W. Denzler. — Ueber die Reduction der Complanation oder Quadratur auf die Kubirung, und der Rectification auf die Quadratur.

Der Umstand, dass zuweilen die Kubirung weit einfacher als die Complanation oder Quadratur und diese in gewissen Fällen leichter als die Rektifikation ist, hat uns zur Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeit dieser Operationen veranlasst. Wir gelangten hiebei zunächst auf folgende Lehrsätze:

I) Es bezeichne

K den körperlichen Inhalt irgend eines mathematischen Körpers;

O dessen Oberfläche;

$O_{,}$ eine der O unendlich nahe liegende und parallele Fläche; d. h. eine solche, die diejenigen Punkte aller Normalen zu O enthält, die auf derselben Seite von O liegen, und von den Durchschnitten dieser Normalen mit O gleiche, aber unendlich kleine Entfernung haben;

ε die Entfernung der Fläche O von $O_{,}$; d. h. die Entfernung irgend eines Punktes P in O von demjenigen Punkte in $O_{,}$, in welchem die durch P gehende, der Fläche O angehörige Normale die $O_{,}$ schneidet;

$K_{,}$ den körperlichen Inhalt des Körpers, dessen Oberfläche $O_{,}$ ist;

alsdann ist das Maass von O in Beziehung auf irgend ein Quadrat Q gleich dem Mass von $K - K_{,}$ in Beziehung auf ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Grundfläche Q und dessen Höhe ε ist.

II) Wenn F den Flächeninhalt irgend einer vollständig begrenzten Ebene;

U deren Umfang;

$U_{,}$ eine dem U unendlich nahe parallele Linie, d. h. eine solche, in der diejenigen Punkte aller Normalen zu U liegen, die auf derselben Seite von U in gleicher unendlich kleiner Entfernung von den Durchschnitten dieser Normalen mit U liegen;

ε die Entfernung des U von $U_{,}$, d. h. die Entfernung irgend eines Punktes P in U von demjenigen Punkte in $U_{,}$, der mit P in der durch P gehenden dem Umfange U gehörenden Normale liegt;

$F_{,}$ den Flächeninhalt der durch $U_{,}$ vollständig begrenzten Ebene bezeichnet;

so ist das Mass von U in Beziehung auf irgend eine Längeneinheit L zugleich das Mass von $F - F_{,}$ in Beziehung auf ein Rechteck, dessen Grundlinie $=$ L, dessen Höhe $= \varepsilon$ ist.

Die synthetischen Beweise dieser Sätze sind mit keinen Schwierigkeiten verknüpft, und analytische Beweise werden wir weiter unten geben.

Die Anwendung dieser Sätze bietet natürlich dann die grössten Vortheile, wenn in Beziehung auf I) $O_{,}$ und O, in Beziehung auf II) $U_{,}$ und U demselben Bildungsgesetz unterworfen, und der gegebene Ausdruck für K oder F nur solche Dimensionen enthält, die von den entsprechenden zu $K_{,}$ oder $F_{,}$ entweder um ε, oder um eine Summe aus ε und einer gegen ε verschwindenden Grösse verschieden sind. In diesem Falle geht O oder U bloss aus der Differentiation des bekannten Ausdruckes für K oder F hervor. So ist z. B.:

a) Für die Kugel

$$K = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

während

$$O = \frac{dK}{dr} = 4r^2\pi$$

und umgekehrt

$$K = \int_0^r O \cdot dr$$

als Summe aller der unendlich dünnen concentrischen Kugelschalen, die zusammen die Kugel mit dem Radius r bilden.

b) Für den Kugelabschnitt K, dessen Höhe, Radius und Calotte beziehlich durch h, r und O vorgestellt seien:

$$1)\quad K = \frac{1}{3} h^2\pi(3r - h)$$

und wenn $r - h = r,$

$$2)\quad K = \frac{1}{3} h^2\pi(3r, + 2h)$$

in Beziehung auf 1)

$$O = \left(\frac{dK}{dh}\right) + \left(\frac{dK}{dr}\right) = 2hr\pi$$

und mit Rücksicht auf 2)

$$O = \frac{dK}{dh} = 2h(r, + h)\pi$$

Umgekehrt hat man:

$$K = \int_0^h O \cdot dh = \int_0^h 2h\pi(r, + h) \cdot dh$$

d. i, die Summe sämmtlicher concentrischen körperlichen Calotten in K.

Wollte man weder K noch O zur Berechnung von einer dieser 2 Grössen, z. B. von K, als bekannt voraussetzen, und dabei die Gleichung

$$3)\qquad dK = O \cdot dh$$

anwenden, so könnte die Elimination des O durch die unschwer zu findende Gleichung

$$4)\qquad K = \frac{1}{3}(r, + h)\, O - \frac{1}{3}\, r,\pi\,(2hr, + h^2)$$

Statt finden. Dadurch erhielte man die Differenzialgleichung:

$$5)\qquad dK = \frac{3K + hr,\pi\,(2r, + h)}{r, + h}\, dh$$

deren Integration sich leicht vollziehen lässt, sobald man durchgehends $\varkappa z$ für K gesetzt, und hierauf $\varkappa$ so genommen hat, dass

$$\varkappa dz - \frac{3\varkappa z}{r, + h}\, dh = 0$$

wird. Die Elimination des O aus 3) und der aus der Differenzirung der Gleichung 4) entspringenden Gleichung führt zu einer Differenzialgleichung, der sich das O ebenso entnehmen lässt, wie das K der Gleichung 5).

Treten die oben erwähnten günstigen Umstände nicht ein, dann dürfte freilich durch die blosse Anwendung jener 2 Lehrsätze wenig für die fraglichen Reduktionen gewonnen werden. Wir hofften bei der Anwendung auf das dreiachsige Ellipsoid und die Ellipse zu einem Integral in endlicher Form zu gelangen, trafen aber zuletzt auf die bekannten Schwierigkeiten. Da die Rechnung, die diese letztere Anwendung erfordert, einige nicht uninteressante Zwischenresultate enthält, so wollen wir dieselbe hier folgen lassen.

Es seien in Beziehung auf Ein rechtwinkliges Coordinatensystem

ξ, v, ζ die allgemeinen oder veränderlichen Coordinaten der Oberfläche O des Ellipsoides K, dessen 3 Axen in die Richtungen der Coordinatenaxen fallen.

$x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ die Coordinaten eines bestimmten Punktes P in O.

x_0, y_0, z_0 die laufenden Coordinaten der Normale zu O in P.

x, y, z die laufenden Coordinaten der zu O parallelen und von O um das unendlichkleine ε abstehenden Fläche $O_{,}$.

a, b, c die 3 halben Axen liegend in den Coordinatenaxen der x, y und z.

Nun ist bekanntlich

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\upsilon^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

die Gleichung von der Oberfläche O des Ellipsoides K; mithin sind die Gleichungen der Normale zu O in dem Punkt $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$:

$$x_0 - x_{,} = \left(\frac{dz_{,}}{dx_{,}}\right) [z_{,} - z_0] = -\frac{c^2 x_{,}}{a^2 z_{,}} (z_{,} - z_0)$$

$$y_0 - y_{,} = \left(\frac{dz_{,}}{dy_{,}}\right) [z_{,} - z_0] = -\frac{c^2 y_{,}}{b^2 z_{,}} (z_{,} - z_0)$$

Die Gleichung der zu O parallelen und von O um E entfernten Fläche $O_{,}$ geht offenbar aus der Elimination von $x_{,}$, $y_{,}$ und $z_{,}$ aus folgenden 4 Gleichungen hervor:

$$6)\quad x - x_{,} = \frac{c^2 x_{,}}{a^2 z_{,}} (z - z_{,})$$

$$7)\quad y - y_{,} = \frac{c^2 y_{,}}{b^2 z_{,}} (z - z_{,})$$

$$8)\quad \frac{x_{,}^2}{a^2} + \frac{y_{,}^2}{b^2} + \frac{z_{,}^2}{c^2} = 1$$

$$9)\quad (x - x_{,})^2 + (y - y_{,})^2 + (z - z_{,})^2 = \varepsilon^2$$

Setzen wir zum Zwecke dieser Elimination die Werthe für $x - x_{,}$ und $y - y_{,}$ aus 6) und 7) in 9), so ergibt sich, wenn wir n für $\sqrt{\frac{c^4 x_1^2}{a^4} + \frac{c^4 y_1^2}{b^4} + z_1^2}$ setzen:

$$10)\quad z - z_{,} = \frac{\varepsilon z_{,}}{n}$$

$$11)\quad x - x_{,} = \frac{\varepsilon c^2 x_{,}}{a^2 n}$$

$$12)\quad y - y_{,} = \frac{\varepsilon c^2 y_{,}}{b^2 n}$$

Ziehen wir nun die Werthe für $z_{,}$, $x_{,}$ und $y_{,}$ aus 10), 11) und 12) und setzen dieselben in 3), so finden wir:

$$\frac{n^2 z^2}{c^2(n + \varepsilon)^2} + \frac{b^2 n^2 y^2}{(c^2\varepsilon + b^2 n)^2} + \frac{a^2 n^2 x^2}{(c^2\varepsilon + a^2 n)^2} = 1$$

und hieraus bei Vernachlässigung der Glieder, die gegen ε verschwinden,

$$\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) n =$$

$$2c^2\varepsilon\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{1}{b^2}\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} - 1\right) + \frac{1}{a^2}\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right]$$

Der zweite Theil dieser Gleichung geht, wenn wir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = \varepsilon_0$$

setzen, in Folgenden über:

$$2c^2\varepsilon\left[\frac{1}{c^2}\left(\varepsilon_0 - \frac{z^2}{c^2}\right) + \frac{1}{b^2}\left(\varepsilon_0 - \frac{y^2}{b^2}\right) + \frac{1}{a^2}\left(\varepsilon_0 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right]$$

und dieses ist, da offenbar ε_0 eine ohne Ende abnehmende Grösse, mithin die den Faktör $\varepsilon\varepsilon_0$ enthaltenden Glieder vernachlässigt werden dürfen,

$$= -\,2c^2\varepsilon\left(\frac{z^2}{c^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}\right)$$

Man hat demnach die Gleichung:

$$\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) n = -\,2c^2\varepsilon\left(\frac{z^2}{c^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}\right)$$

(Schluss folgt.)