MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

No 84. — 1853.

W. Denzler. — Ueber die Reduction der Complanation oder Quadratur auf die Kubirung, und der Rectification auf die Quadratur.

(Schluss.)

Nun ist $n = c^2\sqrt{\frac{z_1^2}{c^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{x_1^2}{a^4}}$ und differirt von $c^2\sqrt{\frac{z^2}{c^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}}$, da jedem Punkte $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ in O ein von diesem Punkte um das unendlich kleine ε abstehender Punkt (x, y, z) in O, zugehört, nur um ein unendlich Kleines. Hieraus folgt:

$$13)\quad \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = -2\varepsilon\sqrt{\frac{z^2}{c^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}}$$

Setzen wir für $\frac{z^2}{c^4}$ die von ihr nur um ein unendlich Kleines verschiedene Grösse $\frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$, so erhalten wir nach einigen leichten Reduktionen:

$$14)\quad z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \varepsilon\sqrt{\frac{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

Auf gleiche Weise finden wir, indem wir in 13) $z = 0$ und $\frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ für $\frac{y^2}{b^4}$ setzen:

$$15)\quad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \varepsilon\sqrt{\frac{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

Die Gleichungen 13) und 14) drücken das Bildungsgesetz der Fläche $O_{,}$ aus, und zeigen, dass $O_{,}$ keineswegs, wie man vermuthen möchte, ein Ellipsoid ist. Ebenso wenig ist die Curve 15), nach welcher die Fläche $O_{,}$ die Ebene der xy schneidet, obschon einer Ellipse parallel und unendlich nahe, eine Ellipse.

Wir kubiren jetzt den Körper $K_{,}$, dessen Oberfläche $O_{,}$ ist, und finden zunächst vermöge der Gleichungen 14) und 15) nach der Bedeutung eines Doppelintegrals die Gleichung:

$$16)\quad K_{,} =$$

$$\int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon}\int_{-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \varepsilon\sqrt{\frac{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{b^2}\right)}{1 - \frac{x^2}{a^2}}}}^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \varepsilon\sqrt{\frac{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}{1 - \frac{x^2}{a^2}}}} \left[2c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - 2\varepsilon\sqrt{\frac{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\right] dy\,dx$$

Zur Ausmittlung dieses Doppelintegrals betrachten wir vorerst den Bestandtheil:

$$17)\quad \int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\varepsilon\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\varepsilon\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\cdot dy\cdot dx$$

Das Integral, das sich auf dy bezieht, wird in ein gleichwerthiges Integral mit den constanten Grenzen + 1 und — 1 verwandelt, wenn wir in der zu integrirenden Funktion durchgehends

$$18)\quad yb\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-y\varepsilon\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

für y setzen. Durch diese Substitution und durch Weglassung der gegen ε verschwindenden Glieder, erhalten wir für 17):

$$19)\quad 2c\int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon}\int_{-1}^{+1}\left[b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{1-y^2}-\right.$$

$$\left.-\ \varepsilon\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}\cdot\frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}}\right]\cdot dy\cdot dx$$

Da aber

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = y\sqrt{1-y^2}_{[1-(-1)]} = 0$$

und

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-y^2}\cdot dy = \frac{\pi}{2}$$

so reducirt sich 19) nach Weglassung der in Beziehung auf ε unendlich kleinen Glieder auf

$$bc\pi\int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot dx = \tfrac{4}{3}\,abc\pi$$

Wie wir nun von 17) zu 19) gelangten, so können wir von dem Doppelintegral:

$$21)\quad \int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\varepsilon\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\varepsilon\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{a^2}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}}}} 2\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)-\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\cdot dy\cdot dx$$

übergehen zu dem Doppelintegral mit constanten Grenzen, nämlich zu

$$22)\quad 2b\varepsilon\int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)-y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)}{1-y^2}}\,dy\,dx$$

wofür man offenbar, wegen des Faktors ε, das folgende Doppelintegral setzen darf:

$$2b\varepsilon\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)-y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)}{1-y^2}}\,dy\cdot dx$$

Betreffend die weitere Behandlung dieses Ausdruckes, dessen Werth wir $= \varepsilon B$ setzen wollen, verweisen wir auf pag. 442 im 2ten Theile des ausgezeichneten Werkes über Differenzial- und Integralrechnung von unserm hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Raabe.

Das Doppelintegral in 16) geht nun aus der Subtraktion des Ausdruckes 21), den wir $= \varepsilon B$ setzten, von dem Ausdruck 17) oder $\frac{4}{3}$ abcπ hervor, und wir haben somit die Gleichung:

$$K_{,} = \tfrac{4}{3}abc\pi - \varepsilon B$$

Offenbar ist aber auch nach dem Lehrsatz I)

$$K_{,} = K - \varepsilon O$$

Da diese zwei letztern Gleichungen auch für $\varepsilon = 0$ bestehen, so ist klar, dass

$$K = \tfrac{4}{3}abc\pi$$

und mithin, da der Ausdruck 17), aus welchem $\frac{4}{3}$ abcπ hervorging, von $\frac{4}{3}$ abcπ nur um eine gegen ε verschwindende Grösse differirt, auch

$$O = B$$

Wie wir nun zu einem Ausdruck für $K_{,}$ gelangten, der uns O und K zugleich gab, gerade so können wir für $F_{,}$, das ist für die Ebene, begrenzt von der Curve $U_{,}$, nach welcher $O_{,}$ die Ebene xy schneidet, einen Ausdruck finden, der uns den Flächeninhalt F und zugleich den Umfang U der Ellipse gibt, nach welcher O die Ebene xy schneidet. Es ist nämlich, da 15) die Gleichung von $U_{,}$,

$$F_{,} = \int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon} 2\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - \varepsilon\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right]dx.$$

$$= ab\pi - 2\varepsilon\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}}}\,dx.$$

$$= F - \varepsilon U.$$

Es sei nun ganz allgemein die Gleichung von der Oberfläche O eines Körpers K

$$23)\quad \varphi(x, y, \zeta) = 0$$

Hieraus folge

$$24)\quad \zeta = \psi(x, y)$$

und für $\zeta = 0$

$$25)\quad y = f(x)$$

Zur Herstellung der Gleichung von $O_{,}$, d. i. der zu O parallelen und von O um das unendlich kleine ε abstehenden Fläche, denken wir uns dieses $O_{,}$ als variirte Fläche zu O, und anstatt einer schwerfälligen Elimination, wie sie aus den 4 Gleichungen 6) bis 9) Statt fand, variiren wir die Gleichung 23). Man hat alsdann, wenn x, y und $z = \zeta - \delta\zeta$ die laufenden Coordinaten der variirten Fläche $O_{,}$ darstellen, folgende Gleichung von $O_{,}$:

$$27)\quad \varphi(x, y, z + \delta\zeta) = \varphi(x, y, z) + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\delta\zeta = 0.$$

Denkt man sich jetzt zu irgend einem Punkte (x, y, ζ) in O die durch (x, y, ζ) und die Ebene der xy begrenzte Normale n, dann das in n erscheinende ε, ferner die Ordinate ζ und die in ζ vorkommende Variation $\delta\zeta$, so findet man sehr leicht die Proportion:

$$\delta\zeta : \varepsilon = n : \zeta$$

und mithin für 27) die Gleichung

$$28)\quad \varphi(x, y, z) + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) \cdot \frac{\varepsilon n}{\zeta} = 0$$

Ebenso findet sich auch aus 24) die nach z aufgelöste Gleichung von $O_{,}$, nämlich

$$z = \psi(x, y) - \frac{\varepsilon n}{\zeta}$$

und da $n = \zeta\sqrt{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2 + 1}$

$$29)\quad z = \psi(x, y) - \varepsilon\sqrt{1 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2}$$

Ferner erhält man auf gleiche Weise aus 25) die nach y aufgelöste Gleichung der Curve, nach welcher O, die Ebene der xy schneidet, nämlich:

$$30) \quad v = f(x) - \varepsilon\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

Der Körper K, mit der Oberfläche O, ist somit nach 29) und der Bedeutung eines Doppelintegrals

$$= \int\int \psi(x, y) \cdot dy \cdot dx - \varepsilon\int\int\sqrt{1 + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2} dy \cdot dx$$

Die Grenzen bei diesen beiden Doppelintegralen sind dieselben, und differiren von den Grenzen, zwischen welchen zur Bildung von K und O zu integriren ist, um ein Produkt aus ε in eine endliche Funktion. Aber dieses Produkt darf man in jedem Falle weglassen, da diese Weglassung wegen der nothwendigen Relation zwischen den Grenzen und den Integranden die Doppelintegrale offenbar nur um eine gegen ε verschwindende Grösse ändert.

Wir finden somit endlich ganz allgemein

$$K - K, = \varepsilon O$$

d. i. die Behauptung des Lehrsatzes I). Ebenso findet man aus 25) und 30) die den 2ten Lehrsatz darstellende Gleichung, nämlich:

$$F, = \int f(x) \cdot dx - \varepsilon\int\sqrt{1 - \left(\frac{df}{dx}\right)^2} \cdot dx = F - \varepsilon U,$$