MITTHEILUNGEN
DER
NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT
IN ZÜRICH.

№ 100. 1854.

Hr. Prof. Raabe. — Ueber einige Anwendungen der verallgemeinerten Stirlingischen Reihe.

(Mitgetheilt den 9. Januar 1854.)

(Schluss.)

Zweitens zeigt die für $\varphi_{2m}(x)$ aufgestellte Bestimmung, dass jeder gerade Differentialquotient von $\varphi(x)$, oder log. $\Gamma(x)$, für alle angebbaren Werthe von x Resultate mit gleichen Vorzeichen darbietet.

Dieses nun vorausgeschickt, bietet die allgemeine Gleichung (I) folgende speciellere dar:

$$\int_a^{a+1} \log. \Gamma(x)\, dx =$$

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}\log. \Gamma(a) + \log. \Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right) + \log. \Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots \right.$$

$$\left. + \log. \Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2}\log. \Gamma(a+1)\right\}$$

$$- a\left\{\frac{1}{(an)^2} Y_2 - \frac{1.2}{(an)^4} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{(an)^6} Y_6 + \ldots \right.$$

$$\left. (-1)^{m-1}\frac{1.2.3\ldots(2m-2)}{(an)^{2m}} Y_{2m}\right\},$$

wo wir v durch $\frac{1}{n}$ ersetzt haben, und wo, nach einem in Nr. 233 meiner Integralrechnung dargethanem Satze, der Fehler, den man begeht, wenn man den Ausdruck rechterhand statt dem linkerhand vom Gleichheitszeichen setzt, kleiner als das letzte Glied, nämlich kleiner als:

$$(-1)^m \frac{1.2.3 \ldots (2m-2)}{a^{2m-1} \cdot n^{2m}} Y_{2m} \quad \text{ist.}$$

Stellt man das zuletzt aufgestellte Integrationsergebniss folgendermassen:

$$\int_a^{a+1} \log. \Gamma(x)\, dx = \frac{1}{2n} \log. \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}$$
$$+ \frac{1}{n} \log. \Gamma(a)\, \Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right) \ldots \Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$- a \left\{ \frac{1}{(an)^2} Y_2 - \frac{1.2}{(an)^4} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{(an)^6} Y_6 - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \frac{(-1)^{m-1}\, 1.2.3 \ldots (2m-2)}{(an)^{2m}} Y_{2m} \right\},$$

das mit Beachtung der bekannten Eigenschaften der Function Gamma folgende Integralgleichung darbietet:

$$\int_a^{a+1} \log. \Gamma(x)\, dx = \frac{1}{2n} \log. a + \frac{1}{n} \log. \frac{\Gamma(na)}{n^{na-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-n}{2}}}$$
$$- a \left\{ \frac{1}{(na)^2} Y_2 - \frac{1.2}{(na)^4} Y_4 + \frac{1.2.3.4}{(na)^6} Y_6 - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \frac{(-1)^{m-1}\, 1.2.3 \ldots (2m-2)}{(na)^{2m}} Y_{2m} \right\}.$$

Ferner habe ich in Nr. 69 dieser Mittheilungen gefunden:

$$\int_0^1 \log. \Gamma(x+a)\, dx = a \log. a - a + \frac{1}{2} \log. 2\pi;$$

und da das von uns gegenwärtig in Rede stehende Integral mit diesem eben aufgestellten dem Werthe nach einerlei ist, so hat man, beachtend noch die Gleichheit:

$$\Gamma\,(na) = \frac{\Gamma\,(1 + na)}{na}$$

folgendes Ergebniss:

$$\log.\ \frac{\Gamma\,(1 + na)}{(na)^{na + \frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} =$$

$$= -\ na + \frac{1}{na}\,Y_2 - \frac{1.\,2}{(na)^3}\,Y_4 + \frac{1.\,2.\,3.\,4}{(na)^5}\,Y_6 - \ldots$$

$$\ldots \frac{(-1)^{m-1}\,1.\,2.\,3\,\ldots\,(2m-2)}{(na)^{2m-1}}\,Y_{2m}\,,$$

wo bei jeder beliebigen Annahme über m, d. h. bei welchem Gliede auch immer die auf der zweiten und dritten Zeile vorkommende Reihe (welche die eigentliche Stirlingische ist) abgebrochen wird, der Fehler beständig numerisch kleiner als das zuletzt noch in Anspruch genommene Glied ist.

Hier stellt a eine beliebige angebbare Zahl dar, daher kann auch durch na jedwede angebbare Zahl vorgestellt sein; wenn sonach na durch α ersetzt wird, so hat man die Gleichheit

$$\log.\ \frac{\Gamma\,(1+\alpha)}{\alpha^{\alpha}\sqrt{2\alpha\pi}} = -\ \alpha + \frac{1}{\alpha}\,Y_2 - \frac{1.\,2}{\alpha^3}\,Y_4$$

$$+ \frac{1.\,2.\,3.\,4}{\alpha^5}\,Y_6 - \frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}{\alpha^7}\,Y_8 + \ldots,$$

oder wenn man nach Gleichung (3) die Bernoullischen Zahlen einführt:

$$\log.\ \frac{\Gamma\,(1+\alpha)}{\alpha^{\alpha}\sqrt{2\alpha\pi}} = -\ \alpha + \frac{B_1}{1.\,2}\cdot\frac{1}{\alpha} - \frac{B_2}{3.\,4}\cdot\frac{1}{\alpha^3}$$

$$+ \frac{B_3}{5.\,6}\,\frac{1}{\alpha^5} - \frac{B_4}{7.\,8}\,\frac{1}{\alpha^7} + \ldots \quad (16)$$

wo der Fehler den man begeht, wenn der Ausdruck rechterhand statt des Ausdruckes linkerhand gesetzt wird, beständig kleiner als das Glied ist, mit dem die Rechnung abgebrochen wird.

Die Glieder in dieser Stirlingischen Reihe, nämlich in der rechterhand von (16), nehmen so lange ab als der Index r eines desselben kleiner oder höchstens gleich $\alpha\pi$ ist; daher wird man den kleinsten Fehler begehen, wenn mit dem Gliede

$$\frac{B_r}{(2r-1)\,2r}\;\frac{1}{\alpha^{2r-1}}$$

die Rechnung abbricht, wenn $r \leqq \alpha\pi$ gesetzt wird.

So z. B. wird man bei $\alpha = 10$ mit dem 31^{ten} Gliede die Rechnung abzubrechen haben; eben so bei $\alpha = 100$ mit dem 314^{ten} Gliede, oder bei $\alpha = 1000$ mit dem 3141^{ten} Gliede u. s. w. die Rechnung abzubrechen haben, um das möglich genaueste Resultat zu erzielen.

5. Aus dem Ergebnisse in (16) lassen sich Grenzbestimmungen für die Function $\Gamma(1+\alpha)$ angeben, denen wir die vorliegende Nr. ausschliesslich bestimmen.

Zuerst nimmt ab, wenn α eine ohne Ende wachsende Zahl ist, dass folgende Grenzgleichung besteht:

$$\text{Lim.}\,\Gamma(1+k) = k^k \sqrt{2k\pi}\cdot e^{-k} \tag{17}$$

wo das Grenzzeichen Lim. auf das unendliche Wachsen von k Bezug hat.

Stellt aber α eine endliche, positive und reelle Zahl vor, und setzt:

$$\log.\,\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^{\alpha}\sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha}\,,$$

so ist der bei dieser Annahme mögliche Fehler numerisch kleiner als $\frac{B_1}{2\alpha}$. Stellt diesem nach β einen Kreisbogen vom Halbmesser eins vor, der innerhalb o und π gedacht wird, so besteht die fehlerfreie Gleichung:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha} + \frac{B_1}{2\alpha}\cos\beta$$

oder auch:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}\cdot e^{-\alpha}} = \frac{B_1}{\alpha}\left(\cos\frac{1}{2}\beta\right)^2;$$

und da der Ausdruck rechterhand positiv ist, hat man die Ungleichheit:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} > -\alpha. \tag{18}$$

Verbleibt immer α eine positive, endliche und reelle Zahl und setzt:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha} - \frac{B_2}{3\cdot 4\cdot \alpha^3},$$

so ist der gegenwärtig zu befürchtende Fehler numerisch kleiner als $\frac{B_2}{3\cdot 4\cdot \alpha^3}$; wenn daher durch β ein ähnlicher Bogen wie unmittelbar vorher dargestellt wird, hat man:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha} - \frac{B_2}{6\alpha^3}\left(\cos\frac{1}{2}\beta\right)^2,$$

oder auch

$$\log \cdot \frac{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}}{\Gamma(1+\alpha)} = \alpha - \frac{B_1}{2\alpha} + \frac{B_2}{6\alpha^3}\left(\cos\frac{1}{2}\beta\right)^2;$$

wird überdiess noch $\alpha > 1$ gedacht, so hat man die Grenzgleichung:

$$\log \cdot \frac{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}}{\Gamma(1+\alpha)} > \alpha - \frac{B_1}{2\alpha},$$

oder auch

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha \sqrt{2\alpha\pi}} < -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha}. \tag{19}$$

Bei denselben Annahmen über α und β hat man ferner:

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha\sqrt{2\alpha\pi}} = -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha} - \frac{B_2}{3\cdot4\cdot\alpha^3} + \frac{B_3}{15\alpha^5}\left(\cos\frac{1}{2}\beta\right)^2,$$

woraus durch ähnliche Betrachtungen wie in vorausgeschickten zwei Fällen die Ungleichheit

$$\log \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha^\alpha\sqrt{2\alpha\pi}} > -\alpha + \frac{B_1}{2\alpha} - \frac{B_2}{3\cdot4\alpha^3} \tag{20}$$

erhalten wird.

Wird nun in dieser Weise fortgefahren: so gelangen wir zuletzt auf folgenden Satz:

Bricht man in der Reihe zur Rechten der Gleichung (16) mit irgend einem Gliede, das den Faktor B_r trägt, die Rechnung ab (wobei nothwendig $r \leqq \alpha\pi$ sein muss): so erhält man ein zu grosses oder zu kleines Resultat, verglichen mit dem Ausdrucke zur Linken, je nachdem r eine ungerade oder gerade Zahl vorstellt.

Mit Zugrundelegung dieses Theorems gelangt man auf folgende Reihe von Ungleichheiten:

$$\Gamma(1+\alpha) > \alpha^\alpha\sqrt{2\alpha\pi}\cdot e^{-\alpha},$$

$$\Gamma(1+\alpha) < \alpha^\alpha\sqrt{2\alpha\pi}\cdot e^{-\alpha}\cdot e^{\frac{B_1}{1.2\alpha}},$$

$$\Gamma(1+\alpha) > \alpha^\alpha\sqrt{2\alpha\pi}\cdot e^{-\alpha}\cdot e^{\frac{B_1}{1.2\alpha}}\cdot e^{-\frac{B_2}{3.4\alpha^3}},$$

$$\Gamma(1+\alpha) < \alpha^\alpha\sqrt{2\alpha\pi}\cdot e^{-\alpha}\cdot e^{\frac{B_1}{1.2\alpha}}\cdot e^{-\frac{B_2}{3.4\alpha^3}}\cdot e^{\frac{B_3}{5.6\alpha^5}},$$

u. s. w.,

wo man bis zum Faktor $e^{\pm\frac{B_r}{(2r-1)2r\alpha^{2r-1}}}$ fortgehen kann, wenn $r \leqq \alpha\pi$ ist. Das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem r ungerad oder gerad ist; und alle diese Ungleichheiten finden Statt, wenn die positive, beliebige, reelle Zahl α grösser denn die Einheit ist.