MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

№ 80. 1853.

Prof. Deschwanden. — Graphische Bestimmung des Ausflusses der Flüssigkeiten durch rechteckige Oeffnungen, und bei zweiseitiger Kontraktion.

(Fortsetzung.)

Es soll nun hier keineswegs versucht werden eine solche Rechnung auch nur angenähert durchzuführen; dagegen ist es nöthig einige Eigenschaften hervorzuheben, welche das Ergebniss einer solchen Rechnung, wie vorauszusehen, haben müsste.

Man betrachte zu diesem Zwecke zuerst die Kräfte welche auf einen einzelnen, etwa auf den Flüssigkeitsfaden $lml'm'$ wirken, sowie die virtuellen Momente derselben bei einer Verkleinerung des Wirbels.

Ist die mittlere Geschwindigkeit der ausfliessenden Flüssigkeit bei $lmm'l'$ gleich v', die Tiefe dieser Stelle unter $a a$, gleich h', die Geschwindigkeit bei $a a$, gleich v, und wird der äussere Luftdruck auf diese Fläche, da er auch auf die übrigen Grenzflächen der Flüssigkeit wirkt und sich gegenseitig aufhebt, vernachlässigt, so ist der mittlere Druck p' auf eine Flächeneinheit bei $lmm'l'$:

$$p' = s\left(h' - \frac{(v')^2 - v_1^2}{2g}\right).$$

Ist ferner die Druckhöhe, oder die Entfernung des Punktes b von aa, gleich H, mithin die Geschwindigkeit bei b nahe gleich $\sqrt{2gH}$, und setzt man: $v_{,} = \alpha\sqrt{2gH}$, $v' = \beta\sqrt{2gH}$, wo α und β gleich den Verhältnisszahlen einer Seite der bei b und einer Seite der bei aa, und lm liegenden Quadrätchen bezeichnen, so hat man auch:

$$p' = s(h' - (\beta^2 - \alpha^2)H).$$

Diese im Innern von lmm′l′ herrschende Pressung sucht die beiden Flächen lm und l′m′ von einander zu entfernen, und übt mithin stets ein positives virtuelles Moment aus, wenn lm und l′m′ sich von einander entfernen, dagegen aber ein negatives, wenn sie sich nähern. Das erste ist bei einer Verkleinerung, das zweite bei einer Vergrösserung des Wirbels der Fall. Ausserdem wirkt auf die Flüssigkeitsmasse lmm′l′ noch die Zentrifugalkraft:

$$k' = g'\frac{(v')^2}{gr'},$$

wo g' und r' das Gewicht der Maasse lmm′l′ und den mittleren Krümmungshalbmesser derselben bezeichnen, oder:

$$k' = s\gamma H,$$

wo γ ein von H unabhängiger Koeffizient ist. Diese Kraft übt ein positives virtuelles Moment aus, wenn sich die ganze Masse lmm′l′ der Ecke d nähert, also ebenfalls bei einer Verkleinerung des Wirbels, ein negatives dagegeu bei einer Vergrösserung desselben.

Das virtuelle Moment aller auf lmm′l′ wirkenden Kräfte ist daher bei einer Verkleinerung des Wirbels proportional mit dem Ausdrucke:

$$1) \qquad s(h' - (\beta^2 - \alpha^2 - \gamma)H).$$

Dieser Ausdruck ist aber zugleich auch der Summe der virtuellen Momente der auf alle Flüssigkeitsfäden wirkenden

Kräfte proportional, wenn man für h′ einen Mittelwerth der Grösse h′ aller derjenigen Stellen einführt, welche bei einer kleinen Veränderung des Wirbels auch noch eine merkliche Veränderung in ihrer Lage erleiden. Dieser Mittelwerth mag etwa der dem Punkte z zukommende Werth von h′ oder die senkrechte Entfernung des Punktes z von aa, sein. Da ferner der Ausdruck 1 bei einer Verkleinerung des Wirbels positiv, bei einer Vergrösserung desselben negativ ist, so suchen die Kräfte, auf die er sich bezieht, den Wirbel zusammenzudrücken.

Von den auf die Oberfläche teafgb wirkenden Pressungen übt nur der auf den Bogen fg wirkende Druck bei einer Veränderung des Wirbels ein virtuelles Moment aus, weil nur dieser Theil der Oberfläche sich bewegt. Liegt die Mitte des Bogens fg und h unter aa, , so ist der auf fg wirkende Druck angenähert proportional mit:

$$2) \quad s(h - (\delta^2 - \alpha^2)H$$

wo δ das Verhältniss einer Seite der bei b zu einer Seite der in der Mitte des Bogens fg liegenden Quadrätchen bezeichnet.

Das virtuelle Moment, welches dieser Grösse proportional ist, ist bei jeder Verkleinerung des Wirbels negativ, bei jeder Vergrösserung positiv. Die Kräfte, auf die es sich bezieht, suchen daher den Wirbel zu vergrössern.

Soll der Wirbel fgd seine Grösse unveränderlich beibehalten, so muss daher das dem Ausdrucke 1 proportionale Moment die gleiche absolute Grösse haben wie dasjenige, welches dem Ausdrucke 2 proportional ist; oder, was dasselbe ist: das Moment 1 derjenigen Kräfte, welche den Wirbel zusammenzudrücken suchen, muss gleich dem Momente 2 der Kräfte sein, die ihn auszudehnen streben.

Hieraus ergiebt sich nun mit Leichtigkeit der Einfluss der Druckhöhe und der Weite der Oeffnung auf die Grösse des Wirbels und der Kontraktion. Die Grössen α, β, γ, δ sind im Vergleich mit h' und h sehr klein. Ferners ist h' kleiner als h, indem der Punkt z stets näher bei aa' liegt als die Mitte des Bogens fg. Wird nun aa, um irgend eine Grösse, z. B. um ΔH, erhöht, so muss in den Ausdrücken 1 und 2 $h' + \Delta H$ und $h + \Delta H$ statt h' und h gesetzt werden. Dadurch nimmt aber der Ausdruck 1 in grösserem Verhältnisse zu als der Ausdruck 2, weil h' kleiner ist als h; es gewinnen also die Kräfte, welche den Wirbel zusammenzudrücken suchen, das Uebergewicht, und daher wird der Wirbel und zugleich auch der Kontraktionskoeffizient des ausfliessenden Strahles verkleinert. Fällt aa, tiefer hinunter, so geschieht das Gegentheil, der Wirbel und der Kontraktionskoeffizient vergrössern sich. Für grosse Druckhöhen wird also der Kontraktionskoeffizient kleiner, weil dann die Wirbel in den Ecken durch das Gewicht der Flüssigkeitsmasse mehr zusammengedrückt, und die ausfliessenden Flüssigkeitstheile mehr in die Ecken hineingedrängt und mithin mehr von ihrem geraden Wege abgelenkt werden; bei kleinen Druckhöhen werden sie dagegen etwas grösser, weil die Wirbel ein verhältnissmässig kleineres Gewicht zu tragen haben, sich daher vergrössern und die ausfliessenden Flüssigkeitstheilchen aus den Ecken des Gefässes gegen die Mitte desselben und in eine mehr geradlinige, mit dem mittleren Faden et parallele Bahn drängen. Im ersten Falle bildet daher die mittlere Richtung der von den Seiten her in die Ausflussöffnung eintretenden Flüssigkeitstheile einen grösseren Winkel mit der Mittellinie des Strahles, dieselben müssen mehr abgelenkt werden und veranlassen daher eine stärkere Kontraktion; im zweiten Falle bildet jene mittlere Richtung einen kleineren Winkel mit der Mittellinie et, es ist beim Austritt eine kleinere Ablenkung nöthig und erfolgt daher eine geringere Kontraktion.

Dies Alles darf nur nicht auf Druckhöhen angewendet werden, die im Verhältniss zur Weite der Oeffnung und des Gefässes ziemlich klein sind. Ist z. B. H kleiner als 4.bb,, so richten sich die austretenden Flüssigkeitsfäden nach andern Gesetzen, und das eben Gesagte gilt dann nicht mehr.

Die absolute Grösse bb, der Ausflussöffnung übt nicht durch die Grösse irgend einer Pressung, die von ihr abhängig wäre, sondern auf ganz andere Weise einen Einfluss auf die Grösse der Wirbel und der Kontraktion aus. In dem Ausdrucke 1 sind nämlich auch die Pressungen der Zentrifugalkräfte enthalten, welche die Flüssigkeitstheilchen in der Gegend von bb, wegen der starken Krümmungen ausüben, die hier vorkommen. Das virtuelle Moment dieser Pressungen ist aber bei einer kleinen Veränderung der Wirbel um so grösser, je grösser nicht nur die Pressungen selbst, sondern auch die Bewegungen ihrer Angriffspunkte sind. Nun entfernen sich die Flüssigkeitsfäden bei bc von der Mitte des Strahles jedesmal, wenn sich die Wirbel vergrössern, und die Pressungen der Zentrifugalkräfte üben alsdann ein negatives virtuelles Moment aus; die Fäden nähern sich dagegen der Mitte und die Zentrifugalkräfte üben ein positives Moment aus, wenn sich die Wirbel verkleinern; und diese Entfernungen oder Näherungen sind unter sonst gleichen Umständen proportional mit der Grösse bb, oder der Weite der Ausflussöffnung, indem die austretenden Flüssigkeitsstrahlen bei kleinen und grossen Oeffnungen genau oder nahezu geometrisch ähnliche

Figuren sind. Ist die Oeffnung gross, so üben daher die Zentrifugalkräfte bei $b b_{,}$ ein grosses, ist sie klein, so üben sie ein kleines virtuelles Moment und zwar in dem Sinne aus, dass sie die Wirbel zusammenzudrücken und mithin den Kontraktionskoeffizient zu verkleinern suchen. Da endlich die Flüssigkeitsfäden an den übrigen Stellen des Gefässes bei kleineren und grösseren Oeffnungen sehr nahe die gleiche Gestalt behalten, so lange wenigstens die Oeffnung im Verhältniss zur Weite des Gefässes klein ist, so verändern sich auch die Pressungen der Flüssigkeitsfäden und die Momente derselben bei einer Veränderung der Oeffnung an keiner anderen Stelle wesentlich als bei $b b_{,}$. Sowie die Oeffnung grösser wird, nehmen daher die Momente der Kräfte, welche die Wirbel zusammenzudrücken suchen, zu, die Wirbel selbst und hiermit auch die Kontraktionskoeffizienten werden verkleinert; wird dagegen die Oeffnung kleiner, so nehmen die virtuellen Momente der Kräfte, welche die Wirbel zusammenzupressen suchen, ab, die Wirbel dehnen sich mehr aus, der Strahl kontrahirt sich weniger und der Kontraktionskoeffizient wird daher grösser. Diese Unterschiede in den Kontraktionskoeffizienten werden freilich nicht bedeutend sein können, da auch die bei $b b_{,}$ wirkenden Kräfte nur einen kleinen Theil aller derjenigen Kräfte ausmachen, welche auf die Grösse der Wirbel und der Kontraktion einen Einfluss ausüben.

Diese Ergebnisse stimmen bekanntlich mit den durch die Erfahrung gewonnenen überein, was ein Blick auf die von Poncelet und Lesbros entworfene Tafel der Kontraktionskoeffizienten bestätigt.

Es kann daher, mit Rücksicht auf die in Nr. 4 angegebenen Grenzen der Kontraktionskoeffizienten für Oeffnungen, deren Weite kleiner als $1/4$ der Gefässweite ist, zufolge den eben angestellten Betrachtungen, nun der Satz aufgestellt werden: bei grossen Druckhöhen und kleinen Oeffnungen werden die Kontraktionskoeffizienten kleiner und können bis auf 0,617 heruntersinken; bei kleinen Druckhöhen und kleinen Oeffnungen werden sie dagegen grösser, und können bis auf 0,679 hinaufsteigen. Welcher zwischen diesen Grenzen liegende Koeffizient aber einer bestimmten gegebenen Druckhöhe und Oeffnung entspreche, kann aus den oben angestellten Betrachtungen nicht entnommen werden.

Ausser der Druckhöhe und der Grösse der Ausflussöffnung giebt es noch einige Umstände, welche einen kleinen Einfluss auf den Kontraktionskoeffizienten ausüben.

Wenn der äussere Druck, der auf den ausfliessenden Strahl einwirkt, grösser oder kleiner ist als der auf den Flüssigkeitsspiegel aa, wirkende Druck, so wird im ersten Falle die Summe der den Wirbel zusammenpressenden virtuellen Momente vermehrt, im zweiten Falle vermindert; im ersten Falle müsste daher eine kleine Verminderung, im zweiten eine kleine Vergrösserung des Kontraktionskoeffizienten erfolgen. Eine Verminderung des Koeffizienten muss daher eintreten, wenn z. B. die Flüssigkeit nicht in die freie Luft, sondern unter einem anderen Flüssigkeitsspiegel, eine Vermehrung dagegen, wenn sie in einem luftverdünnten Raume ausfliessen würde. Das erste haben die Erfahrungen von Weisbach bestätigt.

Ferner kann der Kontraktionskoeffizient nicht ganz unabhängig von der Länge b s des austretenden Flüssigkeitsstrahles sein. Wäre er sehr kurz, so würde die in seiner untern Hälfte wirkende Zentrifugalkraft, welche Strahl und Wirbel zusammenzudrücken sucht, wegfallen, und der Kontraktionskoeffizient müsste sich daher etwas vergrössern. Da übrigens hierbei auch die Art, wie der Strahl aufgefangen würde, einen gewissen Einfluss ausüben müsste, so könnte hierüber nur durch umständlichere Betrachtungen ein reines Ergebniss erhalten werden.

7. Ausfluss aus Oeffnungen, welche an einer beliebigen Stelle des Gefässbodens oder in einer Seitenwand sind.

Die Verzeichnungsart der Flüssigkeitsfäden stützt sich in diesen Fällen auf die ganz gleichen Grundsätze wie in den früher behandelten Fällen, und soll daher auch nicht mehr näher beschrieben werden. Dagegen sollen die wichtigsten Ergebnisse jener Verzeichnung kurz zusammengestellt werden.

Wenn die Oeffnung im Boden des Gefässes bleibt, aber näher bei der einen als bei der anderen Seitenwand liegt, so verliert die ganze ausfliessende Masse ihre symetrische Gestalt. Die in den Ecken befindlichen Wirbel erhalten eine ungleiche Grösse, der austretende Flüssigkeitsstrahl ist auf der Seite, welche der, näher bei der Oeffnung liegenden, Seitenwand gegenübersteht, weniger stark kontrahirt als auf der entgegengesetzten Seite, und der mittlere Flüssigkeitsfaden ist nach seinem Austritte aus der Oeffnung nicht mehr senkrecht zur Ebene des Gefässbodens gerichtet, sondern neigt sich etwas gegen diejenige der beiden Seitenwände, welche näher bei der Oeffnung liegt. Alle diese Abweichungen von der symetrischen Gestalt werden um so grösser, je weiter sich die Oeffnung aus ihrer mittleren Stellung entfernt und einer Seitenwand nähert.

Fällt der eine Rand der Oeffnung mit einer Seitenwand vollständig zusammen, so erreichen diese Abweichungen das höchste Mass. An der einen Seitenwand, nämlich an derjenigen, welche durch den einen Rand der Oeffnung geht, fallen alsdann Wirbel und Kontraktion beinahe ganz weg. In der an der anderen Seitenwand anliegenden Ecke entsteht dagegen ein Wirbel, der, ähnlich wie die in den früher behandelten Fällen vorkommenden Wirbel, bei kleinen Druckhöhen grösser und bei grossen Druckhöhen kleiner ist. Bei sehr grossen Druckhöhen verschwindet der Wirbel auch hier vollständig. Der austretende Strahl erleidet nur auf der Seite der Oeffnung eine bedeutende Kontraktion, welche nicht mit der einen Gefässwand zusammenfällt, wird aber durch die Zentrifugalkraft der auf dieser Seite ausströmenden Flüssigkeitstheilchen etwas auf die entgegengesetzte Seite oder nach jener Wand hingedrängt, welche durch den einen Rand der Oeffnung geht. Die ganze Kontraktion des Strahles ist jetzt etwas kleiner als unter gleichen Umständen beim Ausflusse aus einer in der Mitte des Gefässbodens befindlichen Oeffnung.

Für den Fall einer grossen Druckhöhe, wo der Wirbel in der einen Ecke des Gefässes ganz verschwindet und die Kontraktion mithin am grössten wird, ergiebt die Zeichnung folgende Ziffern:

kleinster Kontraktionskoeffizient 0,670
Abweichung des Strahles von der Senkrechten 20°

Beides, sowohl die Zunahme des Kontraktionskoeffizienten im Vergleiche mit demjenigen, der für in der Mitte des Bodens befindliche Oeffnungen gültig ist, als die Abweichung der Richtung des Strahles von der Senkrechten, wird durch die hierüber angestellten Erfahrungen bestätiget.

Bringt man die Oeffnung gar nicht mehr im Boden, sondern am untersten Rande der einen Seitenwand an, so dass ein Rand der Oeffnung mit dem Gefässboden zusammenfällt, so verändert sich die Gestalt der Flüssigkeitsfäden im Inneren des Gefässes, mit Ausnahme der nächsten Umgebungen der Oeffnung, nur wenig. Der austretende Strahl dagegen erhält jetzt eine mit der Verlängerung des Bodens fast parallele Richtung, indem sein mittlerer Flüssigkeitsfaden nur um einen kleinen Winkel in dem Sinne von dieser Verlängerung abweicht, dass er sich von den Flüssigkeitsspiegel etwas ab- und dagegen der Richtung zuwendet, die er bei den im Boden angebrachten Oeffnungen hat. Bei senkrecht stehendem Gefäss und horizontalem Boden neigt sich also der Strahl etwas abwärts. Eine Kontraktion in bedeutendem Maasse findet bei dem Rande der Oeffnung statt, welche nicht mit dem Gefässboden zusammenfällt.

Die wichtigsten durch die Zeichnung gewonnenen Maasse für den Fall, dass kein Wirbel entsteht, sind:

kleinster Kontraktionskoeffizient 0,670

Abweichung des Strahles von der Horizontalen 15°

Rückt man die Ausflussöffnung weiter in die Seitenwand hinauf, wie in Fig. 8 und 9, so wird die Gestalt der Flüssigkeitsfäden im Innern des Gefässes bedeutend verändert. Bei sehr grosser Druckhöhe entstehen an keiner Stelle Wirbel, sondern die Flüssigkeitsfäden, welche durch die Oeffnung austreten, füllen auch die Ecken dd, Fig. 8 des Gefässes vollständig aus, und zwar wenn die Tiefe bd des unter der Oeffnung liegenden Theiles des Gefässes auch noch so gross ist. Freilich ist dann die Bewegung in der Nähe des Bodens dd,, und bis ziemlich nahe unter b hinauf nur sehr unbedeutend, und zwar um so kleiner, je tiefer das Gefäss unter der Oeffnung noch ist. Man erkennt diess aus Fig. 8, wo die Zerlegung in Quadrate in der Nähe von a,d,db weiter fort-

Fig. 8.

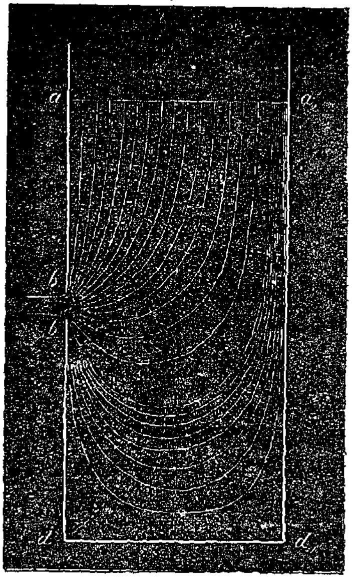
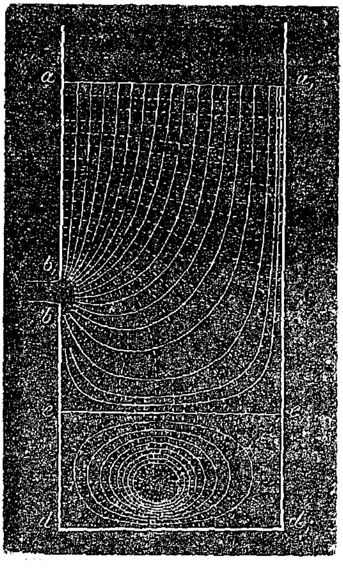


Fig. 9.



gesetzt ist als im Innern des Gefässes. Bei grossen Druckhöhen fliesst also alle im Gefässe enthaltene Flüssigkeit aus, die unter der Oeffnung befindliche aber nur sehr langsam, indem sie an der, der Oeffnung gegenüber liegenden Wand aa_1 abwärts steigt, über den Boden sehr langsam hingleitet und von d an allmälig gegen die Oeffnung b hinaufsteigt. Ist die Tiefe bd des Gefässes unter der Oeffnung gross im Verhältniss zur Weite aa_1, so ist die Bewegung bei dd_1 beinahe Null.

Nimmt die Druckhöhe etwas ab, so entstehen in den Ecken d und d_1 Wirbel, welche den ganz gleichen Gesetzen unterworfen sind, wie die bei den Fig. 5_a und 5 beschriebenen Wirbel. Ist die Druckhöhe so klein geworden, dass die inneren Endpunkte dieser Wirbel nicht mehr sehr weit von einander entfernt sind, so tritt ein einziger Wirbel, aber von anderer Art, wie in Fig. 9 dargestellt ist, an die Stelle jener beiden, indem derselbe eine ganze, rechteckige Abtheilung der unteren Hälfte des Gefässes ausfüllt. In diesem Falle fliesst also der in edd_1e_1 enthaltene Theil der flüssigen Masse gar nicht mehr aus, sondern bleibt immer an dieser Stelle und wirbelt an derselben herum, während die übrige Flüssigkeit über ihn weg zur Ausflussöffnung strömt und durch die Reibung seine wirbelnde Bewegung fortwährend erhält.

Nimmt die Druckhöhe immer noch ab, nachdem schon ein Wirbel dieser Art entstanden ist, so verändert sich nun nichts mehr als die Höhe ed, e_1d_1 des Wirbels. Je kleiner nämlich die Druckhöhe wird um so grösser wird diese Höhe, bis endlich bei sehr kleiner Druckhöhe die Linie ee_1 dem Rande b der Oeffnung sich bis auf eine ziemlich geringe Entfernung nähert.

Würde sich die Bewegung des Wirbels genau nach den gleichen Gesetzen richten wie die Bewegung der ausfliessenden Flüssigkeitsmasse, so würde bei Oeffnungen, die nicht grösser als etwa $1/6$ der Gefässweite wären, die kleinst mögliche Höhe ed, e,d, des Wirbels etwa zwischen $1/2$ und $1/3$ von der Weite dd, liegen, und die grösst mögliche Höhe so gross sein, dass die obere Grenze ee, des Wirbels ebenfalls noch etwa um $1/2$ oder $1/3$ der Weite dd, des Gefässes unter dem untern Rande b der Oeffnung zurückbliebe. Da aber die Bewegung des Wirbels namentlich in seinem Innern wahrscheinlich etwas verschiedenen Gesetzen unterworfen ist als die ausfliessende Flüssigkeit, so können diese Maasse nicht als genau richtig angenommen werden, und es ist nicht unwahrscheinlich, dass namentlich die obere Grenzlinie ee, bei sehr kleinen Druckhöhen noch näher an den Rand b der Ausflussöffnung hinaufsteigen kann.

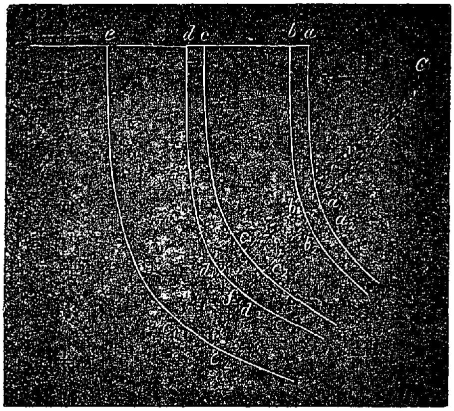
Man sieht hieraus leicht, dass ein Wirbel von der jetzt beschriebenen Art nur dann gebildet werden kann, wenn die Tiefe bd des unter der Oeffnung liegenden Theiles des Gefässes eine gewisse Grösse erreicht hat. Wären obige Maasse für die Höhe ed und die Grösse be richtig, so könnte ein solcher Wirbel nur dann entstehen, wenn bd mindestens $2/3$ bis 1 Mal gleich der Weite dd, des Gefässes wäre.

Auch das hier Gesagte gilt nur so lange, als die Druckhöhe nicht viel unter die Gefässweite aa, heruntersinkt. Wird sie kleiner als diese Höhe, so richtet sich der Ausfluss nach etwas anderen Gesetzen.

8. Uebersichtlicher Beweis des Satzes der Zerlegung einer bewegten flüssigen Masse in quadratische Prismen.

Es mag nun am Schlusse dieser Abtheilung hydraulischer Betrachtungen kurz und übersichtlich das angeführt werden, was füglicher am Anfange derselben hätte stehen sollen, nämlich der Beweis des genannten, und allen jenen Betrachtungen zu Grunde liegenden Satzes, der früher nie in seinem Zusammenhange, sondern nur in einzelnen getrennten Theilen abgedruckt wurde. aae_2a_2 Fig. 10 stelle einen ebenen Schnitt vor, der durch eine

Fig. 10.



bewegte flüssige Masse geführt werden kann; ea sei der Flüssigkeitsspiegel, von welchem die flüssige Masse ausgeht, aa_2, bb_2 und cc_2, dd_2 seien zwei Flüssigkeitsfäden oder solche Räume, die von zwei durch den Spiegel ae gehenden Flüssigkeitstheilchen während ihrer Bewegung beschrieben werden. a_ie_i und a_2e_2 seien zwei Normallinien, oder die Schnitte zweier unendlich nahe bei einander liegenden Normalflächen, d. h. solcher Flächen, welche sämmtliche Flüssigkeitsfäden normal schneiden. Es wird dabei vorausgesetzt, dass alle Flüssigkeitsfäden ebene Kurven seien, und dass der hier dargestellte Schnitt durch die Ebenen der Flüssigkeitsfäden aa_2, bb_2 und cc_2, dd_2 gehe. Es seien ferner die Querschnitte aller Flüssigkeitsfäden in ae gleich gross und sollen mit $dq_{,}$, der Druck auf die Flächeneinheit von $aa_{,}$ soll mit $p_{,}$, die Geschwindigkeit der Flüssigkeit mit $v_{,}$, und dieselben Grössen bei $a_{,}$ und $c_{,}$ sollen mit dq, p und v, und mit dq', p' und v' bezeichnet werden.

Soll nun unter diesen Voraussetzungen die Gestalt und Grösse der Flüssigkeitsfäden bestimmt werden, so ist auch ohne genauere Rechnung wahrscheinlich, dass zwischen der Breite $c_{,}d_{,}$ und dem Längenstücke $c_{,}c_2$ eines beliebigen Flüssigkeitsfadens irgend eine Abhängigkeit wird stattfinden müssen. Um dieselbe aber genau aufzufinden hat man zufolge den gewöhnlichen Gesetzen der Hydraulik:

$$1)\qquad \frac{dq'}{dq} = \frac{v}{v'}$$

Bezeichnet man mit s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, mit h' den senkrechten Abstand des Punktes $c_{,}$ von ae, und mit $v' + dv'$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Punkte $d_{,}$, so hat man ferner zur Bestimmung von $\frac{v}{v'}$:

$$s\,\frac{(v')^2 - v_1^2}{2g} = sh' + p_{,} - p'.$$

und erhält hieraus durch Differenzirung:

$$s\,\frac{v'dv'}{g} = sdh' - dp'.$$

Die Grösse dp', welche den Unterschied der bei $c_{,}$ und $d_{,}$ herrschenden Pressungen ausdrückt, besteht aus zwei Theilen: erstlich aus dem von dem Gewichte der Flüssigkeit herkommenden Theile, welcher gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule ist, deren Höhe dem senkrechten Höhenabstande der beiden Punkte $c_{,}$ und $d_{,}$, also der Grösse dh' gleichkömmt, und mithin durch sdh'

ausgedrückt werden kann, und zweitens aus dem Theile, welcher von der Zentrifugalkraft der zwischen $c_,$ und $d_,$ durchgehenden Flüssigkeitstheilchen herkömmt, und welcher, wenn der Krümmungshalbmesser $c_,l$ von $c_,c_2$ gleich r ist, durch $s\frac{(v')^2}{gr}c_,d_,$ ausgedrückt werden kann. Setzt man nun noch $a_,d_, = b'$ und daher $c_,d_, = db'$, so hat man daher:

$$dp' = sdh' + s\frac{(v')^2}{gr}db'.$$

Führt man diesen Werth in obige Differenzialgleichung ein, so erhält man leicht:

$$\frac{dv'}{v'} = -\frac{db'}{r}.$$

und durch Integrirung:

$$2)\qquad \log\frac{v}{v'} = \int_0^{b'}\frac{db'}{r}.$$

Bezeichnet man ferner $cc_,$ mit l', $aa_,$ mit l, und daher cc_2 und $a_,a_2$ mit dl' und dl, und zieht c_2f parallel mit $c_,d_,$, so kann man $d_,f = c_,c_2$ setzen und fd_2 als das Differentiale von $c_,c_2$ oder dl' ansehen, und mithin $fd_2 = d^2l'$ annehmen. Man hat daher wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke c_2fd_2 und $Cc_,c_2$:

$$\frac{fd_2}{c_,c_2} = \frac{c_2f}{c_,C},$$

oder:

$$\frac{d_2l_,}{dl_,} = \frac{db_,}{r},$$

woraus durch Integration erhalten wird:

$$3)\qquad \log\frac{dl'}{dl} = \int_0^{b'}\frac{db'}{r}.$$

(Schluss folgt.)