi)$ und $\arg(p_1 + q_1 i)$ in der Zahlebene, dass in jedem Falle:

$$\mu = -\frac{1}{16}[\underset{\smile}{q} + \underset{\smile}{q_1}]\ [1 - \underset{\smile}{p}\,\underset{\smile}{p_1}] \times \quad (3$$
$$\Big[[1 - \underbrace{-(p_1^2 q^2 - p^2 q_1^2)^2}]\ [1 - \underset{\smile}{p}\,\underbrace{p^2 q_1^2 - p_1^2 q^2}] +$$
$$[1 + \underbrace{-\ (p_1^2 q^2 - p^2 q_1^2)^2}]\ [1 - \underset{\smile}{q}]\Big] -$$
$$\frac{1}{8}[\underset{\smile}{q} + \underset{\smile}{q_1}]\ [1 - \underset{\smile}{p}]\ [1 - \underset{\smile}{p_1}]$$

II. Wenn γ eine pos. oder neg. Zahl oder o, und

$$2\gamma\pi + \arg.(p + qi) - \arg.(p_1 + q_1 i) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } - \pi) \quad (1$$

so ist

$$_{\tau}(p + qi)^{\alpha + \beta i} : {}_{\tau_1}(p_1 + q_1 i)^{\alpha + \beta i} = {}_{\tau - \tau_1 - \gamma}\left(\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i}\right)^{\alpha + \beta i} \quad (2$$

$$\gamma = -\frac{1}{16}\,[\underbrace{q} - \underbrace{q_1}]\;[1 - \underbrace{p}\,\underbrace{p_1}] \times \qquad (3$$

$$\Big[\Big[1 - \underbrace{-\,(p_1^2q^2 - p^2q_1^2)^2}\Big]\;\Big[1 - \underbrace{p}\,\underbrace{p^2q_1^2 - p_1^2q^2}\Big] +$$

$$\Big[1 + \underbrace{-\,(p_1^2q^2 - p^2q_1^2)^2}\Big]\,[1 - \underbrace{q}]\Big] -$$

$$-\frac{1}{8}\,[1 - \underbrace{p_1}]\,\Big[[\underbrace{q} - \underbrace{q_1}]\,[1 - \underbrace{p}] - [1 + \underbrace{-\,q^2 - q_1^2}]\,[1 + \underbrace{p}]\Big]$$

III. Aus den Gleichungen I. 2) und II. 2) ergeben sich unmittelbar die vollkommenen Gleichungen:

$$(p + qi)^{\alpha+\beta i} \cdot (p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i} \qquad (1$$

$$= [(p + qi)\;(p_1 + q_1 i)]^{\alpha+\beta i}$$

$$\frac{(p + qi)^{\alpha+\beta i}}{(p_1 + q_1 i)^{\alpha+\beta i}} = \left(\frac{p + qi}{p_1 + q_1 i}\right)^{\alpha+\beta i} \qquad (2$$

Anmerkung. Ohm hat in seinem »Geist der math. Analysis 1842 pag 122« für die Rechnung mit den einfachsten Werthen der Potenzen (d. h. nach meiner eingeführten Bezeichnung solchen Potenzen, deren Index = o ist) die Gleichungen aufgestellt:

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad \text{und} \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Diese beiden Gleichungen sind nach den Lehrsätzen I. und II. im Allgemeinen unrichtig, was übrigens schon aus folgendem Beispiel erhellet: Es ist ${}_0(-1)^{\frac{1}{2}} = +i$ und ${}_0(+1)^{\frac{1}{2}} = +1$). Es müsste also nach der ersten jener 2 Gleichungen ${}_0(-1)^{\frac{1}{2}} \cdot {}_0(-1)^{\frac{1}{2}}$ oder $i^2 = {}_0[(-1)\,(-1)]^{\frac{1}{2}}$ $= +1$ und nach der zweiten $\dfrac{{}_0 1^{\frac{1}{2}}}{{}_0(-1)^{\frac{1}{2}}}$ oder $\dfrac{1}{i} = \left(\dfrac{1}{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ $= i$ sein. Die Lehrsätze I. und II. geben für diesen

Fall: ${}_0(-1)^{\frac{1}{2}} \cdot {}_0(-1)^{\frac{1}{2}} = {}_{-1}1^{\frac{1}{2}} = -1$ und $\dfrac{{}_0 1^{\frac{1}{2}}}{{}_0(-1)^{\frac{1}{2}}}$ $= {}_{-1}(-1)^{\frac{1}{2}} = -i$, wie es sein soll.

Die beiden Ohm'schen Gleichungen sind in dem Falle, da x eine positive oder negative ganze Zahl oder o ist, stets richtig, in jedem andern Falle aber durchaus nur dann zulässig, wenn für die erste [arg. a + arg. b] entweder $= \pi$ oder dann zwischen π und $-\pi$ liegt, und in Beziehung auf die zweite Gleichung arg a — arg. b ebenfalls ein solcher Bogen ist, wie aus I. und II. sogleich klar wird.

§. 13. Lehrsätze.

I. Wenn $m = \text{Mod.}(p + qi)$ und $\varphi = \text{arg.}(p + qi)$, wenn ferner

γ reell, aber nicht gebrochen und zugleich

$$2\gamma\pi + \beta \text{lm} + \alpha(2\tau\pi + \varphi) = (\pi \text{ od. zw. } \pi \text{ u. } -\pi) \qquad (1$$

so hat man die gesonderte Gleichung:

$$_{\tau_1}\left[{}_\tau(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} \qquad (2$$
$$= {}_\tau(p + qi)^{(\alpha+\beta i)(\alpha_1+\beta_1 i)} \cdot {}_{\gamma+\tau_1}1^{\alpha_1+\beta_1 i}$$

woraus sich sogleich die vollkommene Gleichung:

$$\left[(p + qi)^{\alpha+\beta i}\right]^{\alpha_1+\beta_1 i} = (p + qi)^{(\alpha+\beta i)(\alpha_1+\beta_1 i)} \cdot 1^{\alpha_1+\beta_1 i} \qquad (3$$

ergibt.

II. Bezeichnet a irgend eine complexe Zahl,

p und q pos. oder neg. ganze Zahlen, deren abs. Werthe p_1 und q_1 relative Primzahlen sind,

r und s pos. oder neg. ganze Zahlen, deren abs. Werthe p_1 und q_1 relative Primzahlen sind,