Prof. Raabe. — Ueber den gegenseitigen Zusammenhang einiger Functionen.

(Mitgetheilt den 10. Mai 1852.)

1.

Die Integralrechnung, die Urquelle neuer Functionen, bietet die Hülfsmittel ihrer nähern Erforschung dar und ebnet die Wege, die zur Kenntniss ihrer gegenseitigen Beziehungen führen. Einen kleinen Beleg hiezu enthält die vorliegende Mittheilung, wo folgende drei Functionen von z:

$$\varphi(z) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{z^2}{1.3} + \frac{1}{7}\cdot\frac{z^3}{1.3.5} + \frac{1}{9}\cdot\frac{z^4}{1.3.5.7} + \cdots, \qquad (1$$

$$\psi(z) = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{z}{2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{z^2}{2.4} - \frac{1}{7}\cdot\frac{z^3}{2.4.6} + \frac{1}{9}\cdot\frac{z^4}{2.4.6.8} - \cdots, \qquad (2$$

$$f(z) = 1 + \left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{z}{1.2} + \left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{z^2}{1.2.3} + \left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\frac{z^3}{1.2.3.4} + \cdots, \qquad (3$$

in denen die Reihen rechterhand für alle Werthe von z convergent sind, in gegenseitige Beziehungen werden gebracht werden.

I. Für jeden positiven Werth von α hat man:

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-(1+\alpha x^2)y}dy\right)e^{-x^2}dx = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-(1+\alpha y)x^2}dx\right)e^{-y}dy$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist; vollzieht man die innerhalb der Klammern enthaltenen Quadraturen, so geht folgende hervor:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{1+\alpha y}}dy;$$

ersetzt man x durch $x\sqrt{a}$, wie $1+\alpha y$ durch y und endlich α durch $\frac{1}{a}$ so ist:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,e^a\sqrt{a\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-ay}}{\sqrt{y}}\,dy,$$

wo wir nunmehr a reell und positiv erklären.

Nun ist nach Nr. 200 meiner Integralrechnung:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-ay}}{\sqrt{y}}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} - 2\psi(2a),$$

und ebenso habe ich in Nr. 16 dieser Mittheilungen:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^a - e^{\frac{a}{2}}\sqrt{\pi}\sqrt{af(a)} \qquad (4$$

gefunden; — daher besteht die Gleichheit:

$$\psi(2z) = e^{-\frac{z}{2}}\sqrt{f(z)}, \quad \text{oder} \quad \psi(2z)^2 = e^{-z} f(z), \qquad (5$$

welche eine der angekündigten Beziehungen darstellt.

II. Auf eine zweite Beziehung führt folgende Gleichheit:

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}\operatorname{Cos} xy\,dy\right)\frac{dx}{1+\beta x^2}$$
$$= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos} yx}{1+\beta x^2}\,dx\right)e^{-\alpha y^2}\,dy,$$

wo α und β reelle und positive Constanten sind. Vollzieht man die bestimmten Integrale innerhalb der Parenthesen nach den Nrn. 162 und 164 meiner Integralrechnung, so gelangt man auf die Gleichheit:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}}{1+\beta x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\int_0^\infty e^{-\left(\alpha y^2+\frac{1}{\sqrt{\beta}}y\right)}\,dy,$$

die, wenn β durch $\frac{1}{\beta^2}$ ersetzt wird, in folgende übergeht:

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha y^2+\beta y)}\,dy = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}}{\beta^2+x^2}\,dx,$$

in der β reell, α aber reell und positiv ist.

Ersetzt man die Integrationsvariable y durch $y-\gamma$, nimmt dann $\alpha = a$, $\beta = b + 2ac$, $\gamma = c$ an, und ersetzt hierauf die Integrationsvariable x durch $(b + 2ac)x$, so hat man auch:

$$\int_c^\infty e^{-(ay^2 + by)}\,dy = \frac{e^{-(bc + ac^2)}}{\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(b + 2ac)^2x^2}{4a}}}{1 + x^2}\,dx,$$

wo b und c reell, a aber ausserdem noch positiv sein muss. Berücksichtiget man die oben in (4) und (5) aufgestellten Ergebnisse, so geht diese Gleichheit in folgende über:

$$\int_c^\infty e^{-(ay^2 + by)}\,dy = e^{\frac{b^2}{4a}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{b + 2ac}{2a}\,\psi\left(\frac{(b+2ac)^2}{2a}\right)\right], \quad (6$$

aus der auch sehr bald folgende gezogen wird:

$$\int_0^c e^{-(ay^2 + by)}\,dy = \frac{e^{\frac{b^2}{4a}}}{2a}\left[(b + 2ac)\,\psi\left(\frac{(b+2ac)^2}{2a}\right) - b\,\psi\left(\frac{b^2}{2a}\right)\right] \quad (7$$

wo, wie oben, b und c reell, a aber auch noch positiv sein muss.

Um nun auf die angekündigte zweite Beziehung zu gelangen, vollziehen wir das bestimmte Integral linkerhand der letztern Gleichheit unter der Annahme $c = \infty$, indem wir den Faktor e^{-by} in eine nach aufsteigenden Potenzen von y geordnete Reihe auflösen. Werden hiebei folgende Hülfsgleichungen zugezogen:

$$\frac{b^{2p}}{1.2.3.4\ldots\ldots 2p}\int_0^\infty e^{-ay^2}\,y^{2p}\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2.3.4\ldots\ldots p}\cdot\left(\frac{b^2}{4a}\right)^p\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\int_0^\infty e^{-ay}y^p dy = 1.2.3\,4\ldots\ldots p\cdot\frac{1}{a^{p+1}},$$

so gelangt man sehr bald auf:

$$\int_0^\infty e^{-(ay^2 + by)}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}} - \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\,\varphi\left(\frac{b^2}{2a}\right); \quad (7'$$

das Ergebniss in (6) führt aber dei der Annahme $c = 0$ auf:

$$\int_0^{\infty} e^{-(ay^2+by)} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}} - \frac{1}{2}\frac{b}{a}\, e^{\frac{b^2}{4a}}\, \psi\left(\frac{b^2}{2a}\right), \quad (6'$$

so gelangt man bei der Annahme $\frac{b^2}{4a} = z$ auf folgende zweite Beziehung:

$$e^z \psi(2z) = \varphi(2z) \quad (8$$

Stellen wir dieses Ergebniss mit dem in (5) dargestellten zusammen, so ergeben sich für die drei aufgestellten Functionen folgende gegenseitige Beziehungen:

$$\varphi(z)^2 = e^{\frac{z}{2}} f\left(\frac{z}{2}\right), \qquad \psi(z)^2 = e^{-\frac{z}{2}} f\left(\frac{z}{2}\right), \quad (A$$

die mit den folgenden zugleich bestehen:

$$\varphi(z) = e^{\frac{z}{4}}\sqrt{f\left(\frac{z}{2}\right)},\ \psi(z) = e^{-\frac{z}{4}}\sqrt{f\left(\frac{z}{2}\right)},\ \varphi(z)\,\psi(z) = f\left(\frac{z}{2}\right), \quad (B$$

wo in den beiden erstern die zweite Radix nur in positiver Bedeutung auftritt.

2.

Wir gehen nun von einem allgemeinern Doppelintegrale als dem in I. vorangehender Nr. aus, nämlich von folgendem:

$$\int_0^{\beta}\left(\int_0^{\infty} e^{-(1+\alpha x^2)y} dy\right) e^{-x^2} dx =$$
$$= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\beta} e^{-(1+\alpha y)x^2} dx\right) e^{-y} dy,$$

wo β reell, α aber reell und positiv ist.

Berücksichtiget man eines der Ergebnisse der in vorangehender Nr. citirten Mittheilung 16. unserer Gesellschaft, so hat man die Bestimmung:

$$\int_0^{\beta} e^{-(1+\alpha y)x^2} dx = \beta e^{-\frac{1}{2}(1+\alpha y)\beta^2} \sqrt{f[(1+\alpha y)\beta^2]},$$

die beachtend die zweite der Gleichheiten in (B) vorangehender Nr. mit folgender gleichbedeutend ist:

$$\int_0^\beta e^{-(1+\alpha y)x^2}\,dx = \beta\psi(2\beta^2(1+\alpha y));$$

diesem nach geht die hier vorgelegte Gleichheit in folgende über:

$$\int_0^\beta \frac{e^{-x^2}}{1+\alpha x^2}\,dx = \beta\int_0^\infty \psi(2\beta^2(1+\alpha y))e^{-y}\,dy,$$

die, wenn α durch α^2 ersetzt wird, in folgende übergeht:

$$\int_0^\beta \frac{e^{-x^2}}{1+\alpha^2 x^2}\,dx = \beta\int_0^\infty \psi(2\beta^2(1+\alpha^2 y))\,e^{-y}\,dy,$$

wo α und β reelle Grössen repräsentiren.

Ersetzt man nun im bestimmten Integrale linkerhand x durch $\frac{x}{\alpha}$, wie dann in der ganzen Gleichheit α durch $\frac{1}{a}$ und β durch b, so gelangt man auf:

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{e^{-a^2x^2}}{1+x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^\infty \psi\left(2b^2\left(1+\frac{y}{a^2}\right)\right)e^{-y}\,dy,$$

die durch gegenseitige Vertauschung von a mit b auch folgende darbietet:

$$\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{e^{-b^2x^2}}{1+x^2}\,dx = \frac{a}{b}\int_0^\infty \psi\left(2a^2\left(1+\frac{y}{b^2}\right)\right)e^{-y}\,dy.$$

Nach Gleichheit (12) der oben erwähnten Mittheilung hat man aber:

$$e^{-a^2}\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{e^{-a^2x^2}}{1+x^2}\,dx + e^{-b^2}\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{e^{-b^2x^2}}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\int_0^a e^{-x^2}dx \cdot \int_0^b e^{-x^2}\,dx,$$

wie nach Gleichheit (8') derselben Mittheilung:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx \cdot \int_0^b e^{-x^2}dx = ab\, e^{-\frac{1}{2}(a^2+b^2)} \sqrt{f(a^2)f(b^2)},$$

oder auch beachtend die zweite der Gleichheiten (B) vorangehender Nr.:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx \cdot \int_0^b e^{-x^2}dx = ab\psi(2a^2)\psi(2b^2);$$

daher führen die vorhin aufgestellten zwei Gleichheiten folgende herbei:

$$\frac{a}{b}e^{-b^2}\int_0^\infty \psi\left[2a^2\left(1+\frac{y}{b^2}\right)\right] e^{-y}\,dy$$
$$+\frac{b}{a}e^{-a^2}\int_0^\infty \psi\left[2b^2\left(1+\frac{y}{a^2}\right)\right] e^{-y}\,dy = \frac{\pi}{2} - 2ab\,\psi(2a^2)\psi(2b^2).$$

Wird noch im erstern dieser zwei bestimmten Integrale die Integrationsvariable y durch $b^2(x-1)$, und im zweiten durch $a^2(x-1)$ ersetzt, so gelangt man auf:

$$\int_1^\infty \psi(2a^2x)e^{-b^2x}dx + \int_1^\infty \psi(2b^2x)e^{-a^2x}dx = \frac{\pi}{2ab} - 2\psi(2a^2)\psi(2b^2),$$

oder auch auf:

$$\int_1^\infty \psi(2ax)e^{-bx}dx + \int_1^\infty \psi(2bx)e^{-ax}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} - 2\psi(2a)\psi(2b),$$

wo a und b angebbare, reelle und positive Grössen vorstellen.

Geht hier die Integrationsvariable x in $\frac{x}{c}$ über, und ersetzt hierauf a durch ca wie b durch cb, so gelangt man auf:

$$\int_c^\infty \psi(2ax)e^{-bx}dx + \int_c^\infty \psi(2bx)e^{-ax}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} - 2c\psi(2ca)\psi(2cb),$$

wo c aller nicht negativen, reellen Werthe fähig ist.

Wird hier c immer kleiner und kleiner angenommen, so wird auch der Subtrahendus rechter Hand vom Gleichheitszeichen immerfort kleiner, so dass man zuletzt auf folgendes Resultat geführt wird:

$$\int_0^\infty \psi(2ax)e^{-bx}dx + \int_0^\infty \psi(2bx)e^{-ax}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}; \tag{9}$$

subtrahirt man von diesem das vorhergehende Ergebniss, so gelangt man auf:

$$\int_0^c \psi(2ax)e^{-bx}dx + \int_0^c \psi(2bx)e^{-ax}dx = 2c\psi(2ca)\psi(2cb), \tag{10}$$

wo a, b und c reelle positive Grössen sind.

Zieht man die beiden erstern Gleichheiten in (B) zu Hülfe, die $\psi(z) = e^{-\frac{z}{2}}\varphi(z)$ darbieten, so hat man auch:

$$\int_0^\infty [\varphi(2ax) + \varphi(2bx)]\, e^{-(a+b)x}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}, \tag{9'}$$

$$\int_0^c [\varphi(2ax) + \varphi(2bx)]e^{-(a+b)x}dx = 2c\, e^{-(a+b)c}\varphi(2ca)\varphi(2cb) \tag{10'}$$

die für dieselben Werthe von a, b, c wie die obigen bestehen.

3.

Aus den zuletzt gewonnenen Ergebnissen kann man sehr leicht Differenzialgleichungen erster Ordnung für jede der hier vorgelegten Functionen ziehen. Wird in Gleichheit (10) $a = b = \frac{1}{2}$ angenommen, so gelangt man auf:

$$\int_0^c \psi(x)e^{-\frac{1}{2}x}dx = c\psi(c)^2;$$

differenzirt man diese nach der allgemeinen Constante c, so gelangt man unmittelbar auf:

$$\psi(c)e^{-\frac{1}{2}c} = \psi(c)^2 + 2c\psi(c)\psi_1(c);$$

ersetzt man c durch z, so gelangt man auf:

$$\psi(z) + 2z\psi_1(z) = e^{-\frac{1}{2}z}, \tag{11}$$

die eine der angekündigten Differenzialgleichungen ist, wo man in gewohnter Weise den Differenzialquotienten von $\psi(z)$ nach z durch $\psi_1(z)$ dargestellt hat.

Wie schon Ausgangs vorangehender Nr. gezeigt worden, hat man:

$$\psi(z) = e^{-\frac{z}{2}} \varphi(z),$$

sonach ist auch:

$$\psi_1(z) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} \varphi(z) + e^{-\frac{z}{2}} \varphi_1(z);$$

führt man diese Bestimmungen in die aufgestellte Differenzialgleichung (11) ein, so gelangt man auf folgende zweite Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$\varphi(z) + 2z\varphi_1(z) = 1 + z\varphi(z), \qquad (11'$$

die der Function $\varphi(z)$ angehört, und die man auch direkte aus der Gleichheit (10′) vorangehender Nr. hätte ziehen können.

Endlich findet man aus diesen mit Hülfe der einen oder andern der beiden erstern Gleichheiten in (B) folgende Differenzialgleichung erster Ordnung für die Function $f(z)$:

$$(1 - z)f(z) + zf_1(z) = e^{-\frac{z}{2}} \sqrt{f(z)},$$

die auch in folgender Weise gestellt werden kann:

$$\frac{d(zf(z))}{dz} - zf(z) = e^{-\frac{z}{2}} \sqrt{f(z)},$$

oder wenn $zf(z) = f'(z)$ gesetzt wird, hat man die Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$f_1'(z) - f'(z) = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{\sqrt{z}} \sqrt{f'(z)}; \qquad (11''$$

führt man noch rechterhand die Function ψ ein, so nimmt diese folgende noch einfachere Form an:

$$f_1'(z) - f'(z) = \psi(2z).$$

4.

Wir theilen noch ein Paar Summationen mit, die man als Verificationen einiger der bisher gewonnenen Ergebnisse ansehen kann.

Aus den Begriffsgleichungen (1 und 2) gewinnt man sehr bald folgende:

$$\psi(2ax)\, e^{-bx} + \psi(2bx) e^{-ax} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{1.2.3.\ldots.k} \cdot \frac{x^k}{2k+1} \cdot (a^k e^{-bx} + b^k e^{-ax}),$$

$$[\varphi(2ax) + \varphi(2bx)]\, e^{-(a+b)x} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(2a)^k + (2b)^k}{1.3.5.7.\ldots.(2k+1)} \cdot x^k\, e^{-(a+b)x};$$

multiplicirt man diese mit dx und integrirt sie hierauf von $x = 0$ bis $x = \infty$, so gelangt man mit Zuziehung der Ergebnisse in (9) und (9′) zweitvorhergehender Nr. auf:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} + \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}\right], \\ \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{\binom{-\frac{1}{2}}{k}} \cdot \frac{a^k + b^k}{(a+b)^{k+1}}, \end{aligned}\right\} \quad (12$$

wo $\binom{-\frac{1}{2}}{k}$ den Coefficienten von y^k in der Entwickelung des Binoms $(1 + y)^{-\frac{1}{2}}$ vorstellt.

Die ohne Ende fortlaufende Reihe in der erstern dieser zwei Gleichungen ist nur bei der Annahme $a = b$ eine convergente; diese Annahme führt auf die bekannte Leibnitz'sche Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Die Reihe in der zweiten obiger Gleichungen convergirt zwar bei jeder positiv reellen Annahme über a und b gegen einen endlichen Grenzwerth; der Minimumwerth jedoch des Bruches:

$$\frac{a^k + b^k}{(a+b)^k}$$

stellt sich bei der Annahme $a = b$ dar; — daher hat man bei dieser Annahme:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots$$

wo die Reihe schneller als eine geometrische Progression mit dem beständigen Quotienten $\frac{1}{2}$ abnimmt.

5.

Die unendlichen Reihen, durch die wir in Nro. 1 die Functionen $\varphi(z)$, $\psi(z)$ und $f(z)$ definirt haben, convergiren für alle gedenkbaren Werthe von z gegen endliche Grenzwerthe; daher bestehen die gegenseitigen Beziehungen dieser Functionen nicht nur für reelle, sondern auch für imaginäre Verfügungen über z. Diese Bemerkung wollen wir dazu benützen, einige neue Functionen und ihre gegenseitigen Beziehungen kennen zu lernen, die in ihren Folgen auch auf die vorgelegten Functionen der Nr. 1 von Einfluss werden erkannt werden.

Stellt man durch i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ dar, und setzt die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(zi) &= \Phi(z) + i\Phi'(z), \\ \psi(zi) &= \Psi(z) - i\Psi'(z), \\ f(zi) &= F(z) + iF'(z), \end{aligned}\right\} \qquad (13$$

fest, wo man Kürze halber die Gleichungen festgestellt hat:

$$\Phi(z) = 1 - \frac{z^2}{1.3.5} + \frac{z^4}{1.3.5.7.9} - \frac{z^6}{1.3.5.7.9.11.13} + \cdots,$$

$$\Phi'(z) = \frac{z}{1.3} - \frac{z^3}{1.3.5.7} + \frac{z^5}{1.3.5.7.9.11} - \ldots\ldots,$$

$$\Psi(z) = 1 - \frac{z^2}{2.4.5} + \frac{z^4}{2.4.6.8.9} - \frac{z^6}{2.4.6.8.10.12.13} + \ldots\ldots,$$

$$\Psi'(z) = \frac{z}{2.3} - \frac{z^3}{2.4.6.7} + \frac{z^5}{2.4.6.8.10.11} - \ldots\ldots,$$

$$F(z) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{z^2}{1.2.3} + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)\frac{z^4}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$F'(z) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{z}{1.2} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\frac{z^3}{1.2.3.4}$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right)\frac{z^5}{1.2.3.4.5.6} - \ldots\ldots\ldots,$$

so sind wir unter den neu eingeführten Functionen $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$, $\Psi(z)$ . . . manche beachtenswerthe Beziehung nunmehr mitzutheilen in der Lage.

Aus den beiden erstern Gleichheiten (B) folgt $\varphi(z) = e^{\frac{z}{2}}\,\psi(z)$; geht hier z in zi über, so gelangt man beachtend die Gleichungen (13) auf:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z) &= \Psi(z)\ \mathrm{Cos}\,\frac{z}{2} + \Psi'(z)\ \mathrm{Sin}\,\frac{z}{2}, \\ \Phi'(z) &= \Psi(z)\ \mathrm{Sin}\,\frac{z}{2} - \Psi'(z)\ \mathrm{Cos}\,\frac{z}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (14$$

aus welchen Gleichheiten sehr bald folgende gezogen wird:

$$\Phi(z)^2 + \Phi'(z)^2 = \Psi(z)^2 + \Psi'(z)^2.$$

Jeder dieser Ausdrücke rechts oder links vom Gleichheitszeichen kann sehr bald durch eine ohne Ende fortlaufende convergente Reihe dargestellt werden. — Wird nämlich in Gleichheit (11) der Nr. 3 die Variable z durch zi ersetzt, so gelangt man auf folgende zwei Differenzialgleichungen:

$$\Psi(z) + 2z\Psi_1(z) = \mathrm{Cos}\,\frac{z}{2}, \quad \Psi'(z) + 2z\Psi'_1(z) = \mathrm{Sin}\,\frac{z}{2}, \quad (15$$

wo der unten beigesetzte Zeiger den ersten Differenzialquotienten der betreffenden Function nach z andeutet.

Multiplicirt man die erste dieser Differenzialgleichungen mit $\Psi(z)$, die zweite mit $\Psi'(z)$ und stellt hierauf ihre Summe her, so gelangt man, wenn eine neue Function $\lambda(z)$ durch die Gleichung:

$$\lambda(z) = \Psi(z)^2 + \Psi'(z)^2$$

eingeführt wird, auf die Differenzialgleichung:

$$\lambda(z) + z\lambda_1(z) = \Phi(z),$$

die durch Integration auf:

$$z\lambda(z) = A + \int \Phi(z) dz$$

führt, wo A die Integrationsconstante ist. Beachtet man die Bedeutung von $\Phi(z)$, und vollzieht die Quadratur rechterhand, so gelangt man auf:

$$z\lambda(z) = A + z - \frac{1}{3}\frac{z^3}{1.3.5} + \frac{1}{5}\frac{z^5}{1.3.5.7.9} - \frac{1}{7}\frac{z^7}{1.3.5.7.9.11.13} + \ldots\ldots;$$

wird hier $z = 0$ angenommen, so stellt sich $A = 0$ heraus; — sonach hat man, wenn:

$$\lambda(z) = \Psi(z)^2 + \Psi'(z)^2 = \Phi(z)^2 + \Phi'(z)^2 \quad (16$$

gesetzt wird, folgende angekündigte Bestimmung von $\lambda(z)$:

$$\lambda(z) = 1 - \frac{1}{3}\frac{z^2}{1.3.5} + \frac{1}{5}\frac{z^4}{1.3.5.7.9} - \frac{1}{7}\frac{z^6}{1.3.5.7.9.11.13} + \ldots\ldots \quad (17$$

Durch dieselbe, so eben eingeführte Function $\lambda(z)$ kann auch die Summe der Quadrate von $F(z)$ und $F'(z)$ dargestellt werden. Bedenkt man nämlich, dass die Gleichheiten in (13) auch dann noch bestehen, wenn i durch — i ersetzt wird, so gelangt man bald auf folgende Gleichheiten:

$$\varphi(zi)\,\varphi(-zi) = \lambda(z), \quad \psi(zi)\,\psi(-zi) = \lambda(z), \quad (18$$

$$f(zi)\,f(-zi) = F(z)^2) + F'(z)^2; \quad (19$$

aus dem dritten Zusammenhang in (B) der Nr. 1 folgert man auch:

$$\varphi(zi)\,\psi(zi) = f\left(\frac{zi}{2}\right), \quad \varphi(-zi)\,\psi(-zi) = f\left(-\frac{zi}{2}\right),$$

*

daher bieten die unmittelbar vorhergehenden Gleichheiten folgende dar:

$$F(z)^2 + F'(z)^2 = \lambda(2z)^2, \tag{20}$$

welche die angekündigte ist, und vermöge welcher die Gleichheit (19) auch folgende Form annimmt:

$$f(zi)\,f(-zi) = \lambda(2z)^2. \tag{19'}$$

Ersetzt man wieder in den Gleichheiten (18) und (19′) z durch zi, so hat man zunächst:

$$\varphi(z)\,\varphi(-z) = \lambda(zi), \quad \psi(z)\,\psi(-z) = \lambda(zi),$$
$$f(z)\,f(-z) = \lambda(2zi)^2,$$

und vermöge der Begriffsgleichung (17) der Function $\lambda(z)$ hat man, wenn:

$$\mu(z) = 1 + \frac{1}{3}\frac{z^2}{1.3.5} + \frac{1}{5}\frac{z^4}{1.3.5.7.9} + \frac{1}{7}\frac{z^6}{1.3.5.7.9.11.13} + \ldots \tag{21}$$

festgestellt wird, folgende neue Beziehungen der am Eingange vorgelegten drei Functionen:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi(z)\,\varphi(-z) = \mu(z), \quad \psi(z)\,\psi(-z) = \mu(z),\\ f(z)\,f(-z) = \mu(2z)^2,\end{array}\right\} \tag{C}$$

wo die durch $\lambda(z)$ und $\mu(z)$ angedeuteten Functionen folgende einfache gegenseitige Beziehungen eingehen:

$$\mu(z) = \lambda(zi) \quad \text{oder auch} \quad \lambda(z) = \mu(zi), \tag{D}$$

und in Folge dieser auch:

$$\mu(-z) = \mu(z), \quad \text{wie} \quad \lambda(-z) = \lambda(z).$$

6.

Ich schliesse diese Mittheilung mit der Bemerkung, dass die Werthungen einiger im Vorausgeschickten mitgetheilten bestimmten Integrale nicht nur für reelle Werthe der in denselben vorkommenden allgemeinen Constanten, sondern auch für imaginäre Werthe derselben Bestand haben.

Wir wollen solches gegenwärtig bei der Gleichung (7′) und mithin auch bei der ihr gleichbedeutenden (6′)

der Nr. 1 zeigen, wo wir nämlich das Bestandhaben derselben auch bei der Annahme bi statt b, wo i die imaginäre Einheit, nämlich $\sqrt{-1}$ ist, nachweisen werden.

Ersetzt man in der That b durch bi, so geht (7′) über in:

$$\int_0^{\infty} e^{-ay^2}(\operatorname{Cos} by - i \operatorname{Sin} by)\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}} - \frac{1}{2}\frac{b}{a}\, \varphi\left(-\frac{b^2}{2a}\right),$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ay^2} \operatorname{Cos} by\, dy &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}, \\ \int_0^{\infty} e^{-ay^2} \operatorname{Sin} by\, dy &= \frac{b}{2a}\, \varphi\left(-\frac{b^2}{2a}\right), \end{aligned}\right\} \quad (22$$

hervorgeht, welche zwei Ergebnisse vollkommen richtig sind, wie aus der Gleichung (71) der Nr. 162 und der Gleichung (10) der Nr. 197 meiner Integralrechnung zu entnehmen ist, allwo wir besagte zwei Integralbestimmungen directe vorgenommen haben.

Diesem nach besteht jede der folgenden, unter einander gleichbedeutenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-(ay^2 + by)} dy &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}} - \frac{1}{2}\frac{b}{a}\, \varphi\left(\frac{b^2}{2a}\right), \\ \int_0^{\infty} e^{-(ay^2 + by)} dy &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}} - \frac{1}{2}\frac{b}{a}\, e^{\frac{b^2}{4a}}\, \psi\left(\frac{b^2}{2a}\right), \end{aligned}\right\} \quad (23$$

für jedes reelle positive a, wie für jedes reelle und noch rein imaginäre b.