dass selbst nach Beseitigung der irrigen Grundlage, auf welcher die Idee des „Gruppenisomorphismus“ erwachsen ist, diese Idee sich fort zu erhalten suchen wird, und müsste es auch durch Hülfe immer neuer Hypothesen geschehen. Scheerer's »polymerer« Isomorphismus, dem längst seine Grundlage von Aspasiolith- und Serpentinkrystallen genommen ist, fährt ja ebenfalls noch immer fort, Verwirrung in solche Kapitel der Mineralogie zu bringen, welche eben im Begriffe waren, sich aufzuklären. Hermann's »heteromerer« Isomorphismus ist in neuerer Zeit durch Rammelsberg förmlich aufgenommen worden, wie ihn vor mehr als zwanzig Jahren bereits Beudant aufgestellt hatte. »Polymerer« Isomorphismus, »heteromerer« Isomorphismus und »Gruppenisomorphismus« beruhen aber alle drei in der Nichtberücksichtigung des Metamorphismus und in der Annahme unerwiesener und irriger Axiome.

Hr. Prof. Raabe. — Ueber einige Anwendungen der verallgemeinerten Stirlingischen Reihe.

(Mitgetheilt den 9. Januar 1854.)

1. Zur näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals hat man, nach Poisson, die in Nro. 234 des ersten Bandes meiner Integralrechnung dargethane Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx =$$

$$v\left\{\tfrac{1}{2}\varphi(a) + \varphi(a+v) + \varphi(a+2v)\dots\right.$$

$$\left.\dots + \varphi(a+(n-1)v) + \tfrac{1}{2}\varphi(b)\right\}$$

$$- Y_2\left\{\varphi_1(b) - \varphi_1(a)\right\}v^2 + Y_4\left\{\varphi_3(b) - \varphi_3(a)\right\}v^4 - \dots$$

$$\ldots\ldots.(-1)^m Y_{2m} \left\{ \varphi_{2m-1}(b) - \varphi_{2m-1}(a) \right\} v^{2m}$$

$$+2(-1)^{m+1}\left(\frac{v}{2\pi}\right)^{2m}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m}}\int_a^b \varphi_{2m}(x)\,\mathrm{Cos}\,2r\pi\left(\frac{x-a}{v}\right)dx, \quad \text{(I)}$$

wo folgende Abkürzungen bestehen:

$$Y_{2r} = \frac{2}{(2\pi)^{2r}}\left\{1+\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{4^{2r}}+\text{in inf.}\right\}, \qquad (1)$$

$$b-a=n\,v, \qquad (2)$$

und wo endlich $\varphi_k(x)$ den k^{ten} Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ nach x vorstellt.

Die Reihe von Gliedern nun, die die Coefficienten Y_2, Y_4, Y_6, Y_8, ... mitführen, nenne ich die verallgemeinerte Stirlingische Reihe, die zur Angabe der innerhalb den Klammern auf der ersten und zweiten Zeile rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Summe benutzt werden kann, wovon in der gegenwärtigen Mittheilung einige Anwendungen vorgeführt werden sollen.

2. Als erste Anwendung unterziehe ich den Fall, wenn $\varphi(x)$ irgend eine ganze, positive Potenz von x ist. Wird diese Potenz einmal als gerade der Form 2m und ein andermal als ungerade der Form 2m + 1 angenommen, wo m ganz und positiv, bei der letztern Annahme auch der Null gleich sein kann; dann bietet die allgemeine Gleichung (I) vollkommen genau die folgenden zwei Ergebnisse dar:

$$\int_0^a x^{2m}dx = v^{2m+1}\left\{1^{2m}+2^{2m}+3^{2m}+\cdots(n-1)^{2m}+\tfrac{1}{2}n^{2m}\right\}$$
$$-2m\,Y_2\,a^{2m-1}v^2+2m(2m-1)(2m-2)\,Y_4\,a^{2m-3}v^4$$
$$-2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)\,Y_6\,a^{2m-5}v^6$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^m 2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)\ldots3.2\,Y_{2m}\,av^{2m},$$

$$\int_0^a x^{2m+1}dx = v^{2m+2}\left\{1^{2m+1}+2^{2m+1}+3^{2m+1}+4^{2m+1}\right.$$
$$\left.+\ldots(n-1)^{2m+1}+\tfrac{1}{2}n^{2m+1}\right\}$$

$$- (2m+1)\, Y_2\, a^{2m}\, v^2 + (2m+1)\, 2m\, (2m-1)\, Y_4\, a^{2m-2}\, v^4$$
$$- (2m+1)\, 2m\, (2m-1)\, (2m-2)\, (2m-3)\, Y_6\, a^{2m-4}\, v^6$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^m (2m+1)\, 2m\, (2m-1) \ldots 3\, Y_{2m} a^2 v^{2m},$$

wo $nv = a$ gesetzt ist.

Führt man die Bernoullischen Zahlen durch die Gleichung:

$$Y_{2r} = \frac{B_r}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots.\ 2r} \tag{3}$$

ein, wo B_r die r^{te} Bernoullische Zahl ist; vollzieht man die bestimmten Integrale linker Hand der Gleichheitszeichen; ersetzt man endlich überall a durch nv: so gewinnt man folgende zwei bekannten Summationen:

$$1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + 4^{2m} + \ldots (n-1)^{2m} =$$
$$= \frac{n^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2} n^{2m} + \frac{1}{2} \binom{2m}{1} B_1\, n^{2m-1} - \frac{1}{4} \binom{2m}{3} B_2\, n^{2m-3}$$
$$+ \frac{1}{6} \binom{2m}{5} B_3\, n^{2m-5} - \ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m} \cdot \binom{2m}{2m-1} B_m\, n, \tag{4}$$

$$1^{2m+1} + 2^{2m+1} + 3^{2m+1} + 4^{2m+1} + \ldots (n-1)^{2m+1} =$$
$$= \frac{n^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2} n^{2m+1} + \frac{1}{2} \binom{2m+1}{1} B_1\, n^{2m}$$
$$- \frac{1}{4} \binom{2m+1}{3} B_2\, n^{2m-2} + \frac{1}{6} \binom{2m+1}{5} B_3\, n^{2m-4} - \ldots$$
$$\ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m} \binom{2m+1}{2m-1} B_m\, n^2, \tag{5}$$

wo allgemein unter $\binom{\lambda}{k}$ der Coefficient von x^k in der Entwickelung von $(1+x)^\lambda$ zu verstehen ist; so dass man bei Einführung der Jakob Bernoullischen Functionen für gerade und ungerade Exponenten*) die Bestimmungsgleichungen hat:

*) Die Jacob Bernoullische Function, 1848.

$$B''(n) = 1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + \ldots . (n-1)^{2m}, \qquad (4^1)$$

$$B'(n) = 1^{2m+1} + 2^{2m+1} + 3^{2m+1} + \ldots . (n-1)^{2m+1}, \quad (5^1)$$

wo nach der citirten Schrift die Bestimmungsgleichungen bestehen:

$$B''(x) = \frac{x^{2m+1}}{2m+1} - \tfrac{1}{2} x^{2m} + \tfrac{1}{2} \binom{2m}{1} B_1 x^{2m-1}$$

$$- \tfrac{1}{4} \binom{2m}{3} B_2 x^{2m-3} + \ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m} \binom{2m}{2m-1} B_m x, \quad (6)$$

$$B'(x) = \frac{x^{2m+2}}{2m+2} - \tfrac{1}{2} x^{2m+1} + \tfrac{1}{2} \binom{2m+1}{1} B_1 x^{2m}$$

$$- \tfrac{1}{4} \binom{2m+1}{3} B_2 x^{2m-2} + \ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m} \binom{2m+1}{2m-1} B_m x^2. \quad (7)$$

Da wir in der folgenden Nr. diese Functionen $B''(x)$ und $B'(x)$ zur Discussion bringen werden, so theilen wir die wesentlichen Eigenschaften dieser Functionen mit, wie man solche in der citirten Schrift nachgewiesen einsehen kann.

Zuerst hat man:

$$B(1+x) - B(x) = x^m, \quad B(x) + (-1)^m B(-x) = -x^m, \quad (8)$$

wo, wenn m gerade und durch 2m ersetzt wird, die Function $B(x)$ und ihre analogen durch $B''(x)$ aus Gleichung (6) zu ersetzen ist; wenn aber m ungerade und durch $2m+1$ ersetzt wird, hat man für $B(x)$ und ihre analogen die Function $B'(x)$ der Gleichung (7) zu setzen.

Aus den Eigenschaftsgleichungen (8) zieht man sehr bald folgende:

$$B(1-x) + (-1)^m B(x) = 0. \quad (9)$$

Differenzirt man ferner die Gleichheit (7) nach x, so gelangt man bald auf:

$$B'_1(x) = (2m+1) B''(x), \quad (10)$$

wo $B'_1(x)$ den Differenzialquotienten von $B'(x)$ nach x bedeutet.

Wird ferner in (7) die ganze Zahl m um eine Einheit verringert, und stellt die betreffende Function alsdann durch $'B(x)$ vor, so gelangt man alsbald auf folgendes zu (10) analoge und coordinirte Resultat:

$$B_1''(x) = 2m\ 'B(x) + (-1)^{m-1} B_m\,, \tag{11}$$

wo $B_1''(x)$ den Differenzialquotienten von $B''(x)$ nach x vorstellt.

3. Wird als zweite Anwendung der allgemeinen Gleichung (I):

$$\varphi(x) = B''(x)\,,\ \text{wie}\ \varphi(x) = B'(x)$$

angenommen; so gelangt man auf folgende zwei völlig genaue Resultate:

$$\int_a^{a+1} B''(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} B''(a) + B''\left(a+\frac{1}{n}\right) + \ldots B''\left(a+\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2} B''(a+1)\right\}$$

$$- \binom{2m}{1}\frac{a^{2m-1}}{2n^2} B_1 + \binom{2m}{3}\frac{a^{2m-3}}{4n^4} B_2 - \binom{2m}{5}\frac{a^{2m-5}}{6n^6} B_3$$

$$+ \ldots\ldots (-1)^m \binom{2m}{2m-1}\frac{a}{2m\cdot n^{2m}} B_m\,,$$

$$\int_a^{a+1} B'(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} B'(a) + B'\left(a+\frac{1}{n}\right) + \ldots B'\left(a+\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2} B'(a+1)\right\}$$

$$- \binom{2m+1}{1}\frac{a^{2m}B_1}{2n^2} + \binom{2m+1}{3}\frac{a^{2m-2}B_2}{4n^4} - \binom{2m+1}{5}\frac{a^{2m-4}B_3}{6n^6}$$

$$+ \ldots (-1)^m\binom{2m+1}{2m-1}\frac{a^2B_m}{2m\cdot n^{2m}} + (-1)^{m+1}\binom{2m+1}{2m+1}\frac{B_{m+1}}{(2m+2)n^{2m+2}},$$

wo wir die Bernoullischen Zahlen B_1, B_2, B_3, ... B_m, B_{m+1} mit Hülfe der Gleichung (3) vorangehender Nr. eingeführt, wie ausserdem noch die erstere Gleichung in (8) durch successives Differenziren nach x benutzt haben.

Beachtet man nunmehr die Begriffsgleichungen (6) und (7) der Functionen $B''(x)$ und $B'(x)$, so sind diese Ergebnisse auch mit folgenden einerlei:

$$\int_a^{a+1} B''(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{2n}\left\{B''(1+a) - B''(a)\right\}$$

$$+\frac{1}{n}\left\{B''(a) + B''\left(a+\frac{1}{n}\right) + B''\left(a+\frac{2}{n}\right) + \dots B''\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{n^{2m+1}}\left\{-B''(na) + \frac{(na)^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2}(na)^{2m}\right\},$$

$$\int_a^{a+1} B'(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{2n}\left\{B'(1+a) - B'(a)\right\}$$

$$+\frac{1}{n}\left\{B'(a) + B'\left(a+\frac{1}{n}\right) + B'\left(a+\frac{2}{n}\right) + \dots B'\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{n^{2m+2}}\left\{-B'(na) + \frac{(na)^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2}(na)^{2m+1} + \frac{(-1)^{m+1}B_{m+1}}{2m+2}\right\}$$

und da die erstere Gleichheit in (8) folgende darbietet:

$$B''(1+a) - B''(a) = a^{2m},$$

$$B'(1+a) - B'(a) = a^{2m+1};$$

so hat man auch

$$\int_a^{a+1} B''(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{n}\left\{B''(a) + B''\left(a+\frac{1}{n}\right) + B''\left(a+\frac{2}{n}\right) + \dots B''\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{n^{2m+1}}\left\{B''(na) - \frac{(na)^{2m+1}}{2m+1}\right\},$$

$$\int_a^{a+1} B'(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{n}\left\{B'(a) + B'\left(a+\frac{1}{n}\right) + B'\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots B'\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{n^{2m+1}}\left\{B'(na) - \frac{(na)^{2m+2}}{2m+2} + \frac{(-1)^m B_{m+1}}{2m+2}\right\}.$$

Betreffend die noch zu vollziehenden bestimmten Integrale ziehen wir die Gleichheiten (10) und (11) zu. Erstere führt unmittelbar auf:

$$B'(a+1) - B'(a) = (2m+1)\int_a^{a+1} B''(x)\,dx\,;$$

daher hat man beachtend die erste der Gleichheiten in (8):

$$\int_a^{a+1} B''(x)\,dx = \frac{a^{2m+1}}{2m+1}\,. \tag{12}$$

Letztere oder die Gleichheit (11) gibt unmittelbar folgende:

$$B''(a+1) - B''(a) = 2m\int_a^{a+1} {}'B(x)\,dx + (-1)^{m-1} B_m\,,$$

die mit abermaliger Zuziehung der erstern Gleichheit in (8) auf:

$$a^{2m} = 2m\int_a^{a+1} {}'B(x)\,dx + (-1)^{m-1} B_m$$

führt; erhöhet man hier m um eine Einheit, so geht nach getroffenem Uebereinkommen in vorangehender Nr. $'B(x)$ in $B'(x)$ über, und man hat:

$$a^{2m+2} = (2m+2)\int_a^{a+1} B'(x)\,dx + (-1)^m B_{m+1}\,,$$

woraus

$$\int_a^{a+1} B'(x)\,dx = \frac{a^{2m+2}}{2m+2} + \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2} B_{m+1} \tag{13}$$

erhalten wird.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse in (12) und (13) bieten die obigen zwei allgemeinen Resultate folgende zwei Theoreme, betreffend die Bernoullischen Functionen $B''(x)$ und $B'(x)$ dar:

$$\frac{1}{n^{2m}} B''(na) = B''(a) + B''\left(a+\frac{1}{n}\right) + B''\left(a+\frac{2}{n}\right) + \cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot + B''\left(a+\frac{n-1}{n}\right), \quad (14)$$

$$\frac{1}{n^{2m+1}} B'(na) = B'(a) + B'\left(a+\frac{1}{n}\right) + B'\left(a+\frac{2}{n}\right) + \cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot + B'\left(a+\frac{n-1}{n}\right) + \frac{(-1)^m}{2m+2}\left(n - \frac{1}{n^{2m+1}}\right) B_{m+1}, \quad (15)$$

die ich auf mehr synthetischem Wege in meiner oben citirten Schrift ebenfalls bewiesen habe. Dieselben bestehen ihrer Ableitung nach für alle reellen Werthe von a, wie für alle ganzen und positiven Zahlenwerthe von n.

4. Als dritte Anwendung sei in der allgemeinen Gleichung (I):

$$\varphi(x) = \log. \Gamma(x)$$

festgestellt. — Da bei dieser Annahme keiner der Differenzialquotienten den Nullwerth annimmt, so haben wir uns zunächst mit der Herstellung der Form des m^{ten} Differentialquotienten von $\varphi(x)$ nach x zu befassen, um von der am Eingange zu Grunde gelegten Gleichung (I) Nutzen zu ziehen.

Die Function $\Gamma(x)$ wird bekanntlich durch das Euler'sche Integral zweiter Art, wie auch durch folgende, ohne Ende fortlaufende Factorenfolge definirt:

$$\Gamma(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots k \cdot k^{x-1}}{x\,(x+1)\,(x+2)\ldots(x+k-1)}, \quad (15)$$

wo k eine ohne Ende wachsende, positive und ganze Zahl vorstellt.

Diesem nach hat man

$$\varphi(x) = \log. 1.2.3. \ldots . k + (x-1) \log. k$$
$$- \log. x - \log. (x+1) - \log. (x+2) \ldots - \log. (x+k-1),$$

und durch successives Differenziren:

$$\varphi_1(x) = \log. k - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \cdots - \frac{1}{x+k-1},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \cdots \frac{1}{(x+k-1)^2},$$

$$\varphi_3(x) = -1.2 \left\{ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{1}{(x+k-1)^3} \right\},$$

. . . .

$$\varphi_{2m-1}(x) =$$
$$-1.2 \ldots (2m-2) \left\{ \frac{1}{x^{2m-1}} + \frac{1}{(x+1)^{2m-1}} + \cdots \frac{1}{(x+k-1)^{2m-1}} \right\};$$

$$\varphi_{2m}(x) =$$
$$+1.2 \ldots (2m-1) \left\{ \frac{1}{x^{2m}} + \frac{1}{(x+1)^{2m}} + \cdots \frac{1}{(x+k-1)^{2m}} \right\}.$$

Hieraus ziehen wir für unsern folgenden Bedarf, erstens:

$$\varphi_{2r+1}(a+1) - \varphi_{2r+1}(a) =$$
$$= -1.2.3 \ldots 2r \left\{ \frac{1}{(a+k)^{2r+1}} - \frac{1}{a^{2r+1}} \right\},$$

und weil k eine unendlich gross werdende Zahl ist, hat man für jedes endliche a:

$$\varphi_{2r+1}(a+1) - \varphi_{2r+1}(a) = \frac{1.2.3.4 \ldots 2r}{a^{2r+1}}.$$

(Schluss folgt.)