MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

№ 79. 1853.

Prof. Deschwanden. — Graphische Bestimmung des Ausflusses der Flüssigkeiten durch rechteckige Oeffnungen, und bei zweiseitiger Kontraktion.

(Fortsetzung der in Nr. 70 und 71 mitgetheilten hydraul. Betrachtungen.)

4. Genauere Bestimmung der Bewegung der in den Ecken des Gefässes befindlichen Flüssigkeitstheile.

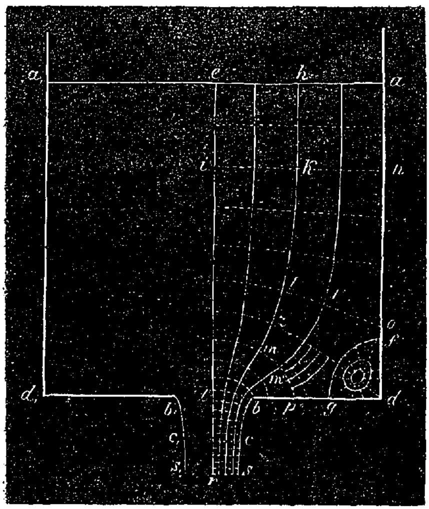
In den Nr. 2 und 3 dieses Aufsatzes wurde stets vorausgesetzt, die Bewegung der in den Ecken d und d, Fig. 2, 3 und 4 enthaltenen Flüssigkeit könne unberücksichtigt gelassen werden, und die Geschwindigkeit des äussersten Flüssigkeitsfadens a s l k b sei daher überall zwischen a und k gleich gross. Unter dieser Annahme erhielt man auch durch die graphische Bestimmungsweise der Bewegung der ausfliessenden Flüssigkeit Ergebnisse, welche mit den mittleren Ergebnissen der Erfahrung auf befriedigende Weise übereinstimmten. Nun ist aber bekannt, dass jene Bewegungen, und namentlich die Ausfluss- und Kontraktionskoeffizienten bei verschiedener absoluter Grösse der Ausflussöffnung, sowie bei verschiedenem senkrechtem Abstande der Ausflussöffnung vom

Flüssigkeitsspiegel etwas verschieden sind. Soll die Konstruktion auch diese Verschiedenheiten ergeben, so darf man sich jene nur angenähert richtige Voraussetzung nicht mehr erlauben, sondern muss auf die Bewegung der in den Ecken d und d, befindlichen Flüssigkeit sehr sorgfältig Rücksicht nehmen.

Um bei der Bestimmung der Bewegung ausfliessender Flüssigkeiten diesen grösseren Anforderungen so gut als möglich zu entsprechen, muss beachtet werden, dass diejenigen in der Ecke d und d, befindlichen Flüssigkeitstheilchen, welche den äussersten Flüssigkeitsfaden aslk unmittelbar berühren, jedenfalls nahezu die gleiche Bewegung haben, wie dieser Faden selbst, indem sie von demselben durch die Reibung der Flüssigkeitstheilchen an einander mit fortgerissen werden. Würde man die Reibung der Flüssigkeit an den Seitenwänden des Gefässes berücksichtigen, so müsste wohl die Geschwindigkeit des Fadens etwas grösser als die der genannten Flüssigkeitstheilchen angenommen werden; da aber diese Reibung unberücksichtigt bleibt, so ist die Annahme der Gleichheit jener beiden Bewegungen zulässig. Ferner soll angenommen werden, die Bewegung der in den Ecken d und d, befindlichen Flüssigkeit richte sich genau nach denselben Gesetzen wie die Bewegung der übrigen, im Gefässe enthaltenen flüssigen Masse. Diese Annahme kommt der Wahrheit vielleicht weniger nahe als die vorige, weil die Flüssigkeitsfäden der in den Ecken befindlichen Massen nicht von einem gemeinschaftlichen Flüssigkeitsspiegel ausgehen, was bei Feststellung des Gesetzes der Zerlegung einer flüssigen Masse in quadratische Prismen doch vorausgesetzt wurde. Allein es wird in der folgenden Nummer dieses Aufsatzes darauf hingewiesen werden, warum diese, von der Wahrheit abweichende Annahme auf das Ergebniss dieser Untersuchungen keinen, oder nur einen sehr untergeordneten Einfluss hat.

Die graphische Aufgabe welche nun zu lösen ist, besteht mithin darin: die Flüssigkeitsfäden und Normalflächen der ganzen in einem Gefässe enthaltenen Flüssigkeitsmasse, sowohl der ausfliessenden als der zurückbleibenden, so zu verzeichnen, dass sie ein ununterbrochen zusammenhängendes Quadratnetz bilden. Die Auflösung dieser Aufgabe, sowie die Ergebnisse dieser Auflösung sollen nun mit Bezug auf den Fall näher besprochen werden, in welchem die Flüssigkeit durch eine Oeffnung ausfliesst, welche in der Mitte des Gefässbodens angebracht ist, und wobei mit Bezug auf Druckhöhe, Art des Zuflusses der Flüssigkeit in das Gefäss u. s. w. die gleichen Voraussetzungen wie in Nr. 2 dieses Aufsatzes gemacht werden.

Fig. 5.



Ist a d d,a, Fig. 5 das Gefäss, b b, die in demselben befindliche Oeffnung, und a a, der Flüssigkeitsspiegel, so ziehe man zuerst den mittleren Flüssigkeitsfaden e t, der auch hier, wie in den früher behandelten Fällen, geradlinig ist. Der durch a gehende äusserste Flüssigkeitsfaden fängt nun aber nicht schon in der Nähe des Punktes a an sich von der Wand a d zu entfernen, sondern schliesst sich vielmehr genau an dieselbe an, bis er beim äussersten Flüssigkeitsfaden f g des in der Ecke d entstehenden Wirbels f g d angekommen ist. In diesem Punkte f entfernt er sich von der Wand a d, aber nicht allmälig, sondern, wie in der folgenden Nr. nachgewiesen werden soll, plötzlich, und zwar unter einem Winkel von 90°; geht dann in einem Bogen f g bis nach g über, wo er die Bodenwand wieder rechtwinklig trifft, und schliesst sich von da bis b wiederum genau an den Boden an, um bei b aus dem Gefässe auszutreten. Die an diesen äussersten Flüssigkeitsfaden a f g d anstossenden Quadrate brauchen jetzt keineswegs, wie bei den in Nr. 2 und 3 gemachten Voraussetzungen, gleich gross zu sein, sondern können jede beliebige Grösse haben, weil auch die Gefässwände, an denen der Faden von a bis f und von g bis b anliegt, jeden beliebigen Druck auf die Flüssigkeit ausüben können. Nur auf dem Bogen f g sind die Quadrate an die Bedingung gebunden, gleiche Grösse mit den äussersten Quadraten des Wirbels f g d zu besitzen, weil der äusserste Flüssigkeitsfaden f g des Wirbels zwischen f und g überall die gleiche Geschwindigkeit besitzen muss, wie der an ihm anliegende äusserste Faden f g der ausfliessenden Flüssigkeit. Ausserdem müssen die zwischen b und c liegenden Quadrate aus denselben Gründen, wie in Nr. 2 und 3, gleich gross sein. Die zwischen a und e durchgehenden übrigen Flüssigkeitsfäden setzen sich alle ununterbrochen bis zur Oeffnung hin fort und treten dort aus dem Gefässe heraus; die in dem Eckraume fgd enthaltenen Flüssigkeitsfäden treten dagegen nicht aus diesem Raume heraus, sondern sind, da sie einem Wirbel angehören, ringförmig geschlossen.

Um unter diesen Umständen die gestellte graphische Aufgabe zu lösen, verfahre man ganz ähnlich wie bei der Ausführung der in Fig. 1 bis 4 dargestellten Quadratnetze. Um sogleich mit dem Netze zweiter Ordnung zu beginnen nehme man daher den Punkt h Fig. 5 mitten zwischen e und a an, und führe durch denselben nach dem Augenmasse den Flüssigkeitsfaden hlm, ziehe alsdann die Normallinie ikn u. s. w. so, dass sie zwischen et und hm Bogenquadrate eikh u. s. w. abschneiden, und sehe nun zu, ob auch die zwischen hlm und adb hierdurch entstehenden Figuren ahkn u. s. w. Bogenquadrate seien. Ist dies der Fall, so ist das Netz richtig; trifft es dagegen nicht ein, so müssen hlm, ikn u. s. w. so lange abgeändert werden, bis auch die Figuren hank u. s. w. Bogenquadrate sind.

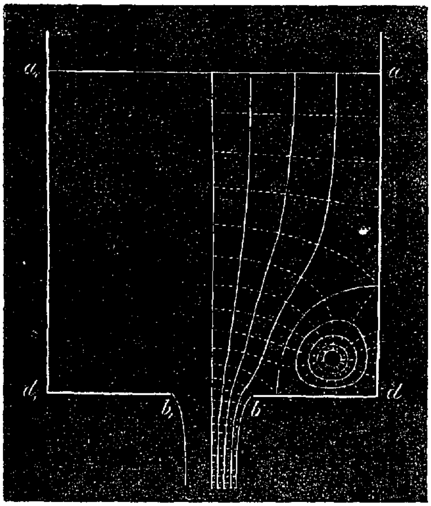
Die Entscheidung, ob eine Figur wie hauk ein Bogenquadrat sei oder nicht, ist nach der früher gegebenen Anleitung dazu leicht angenähert zu geben. Dagegen ist bei den in der Ecke d liegenden Figuren, wie hier bei olmpd, einige Vorsicht nöthig. Man darf sich nämlich nicht etwa dadurch irre machen lassen, dass die Figur ein Fünfeck statt eines Viereckes ist; denn es lassen sich, wie das an gp angrenzende Stück dieser Figur selbst, sowie die Gegend um d Fig. 6 zeigen, auch solche Figuren durch Flüssigkeitsfäden und Normallinien in Quadrate zerlegen. Diese Zerlegung kann man sich ferner bis ins Unendliche fortgesetzt denken, wobei dann die beiden einzigen, bei f liegenden, spitzwinkligen Viereckchen, die bei jeder weiteren Zerlegung übrig bleiben, endlich gegen alle quadratische Figuren unendlich klein werden und vernachlässigt werden können. Sobald daher eine solche Zerlegung ausgeführt werden kann, ist die Figur als ein Bogenquadrat anzusehen.

Um diese Zerlegung, nachdem einmal die Linien hlm, lo, mp gezogen sind, möglich zu machen, muss dem Bogen fg, der an keine weiteren Bedingungen geknüpft ist, eine passende Grösse gegeben werden. Kann man keine Grösse desselben finden, bei welcher die Figur olmpd in Quadrate zerlegbar ist, so muss die ganze Linie hlm, und daher auch in, lo, mp u. s. w. verändert werden. Durch einige Versuche wird man auf diese Weise die angenähert richtige Gestalt der Linien hlm und fg finden.

Auf ähnliche Weise ist das Quadratnetz dritter Ordnung, sowie die Zerlegung des Wirbels in seine Quadrate auszuführen.

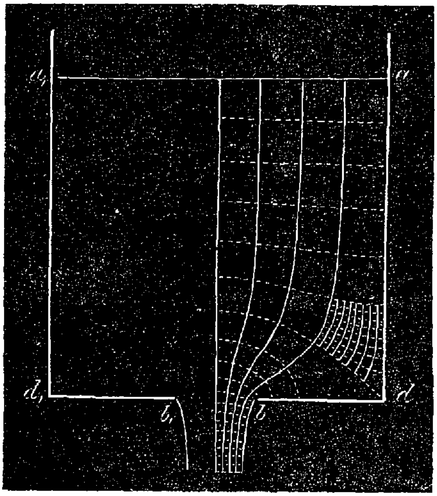
An den durch diese Operation erhaltenen Ergebnissen ist nun vor Allem das hervorzuheben, dass sie nicht nur auf eine, sondern auf unendlich viele Auflösungen der gestellten Aufgabe führen, indem unendlich viele richtige Quadratnetze gezeichnet werden können, welche den oben aufgestellten Bedingungen entsprechen. Es zeigt sich nämlich, dass für sehr verschiedene Gestalten der Linie hlm und der übrigen austretenden Flüssigkeitsfäden richtige Quadratnetze gezeichnet werden können, sobald man nur dem Wirbel fgd verschiedene Grössen ertheilt. Ist hlm von h bis l beinahe geradlinig und wendet sich dann über m in einem ziemlich scharf gekrümmten Bogen gegen die Oeffnung, so wird jener Wirbel klein; nähert sich dagegen hlm schon bei l ziemlich stark der Mittellinie et, so wird derselbe gross. Der Wirbel

Fig. 5a.



wird bei verschiedenen Annahmen dieser Art alle Werthe annehmen, die zwischen Null, wo f und g mit d zusam-

Fig. 6.



menfallen, und zwischen dem Werthe liegen, den er bekömmt wenn g bis in die Nähe des Randes b der Oeffnung gelangt. Der erste Fall wird durch Fig. 6, der zweite durch Fig. 5_a dargestellt. Bis nach b selbst kann g nicht kommen, indem dann das Quadratnetz des Wirbels nicht mehr möglich wäre. Die Bewegung der Flüssigkeit im Innern des Gefässes wird der Richtung und Geschwindigkeit nach durch das Quadratnetz angegeben, woraus man sieht, dass die Geschwindigkeit um so kleiner wird, je mehr man sich einer der Ecken f, g oder d nähert, und dass sie in diesen Ecken selbst, wie aus der Figur leicht nachzuweisen ist, endlich in den Werth Null übergeht. Man hat also auch in dem Falle, in welchem, wie in Fig. 6, kein Wirbel in der Ecke d entsteht, doch eine kleine, unbewegliche, nicht ausfliessende Flüssigkeitsmasse in derselben.

Die verschiedenen Bewegungen, welche die Flüssigkeitstheilchen im Innern des Gefässes annehmen können, bewirken ferner auch, dass der aus dem Gefässe heraustretende Flüssigkeitsstrahl verschiedene Gestalten annehmen, und daher namentlich auch die Kontraktion verschiedene Werthe erhalten kann. In der That zeigt eine in grossem Massstabe ausgeführte Konstruktion sogleich, dass die Breite cc, des Strahles um so grösser wird, je grösser der Wirbel fg, und um so kleiner, je kleiner dieser Wirbel ist, und dass mithin der Kontraktionskoeffizient gleichzeitig mit dem Wirbel zu- und abnimmt. Dass dieses Verhältniss zwischen dem Kontraktionskoeffizienten und dem Wirbel bestehen muss, ergiebt sich schon aus folgender Betrachtung. Wird der Wirbel gross, so werden die neben ihm vorbeigleitenden Flüssigkeitstheilchen im Innern des Gefässes allmälig nach der Oeffnung hingelenkt, ähnlich wie wenn das Gefäss selbst nach der Oeffnung hin allmälig enger und enger würde. Hierdurch erhalten die Flüssigkeitstheilchen in dem Augenblicke, da sie vor der Oeffnung bb, ankommen, schon nahezu die Richtung der mittleren Linie et, und bewirken daher bei ihrem Austritte nur eine kleine Kontraktion. Ist dagegen nur ein kleiner oder gar kein Wirbel vorhanden, so treffen die nahe über den Gefässboden hingleitenden Flüssigkeitstheilchen in beinahe senkrechter Richtung zu et bei der Oeffnung ein, müssen bei ihrem Austritte viel stärker abgelenkt werden als im ersten Falle, und veranlassen daher eine stärkere Kontraktion. Dem grössten Wirbel entspricht daher auch der grösste, dem kleinsten der kleinste Kontraktionskoeffizient.

Die genauere Zeichnung ergiebt nun für die äussersten Fälle folgende Werthe der Kontraktionskoeffizienten.

Wenn die Weite bb, der Oeffnung kleiner als $\frac{1}{4}$ von der Weite aa, des Gefässes ist, so ist:

der grösste Kontraktionskoeff. = 0,679,
der kleinste Kontraktionskoeff. = 0,617.

Wenn die Weite bb, der Oeffnung die Hälfte der Weite aa, des Gefässes beträgt, so ist:

der grösste Kontraktionskoeff. = 0,693,
der kleinste Kontraktionskoeff. = 0,645.

Man sieht, dass die Unterschiede zwischen den Koeffizienten bei grossem Wirbel und ohne Wirbel zwar nicht gross, allein dennoch sehr entschieden sind. Es ist nun nöthig, die Umstände anzuführen, von denen die Grösse der Wirbel und mit ihnen die der Koeffizienten abhängig ist. Zuvor muss jedoch das Wichtigste über die Natur der Wirbel selbst angeführt werden.

5. Die Wirbel.

Die verschiedenen in den Flüssigkeiten entstehenden Wirbel haben das mit einander gemein, dass ihre Flüssigkeitsfäden ringförmige, geschlossene Figuren bilden; unterscheiden sich dagegen dadurch von einander, dass sich bei ihnen die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen vom Mittelpunkte der Wirbel nach der Peripherie hin nach verschiedenen Gesetzen ändert. Es können Wirbel entstehen, bei denen sich die in der Nähe des Mittelpunktes befindlichen Theile am langsamsten und die übrigen in demselben Verhältnisse schneller bewegen, je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind. Bei andern Wirbeln bewegen sich im Gegentheile die näher am Mittelpunkte liegenden Theile schneller als die in der Nähe der Peripherie befindlichen. Hatten z. B. die im Wirbel enthaltenen Flüssigkeitstheilchen, bevor sie einen Wirbel bildeten, eine parallele und geradlinige Bewegung mit gleicher Geschwindigkeit, wie die durch die Normalfläche aa, fliessenden Theile, so wird sich die Geschwindigkeit dieser Theilchen, nachdem sie durch irgend einen Umstand genöthigt worden sind einen Wirbel zu bilden, nach den gleichen Gesetzen richten, welche bei den bisher angestellten Betrachtungen stets als gültig angenommen worden sind. Vermöge des Druckes, den die nahe beim Mittelpunkte liegenden Theilchen dieser Wirbel durch ihre Zentrifugalkraft auf die näher bei der Peripherie liegenden ausüben, werden die letzteren eine um so kleinere Geschwindigkeit haben, je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind. Denkt man sich, diese Wirbel haben, parallel mit ihrer Drehungsaxe gemessen, überall die gleiche Höhe, so müssen sich daher ihre Projektionen, die man auf eine zur Drehungsaxe senkrecht stehenden Ebene bringen kann, durch Flüssigkeitsfäden und Normallinien ebenso in lauter unendlichkleine Quadrate zerlegen lassen, wie die Projektionen der bisher betrachteten bewegten Flüssigkeitsmassen.

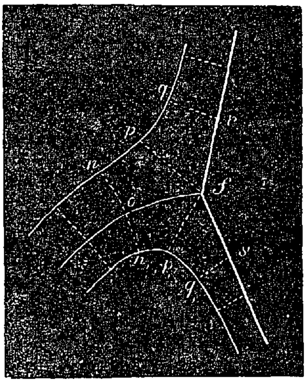
Nur von den Wirbeln dieser letzten Art sollen hier einige der wichtigsten Eigenschaften in Kürze angedeutet werden.

Der Umfang dieser Wirbel kann jede beliebige vieleckige oder geschlossene krummlinige Gestalt haben, sobald unter den inneren Winkeln nur keine überstumpfen und unter den Biegungen keine solchen vorkommen, deren erhabene Seite nach innen gekehrt ist. Wollte man in einem geschlossenen Raume, in welchem an einigen Stellen diese Bedingungen nicht erfüllt wären, einen solchen Wirbel hervorbringen, so würde an allen diesen Stellen ein zweiter oder selbst ein dritter Wirbel entstehen, dessen Umfang theilweise mit dem Umfange des Hauptwirbels zusammenfiele.

Wird ein solcher Wirbel auf einem Theile seines Umfanges nicht von festen Wänden, sondern von einer anderen bewegten flüssigen Masse begrenzt, wie der Wirbel fgd Fig. 5 längs dem Bogen fg, so treten folgende Verhältnisse ein.

Erstlich kann auf die Dauer die Geschwindigkeit des äussersten Flüssigkeitsfadens des Wirbels auf dem mit der anderen Flüssigkeitsmasse zusammenfallenden Theile fg des Umfanges nicht von der Geschwindigkeit dieser Flüssigkeitsmasse selbst verschieden sein, weil die gegenseitige Reibung nach und nach eine Ausgleichung herbeiführt. Zerlegt man nun sowohl den Wirbel als die anstossende Flüssigkeitsmasse in Bogenquadrate, so müssen daher die den Bogen fg berührenden Quadrate des Wirbels gleich gross sein wie die an sie anstossenden Quadrate der anderen flüssigen Masse. Zeichnet man sich nun die Stelle ofd mit dem Bogen fg in grösserem Massstabe, wie in Fig. 7, und nimmt der allgemeineren Behandlung wegen an, of und fd bilden einen beliebigen

Fig. 7.



Winkel mit einander, so mögen hk und h,k, zwei unendlich nahe bei fg, fd und fo liegende Flüssigkeitsfäden des Wirbels und der ihn begrenzenden flüssigen Masse, und lml,, non,, pfp, u. s. w. die sie durchschneidenden Normallinien bezeichnen. Alsdann muss nach dem Gesagten: lmon = l,mon,, nofp = n,ofp, u. s. w. sein. Damit aber die letzte Gleichung möglich sei, muss: < ofp = < ofp, sein. Da ferner die Bogenquadrate nf und gf, und ebenso die Bogenquadrate n,f und g,f, da sie unmittelbar an einander stossen, nur um unendlich wenig von einander verschieden sein dürfen, so kann man auch stets: < ofp = < pfq und < ofp, = < p,fs annehmen, woraus folgt, dass stets: < ofp = < ofs sein muss, oder dass die äussersten Flüssigkeitsfäden zweier in einem Punkte und mit gleicher Geschwindigkeit zusammenstossender Flüssigkeitsmassen sich nach dem Stosse gemeinschaftlich nach einer Richtung fg fortbewegen, welche den Winkel dfo, unter welchem der Zusammenstoss erfolgte, genau halbirt.

Man sieht, dass man hier auf ein Gesetz gelangt, welches einem ähnlichen Gesetze für die Bewegung zweier zusammenstossender fester Körper durchaus analog ist.

Bildet ofd eine gerade Linie, wie es in Fig. 5 der Fall ist, so sind mithin $< ofg = < dfg = 90°$. Der Bogen fg des Wirbels schneidet daher, weit entfernt sich etwa nur allmälig den Gefässwänden zu nähern und in deren Richtung überzugehen, dieselben vielmehr in f und g rechtwinklig, und der äusserste Flüssigkeitsfaden des Wirbels bildet mithin an diesen beiden Stellen eine rechtwinklige Ecke.

Hier muss nun bemerkt werden, dass dieser Satz auch dann gelten würde, wenn sich die im Inneren des Wirbels befindlichen Flüssigkeitsfäden nach einem anderen als dem bisher angenommenen Bewegungsgesetze richten würden, weil sich die Betrachtungen, mittelst deren derselbe gewonnen wurde, nur auf die Eigenschaften des äussersten Flüssigkeitsfadens des Wirbels beziehen; von der innerhalb befindlichen Flüssigkeit aber unabhängig sind. Wenn die Bewegung der Flüssigkeit im Innern des Wirbels den bisher festgehaltenen Voraussetzungen nicht entspräche, so würde daher gleichwohl der Bogen fg des Wirbels die Gefässwände in f und g rechtwinklig schneiden, und mithin seine Gestalt im Wesentlichen beibehalten müssen. Da nun ausserdem die Bewegung der inneren Flüssigkeitstheile nur noch auf die Grösse des Wirbels einen Einfluss ausüben könnte, diese Grösse aber auch unter den bisherigen Voraussetzungen zwischen Null und einem gewissen Maximum jeden Werth annehmen kann, so würden also hierdurch die bisher gewonnenen Ergebnisse nicht wesentlich geändert. Die Voraussetzung, dass sich auch der Wirbel auf ähnliche Weise in Quadrate müsse zerlegen lassen wie die übrige Flüssigkeitsmasse, kann daher mit Bezug auf diese Ergebnisse als ziemlich genau angesehen werden.

Anders verhält es sich dagegen mit dem im Innern des Wirbels herrschenden Drucke. Dieser ist wesentlich von der Geschwindigkeit der inneren Flüssigkeitstheile abhängig, wesshalb mit Bezug auf denselben aus der bisher angenommenen Konstruktionsart des Wirbels kein sicherer Schluss gezogen werden kann. Wäre dieselbe genau richtig, so würde sich der Druck der Flüssigkeitstheilchen auf einander gegen den Mittelpunkt des Wirbels hin rasch vermindern, und in einiger Entfernung von demselben gleich Null werden müssen, so dass die Gefässwände an den, der Mitte des Wirbels gegenüberliegenden Stellen, dem äusseren Luftdrucke durch ihre Festigkeit widerstehen müssten.

6. Einfluss der absoluten Grösse der Ausflussöffnung und der Druckhöhe auf den Ausfluss der Flüssigkeiten.

Nachdem nun die in den Nr. 4 und 5 ausgesprochenen Ergebnisse gewonnen worden sind, muss entschieden werden, durch welche Umstände die Grösse der Kontraktion des ausfliessenden Flüssigkeitsstrahles, sowie die Grösse der in den Gefässecken befindlichen Wirbel bestimmt werde.

Um diese Entscheidung herbeizuführen erinnere man sich, dass die ganze ausfliessende Flüssigkeitsmasse a f g s r e, Fig. 5, als ein System von unendlich vielen unendlich kleinen festen Körperchen, die sich ohne Reibnng mit und neben einander fortbewegen, und auf welche gewisse Kräfte einwirken, betrachtet werden kann. Diese Körperchen bewegen sich nicht regellos neben einander, sondern ordnen sich zu Flüssigkeitsfäden, von denen hier vorzüglich zwei Eigenschaften hervorgehoben werden müssen. Vorerst verändern sie nämlich, so lange die Wirbel die gleiche Grösse behalten, ihre Gestalt und Lage nicht. Verändern sich aber die Wirbel, so ist diese Veränderung der Flüssigkeitsfäden nicht willkührlich, sondern so, dass jeder Faden für jede Grösse der Wirbel eine durch die Zeichnung genau bestimmte Gestalt und Lage erhält. Betrachtet man nun die Flüssigkeitsfäden nur mit Rücksicht auf die Gestalt ihrer Oberfläche und die Pressungen, welche sie gegenseitig auf einander ausüben, so kann man daher jeden derselben als ein System zusammenhängender fester Körperchen ansehen, die sich nicht bewegen, so lange die Wirbel unverändert die gleiche Grösse beibehalten; dagegen aber in einer solchen mechanischen Verbindung miteinander stehen, dass das ganze System bei einer Vergrösserung oder Verkleinerung der Wirbel stets die jeweilige Gestalt des Flüssigkeitsfadens annimmt, an dessen Stelle man es gesetzt denkt. Die im Innern der Fäden bestehende Bewegung der Flüssigkeitstheilchen gegen die Oeffnung hin braucht bei dieser Betrachtungsweise gar nicht mehr beachtet zu werden.

Die zweite, hier hervorzuhebende Eigenschaft der Flüssigkeitsfäden besteht darin, dass sie theils vermöge des Gewichtes der einzelnen Flüssigkeitstheilchen, theils vermöge der durch ihre Bewegung an den gekrümmten Stellen entstehende Zentrifugalkraft gewisse Pressungen auf einander ausüben, die an verschiedenen Stellen ihrer

Oberfläche im Allgemeinen verschieden sind. Denkt man sich statt der Flüssigkeitsfäden jene Systeme von zusammenbängenden festen Körpern, so kann man durch geeignete äussere Kräfte, die man auf sie einwirken lässt, leicht auch diese gegenseitigen Pressungen hervorbringen.

Denkt man sich nun alle Flüssigkeitsfäden durch solche Systeme fester Körperchen ersetzt, auf welche die eben beschriebenen Kräfte wirken, so bilden sie zusammengenommen ein einziges System zusammenhängender fester Körperchen, dessen äussere Gestalt genau der der ausfliessenden Flüssigkeitsmasse ist, und in welchem die Endflächen der die Flüssigkeitsfäden ersetzenden Theile genau die gleichen Pressungen erleiden, wie jene Fäden selbst. Da nun aber dieses System fester Körper den gewöhnlichen Gleichgewichtsgesetzen unterworfen ist, so ist dies also auch bei der ausfliessenden Flüssigkeitsmasse mit Bezug auf die Gestalt und die gegenseitigen Pressungen der Flüssigkeitsfäden der Fall. Dieselben werden daher auch diejenige Gestalt unverändert beibehalten, bei welcher sich die zwischen ihnen herrschenden Pressungen das Gleichgewicht halten. Um zu erfahren wann diess der Fall sei, hat man die Grösse und Richtung dieser Pressungen für eine gewisse Grösse der Wirbel aufzusuchen, dann den Wirbel um eine unendlichkleine Grösse zu verändern, die virtuellen Momente auszurechnen, welche während der gleichzeitigen Veränderungen sämmtlicher Flüssigkeitsfäden jene Pressungen ausüben, und die Summe dieser Momente gleich Null zu setzen. Die Wirbel, und mit ihnen die Kontraktion, werden nun diejenige bleibende Grösse annehmen, bei welcher diese Gleichung erfüllt ist.

(Fertsetzung folgt.)