Prof. Deschwanden. — Graphische Bestimmung des Ausflusses der Flüssigkeiten durch rechteckige Oeffnungen, und bei zweiseitiger Kontraktion.

Die Bewegung einer flüssigen Masse kann dadurch angenähert richtig bestimmt werden, dass man die Gestalt und Geschwindigkeit der einzelnen Flüssigkeitsfäden, oder der von den einzelnen Flüssigkeitstheilchen durchlaufenen Räume untersucht, und dabei die allgemeinen hydrodynamischen Gesetze zu Grunde legt, allein nicht nur auf den Einfluss der Schwerkraft und der äusseren Pressungen, sondern auch auf die Zentrifugalkraft Rücksicht nimmt, vermöge welcher die Flüssigkeitstheilchen auf einander drücken, wenn sie sich durch krumme Wege bewegen. In den Nr. 67, 68 und 69 der Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Zürich wurden die wichtigsten Ergebnisse zusammengestellt, welche man für die Bewegung der Flüssigkeiten über einen Ueberfall erhält, wenn man die Gestalt und Geschwindigkeit der Flüssigkeitsfäden durch Rechnung zu bestimmen sucht. Da der Rechnung in vielen Fällen bedeutende Hindernisse entgegenstehen, so versuchte ich dasselbe Ziel auch durch graphische Konstruktion zu erreichen. Im folgenden gebe ich kurz die Grundsätze an, nach denen diese Konstruktionen ausgeführt wurden, sowie die Ergebnisse, welche durch Anwendung der letzteren auf den Ausfluss von Flüssigkeiten durch rechteckige Oeffnungen und bei zweiseitiger Kontraktion erhalten worden sind.

Es ist, wie sich von selbst versteht, nicht zu erwarten, dass die Konstruktion so genaue oder so allgemein gültige Resultate gewähren werde, wie eine auf analytischem Wege gewonnene Formel; dass jedoch in diesem Falle in Ermangelung des Besten auch das minder Vollkommene einigen Werth habe, dürfte vielleicht aus folgenden Mittheilungen hervorgehen.

1. Konstruktion.

Die graphische Aufgabe, welche hier zu lösen ist, besteht darin: diejenige Gestalt der ausfliessenden Flüssigkeitsmasse zu verzeichnen, welche den allgemeinen hydrostatischen Gesetzen, und besonders auch dem Einflusse entspricht, welchen die einzelnen Flüssigkeitsfäden bei Biegungen durch ihre Zentrifugalkraft auf einander ausüben. Wenn man der ausfliessenden Masse einerseits die Gestalt zu geben sucht, die sie wegen dieser Zentrifugalkraft sowie wegen der Einwirkung der Schwerkraft haben muss, welche beiden Kräfte auf die im Innern der flüssigen Masse befindlichen Flüssigkeitstheilchen unmittelbar einwirken, und andrerseits auch diejenige Gestalt, die sie in Folge der von aussen auf sie ausgeübten Pressungen besitzen muss, so lässt sich jene Aufgabe in folgende zwei anderen zerlegen; erstens, die Gestalt zu verzeichnen, welche die ausfliessende Masse wegen der in ihrem Innern, und zweitens diejenige Gestalt zu verzeichnen, welche sie wegen der von aussen auf sie wirkenden Kräfte haben muss.

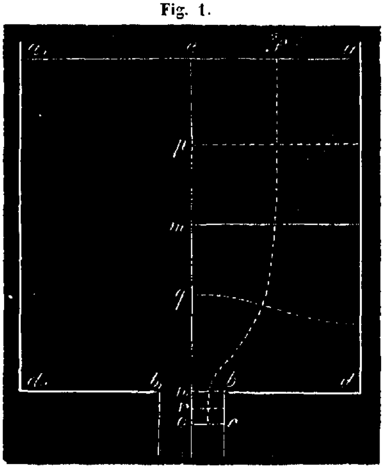
Um die erste dieser Aufgaben zu lösen, wurde vorzüglich folgender, in Nr. 47 der Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Zürich mitgetheilte Satz benutzt: die Längen derjenigen Stücke zweier Flüssigkeitsfäden, welche zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Normalflächen liegen, sind proportional mit ihren Querschnitten. Für die hier betrachteten Fälle, in welchen die Querschnitte der Flüssigkeitsfäden rechteckig sind und eine ihrer Dimensionen, die Dicke oder Tiefe, stets gleich bleibt, verwandelt sich dieser Satz in folgenden: Die Längen derjenigen Stücke zweier Flüssigkeitsfäden, die zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Normalflächen liegen, sind proportional mit ihren Breiten. Hieraus folgt wieder, dass sich eine bewegte flüssige Masse von gleicher Dicke und mit rechteckigem Querschnitte durch die Endflächen der Flüssigkeitsfäden und die Normalflächen in lauter Prismen mit unendlichkleinem quadratischem Querschnitte und gleicher Höhe zerlegen lässt, woraus sich wieder ergieht, dass die eine Projektion dieser Masse durch die Projektionen jener Flächen in lauter unendlichkleine Quadrate, die Endflächen jener Prismen, zerlegt werden kann. Eine nähere Auseinandersetzung hievon findet sich an der oben angeführten Stelle der Mittheilungen u. s. w. Stellt z. B. a b c a,b,c, Fig. 2 die in einem Gefässe befindliche und aus demselben ausfliessende Flüssigkeitsmasse vor, und zwar unter der Voraussetzung, dass die senkrecht auf der Zeichnungsfläche stehende Dimension dieser Masse überall gleich gross sei, so besteht mithin die erste Eigenschaft, welche diese Figur besitzen muss, darin, dass sie sich, ohne dass irgend welche Abfälle entstehen dürfen, in unendlich kleine Quadrate muss zerlegen lassen. Besitzt sie diese Eigenschaft, so entspricht sie den Gesetzen, nach welchen sich die im Innern der flüssigen Masse befindlichen Flüssigkeitstheilchen bewegen.

Um der Gestalt der ausfliessenden Masse auch noch die Eigenschaften zu geben, welche sie wegen der von aussen auf sie einwirkenden Kräfte erhalten soll, muss die Gestalt und Geschwindigkeit der beiden äussersten Flüssigkeitsfäden, oder, wenn diess leichter ist, die Gestalt und Geschwindigkeit eines der beiden äusseren und eines inneren ermittelt werden. Die Gestalt der äusseren

Fäden ist vorzüglich von der Umgebung der ausfliessenden Masse, hier also von der Gestalt des Gefässes und der Grösse und Stellung der Oeffnung abhängig, und kann mit Berücksichtigung derselben leicht angenähert angegeben werden. Ihre genauere Bestimmung aber ist erst im Verlaufe der Konstruktion möglich. Von einem inneren Faden kann die Gestalt dann leicht angegeben werden, wenn die Gestalt der ganzen Flüssigkeitsmasse eine Axe der Symetrie hat, denn in diesem Falle ist diese Axe selbst einer jener inneren Fäden. Die Geschwindigkeit der äussersten Flüssigkeitsfäden an verschiedenen Stellen hängt von der senkrechten Entfernung dieser Stellen unter oder über dem Flüssigkeitsspiegel ab, von welchem die ganze flüssige Masse ausgeht, und von den von aussen auf jede einzelne Stelle des Fadens ausgeübten Pressungen, und muss hieraus nach den gewöhnlichen hydrodynamischen Gesetzen berechnet werden.

Diesem zufolge kann im vorliegenden Falle die Konstruktion der ausfliessenden Masse auf folgende Art ausgeführt werden.

Fig. 1.



Stellt a d b $a_1 d_1 b_1$ Fig. 1 das Gefäss, und b b_1 die in der Bodenfläche desselben angebrachte Ausflussöffnung vor, und ist die senkrecht zur Zeichnungsfläche stehende Dimension der Oeffnung gleich derjenigen des Gefässes, so verzeichne man zuerst die beiden äussersten, oder einen der äusseren und einen seiner Gestalt nach bekannten inneren Flüssigkeitsfäden. Man kann sich dabei an die Regel halten, die äussersten Fäden möglichst genau an die Wände des Gefässes anzulegen, in welchen sich die Flüssigkeit bewegt, oder parallel mit diesen Wänden zu machen Beim Ausflusse aus einem Gefässe, dessen Oeffnung in der Mitte der Bodenfläche ist, wie im vorliegenden Falle, kann man den mittleren Faden als Axe der Symetrie sogleich geradlinig durch die Mitte des Gefässes ziehen, wie e o in Fig. 1, während man den äussersten Faden genau an die Gefässwand a d b anlegt, und von b an etwa parallel mit e o nach b c hinzieht. Kleine willkürliche Abänderungen von dieser Art die äussersten Fäden zu zeichnen, haben auf das Endergebniss keinen Einfluss, wesshalb auch keine genaueren Regeln dafür vorgeschrieben zu werden brauchen.

Nun sehe man die ganze, zwischen den beiden verzeichneten Flüssigkeitsfäden liegende Masse o e a d b c als einen einzigen Flüssigkeitsfaden an, und theile ihn durch Normalflächen in lauter Stücke ein, die eine so genau wie möglich quadratische Gestalt haben, wie in Fig. 1 durch die von $m_1 n_1 o$ ausgehenden Linien. Im vorliegenden Beispiele ist es sehr leicht, diese Theilung mit Genauigkeit auszuführen; hätte aber die Gefässwand a d eine unregelmässige Gestalt, so könnten diese Quadrate nur mit entfernterer Annäherung hergestellt werden, und man müsste sich dabei so verhalten, wie später bei der Konstruktion angenäherter Quadrate dieser Art angegeben werden wird. Unter allen Umständen aber kann die Herstellung dieses Quadratnetzes als die erste, freilich noch sehr entfernte Annäherung zur graphischen Auflösung der gestellten Aufgabe angesehen werden. Wie weit sie noch von der Wahrheit entfernt ist, sieht man, wenn man zur Herstellung der zweiten Annäherung übergeht.

Um den zweiten, der Wahrheit schon bedeutend näher stehenden Grad der Annäherung zu erreichen, theile man die ganze, zwischen e o und a d b c liegende flüssige Masse nach der Richtung ihrer Bewegung durch die von f in Fig. 1 ausgehende punktirte Linie in zwei Hälften, sehe jede derselben als einen Flüssigkeitsfaden an, und gebe den Grenzlinien dieser Fäden eine solche Gestalt, dass sie sowohl den Gesetzen der im Inneren, als auch denen der von Aussen wirkenden Kräfte entsprechen. Man zeichne zu diesem Zwecke zuerst die in Fig. 1 von f ausgehende punktirte Linie, welche die Trennungsfläche der beiden nun angenommenen Flüssigkeitsfäden darstellen soll, und zwar so, dass sie jede der bei der ersten Annäherung erhaltenen quadratischen Figuren so genau als möglich in zwei Rechtecke theilt, deren eine Dimension doppelt so gross als die andere ist. Alsdann zeichne man zwischen je zwei bei der ersten Annäherung gezeichneten Normalflächen noch je eine andere hinein, wie die durch p, q, n . . gehenden punktirten Linien in Fig. 1. Die Gestalt und Richtung dieser Linien muss so sein, dass sie die Linien e o, a d c und f normal schneiden, und die durch die Linie f entstandenen länglichen Rechtecke so genau als möglich in quadratähnliche, theilweise mit krummen Linien begränzte Vierecke zerlegen. Man erhält hierdurch ein Vierecksnetz zweiter Ordnung mit viermal so vielen Vierecken als bei der ersten Annäherung.

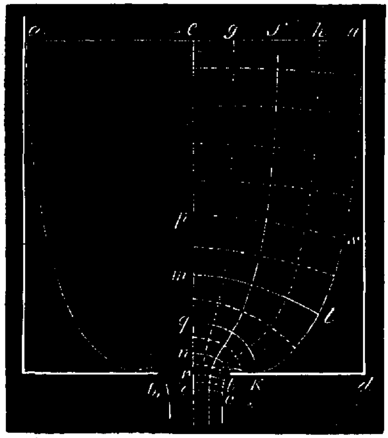
Wäre die erste Zeichnung nun schon nahezu richtig gewesen, so müssten durch dieses zweite, über die Figur geworfene Vierecknetz nur Quadrate, oder von Quadraten wenig abweichende Vierecke entstehen. Meistens ist diess aber nicht der Fall, indem einzelne Vierecke der zweiten Ordnung, wie im gegenwärtigen Beispiele die bei q und n liegenden, sehr weit von Quadraten abweichen. Um die Annäherung des zweiten Grades zu erreichen, muss daher die ganze Figur so verändert werden, dass sich auch die Vierecke der zweiten Ordnung so sehr wie möglich Quadraten nähern, oder es muss das Vierecksnetz in ein Quadratnetz verwandelt werden. Dabei kann auf folgende Weise verfahren werden.

Da bei dieser Veränderung der äusserste Flüssigkeitsfaden a d b c sich von der Gefässwand a d b wird entfernen müssen, so ist zunächst auszumitteln, was für Pressungen er an verschiedenen Stellen wird auszuhalten haben, und wie gross daher seine Geschwindigkeit an denselben ist, damit daraus die Grösse der auf ihn fallenden Seiten der besprochenen Quadrate abgeleitet werden kann. Die angenäherte Bestimmung davon ist hier sehr leicht. Wenn z. B. a l k Fig. 2 der äusserste Flüssigkeitsfaden ist, und die zwischen a l k und a d b liegende Flüssigkeitsmasse nahezu in Ruhe ist, so wird auf jede Flächeneinheit von a l k bei l der Druck h s ausgeübt, wo s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, u h den senkrechten Abstand des Punktes l vom Flüssigkeitsspiegel a a, bedeutet. Ist nun die Geschwindigkeit der Flüssigkeit bei a a, gleich v, und bei l gleich v, so hat man zufolge den gewöhnlichen hydrodynamischen Gesetzen:

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2gh - 2g\frac{sh}{s}} = v,$$

So lange die zwischen a l k und a d b enthaltene Flüssigkeit angenähert in Ruhe ist, ist mithin die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsfadens a l k von a bis nahe bei b gleich gross, und müssen daher auch die an a l k anstossenden Seiten der Quadrate zweiter Ordnung gleich gross, und zwar, wie sich bei aa, zeigt, gleich $\frac{1}{2}$ ae sein,

Fig. 2.



Nachdem hierdurch die Grösse der an die Linie a l k anstossenden Quadrate bestimmt ist, mache man eine neue Zeichnung von dem Vierecknetze zweiter Ordnung, und zwar so, dass man nicht etwa nur ein oder zwei einzelne Vierecke zu verbessern und in Quadrate zu verwandeln sucht, sondern man fasse sogleich die ganze Figur mit allen ihren Vierecken in's Auge, und stelle sich die Veränderungen vor, die mit derselben vorgenommen werden müssen, um die letztern in Quadrate zu verwandeln und dabei die an a l k anstossenden Seiten dieser Quadrate gleich $\frac{1}{2}$ a c zu machen. Hat man durch diese Ueberlegung eine ungefähre Vorstellung von der richtigen Gestalt des Fadens alk erlangt, so zeichne man sich denselben wie die Linie alk in Fig. 2 hin, trage auf ihr die Seiten kl, ls, ... gleich $\frac{1}{2}$ ac auf, verzeichne von den Punkten k, l, s ... aus die Normalflächen kq, lm, sp .... und alsdann die mittlere, von f ausgehende Grenzlinie der beiden grossen Flüssigkeitsfäden, so dass die auf der einen Seite derselben liegenden Vierecke, etwa die zwischen der Linie f und alk befindlichen, so nahe als möglich eine quadratische Gestalt erhalten. Zeigt sich alsdann, dass unter den sämmtlichen neu entstandenen Vierecken noch solche sind, die von der quadratischen Gestalt wesentlich abweichen, so muss die Linie alk etwas verändert, und von ihr aus das Netz auf dieselbe Weise neu gezeichnet werden, wie eben beschrieben worden ist. Auf diesem Wege fährt man mit Veränderungen fort, bis man zu einem möglichst vollkommenen Quadratnetze gelangt ist.

Es mag hier passend sein, eine Bemerkung über die Aehnlichkeit der bei diesen Zeichnungen vorkommenden Vierecke mit gewöhnlichen Quadraten zn machen. Es ist aus dem Vorausgegangenen zu ersehen, dass diese Vierecke, wie das Quadrat, sich durch die Flüssigkeitsfäden und Normalflächen in lauter unendlichkleine Quadrate müssen zerlegen lassen, ohne dass Abfälle entstehen, und so dass an alle vier Seiten der Vierecke eine gleich grosse Zahl dieser Quadrätchen anstösst. Daher müssen sich auch die vier Umfangslinien der Vierecke, wie die Seiten des Quadrates, normal schneiden, weil sonst bei der Zerlegung in kleinere Quadrate nothwendig Abfälle entstehen müssten. Dagegen ist keineswegs nöthig, dass die vier Umfangslinien, wie beim Quadrate, gleich lang oder gerade seien; diess ist im

Allgemeinen nur dann der Fall, wenn ihre Länge oder Biegung unendlich klein ist. Bei der Ausführung der Zeichnungen ist daher vorzüglich darauf zu sehen, dass sich alle vier Umfangslinien der Vierecke normal schneiden, und dass die beiden Durchmesser derselben, welche sich in ihrer Mitte treffen und von den Halbirungspunkten der Seiten der Vierecke ausgehen, ungefähr gleich gross seien. Zum Unterschiede der gewöhnlichen Quadrate, Rechtecke u. s. w. könnte man die hier vorkommenden: Bogenquadrate, Bogenrechtecke u. s. w. nennen.

Auf ähnliche Weise wie man durch das Bogenquadratnetz zweiter Ordnung die zweite Annäherung zur Lösung der Aufgabe erhalten hat, erhält man eine dritte durch Zeichnung eines Quadratnetzes dritter Ordnung. Man zerlegt die ganze flüssige, zwischen eo und ak liegende Masse nun in vier grosse Flüssigkeitsfäden, indem man noch die in Fig. 2 von g und h ausgehenden punktirten Linien zieht, zeichnet die ebenfalls durch punktirte Linien angedeuteten Normalflächen, von der Mitte der Bogen kl, ls, . . . aus, normal zu sämmtlichen von e, g, f, h, a ausgehenden Linien dazu, und verändert alsdann die ganze Figur so, dass die Vierecke dritter Ordnung die Gestalt von Bogenquadraten erhalten. Auf diese Weise erhält man die durch die Fig. 3, 4, 5 dargestellten Zeichnungen.

Das Quadratnetz dritter Ordnung gewährt für alle Stellen, an denen die Flüssigkeitsfäden keine sehr starken Krümmungen haben, schon eine Genauigkeit, die für die meisten praktischen Zwecke hinreichend ist. Bei der Stelle kb aber, wo starke Krümmungen vorkommen, und zugleich die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsfadens akb sich verändert, müssen noch Quadratnetze höherer Ordnungen angewendet werden. Dabei ist zugleich folgendes zu bemerken. Ist H der Höhenunterschied zwischen dem Punkte b und $a a_{,}$, so ist die Geschwindigkeit des Fadens akb bei b nach den gewöhnlichen hydrodynamischen Gesetzen gleich:

$$\sqrt{2gH + v_2^1},$$

während sie in den Gegenden von a l, bis nahe gegen b hin, gleich:

$$v_1$$

ist. Der Uebergang der letzten dieser beiden Geschwindigkeiten zur ersten kann nun kaum anders geschehen, als so, dass der Faden akb bei k den Gefässboden ganz oder beinahe berührt und hierdurch den Raum alkd von der unmittelbaren Berührung mit der Oeffnung bb, abschliesst, dann in einem kleinen Bogen nach b hinüber geht und zwischen sich und dem Gefässboden einen Raum übrig lässt, in welchem sich eine kleine wirbelnde Flüssigkeitsmasse befindet, die durch die Verschiedenheit der Pressungen, die sie nach verschiedenen Seiten hin ausübt, jenen Uebergang möglich macht. Es ist leicht nachzuweisen, dass die Länge hk dieses Wirbels annähernd in demselben Verhältnisse grösser sein muss als dessen Höhe, wie die Geschwindigkeit $\sqrt{2gH + v_2^1}$, die bei b stattfindet, grösser ist als die Geschwindigkeit $v_{,}$, welche zwischen adk herrscht.

Wenn die zwischen alk und adh befindliche Flüssigkeitsmasse nicht als ruhend betrachtet werden darf, welches der Fall ist, wenn die Weite $b b_{,}$ der Oeffnung im Verhältnisse zur Weite $a a_{,}$ des Gefässes ziemlich gross ist, so bleibt die Geschwindigkeit im Flüssigkeitsfaden alk nicht überall gleich $v_{,}$, sondern nimmt in der Nähe von k etwas zu und geht dann in die Geschwindigkeit $\sqrt{2gH + v_2^1}$ über, ohne dass jener keine Wirbel nöthig ist und ohne dass der Faden alb den Gefässboden vor seinem Eintritte in die Oeffnung bb, zu berühren braucht. Die beiden Werthe v, und $\sqrt{2gH + v_2^1}$ sind übrigens in diesem Falle weniger von einander verschieden als wenn die Oeffnung bb, im Verhältnisse zu aa, klein ist.

Die Grösse der Kontraktion des bei bb, austretenden Flüssigkeitsstrahles kann bestimmt werden, ohne dass man den Strahl bis in eine beträchtliche Entfernung von der Oeffnung fortzusetzen braucht. Sobald nämlich H nicht sehr klein ist, kann die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsfadens abc bei bc als nahe konstant angenommen werden, so lange er sich nicht mehr als etwa um die Weite der Oeffnung von bb, entfernt. Daher fallen auch alle an bc anstossenden Bogenquadrate gleich gross aus und behalten ihre Grösse bis zur vollständigen Kontraktion unverändert bei. Da nun an der Stelle, wo diese erfolgt sein wird, auch alle anderen Quadrate dieselbe Grösse haben werden, so erhält man die Breite des vollkommen kontrasirten Strahles, wenn man so viele Quadrate von der Grösse der bei bc befindlichen zusammensetzt als auf die Breite des ganzen Strahles gehen.

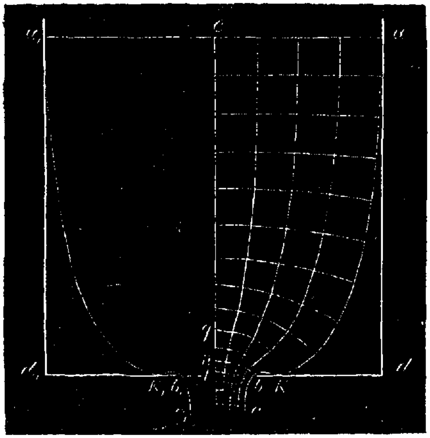
Es versteht sich von selbst, dass alle diese Konstruktionen im grossen Massstabe ausgeführt werden müssen, wenn sie einige Genauigkeit gewähren sollen, und dass es namentlich nöthig ist, die kleine, aber mit starken Krümmungen versehene und wichtige Stelle bei bb, in noch mehr vergrössertem Massstabe als die übrigen Theile besonders zu verzeichnen.

Nach denselben Grundsätzen, nach denen der Ausfluss der Flüssigkeit aus einem Gefässe in dem nun beispielsweise behandelten Falle durch Konstruktion bestimmt wird, kann diess auch in andern Fällen geschehen, indem man die eigenthümlichen Verhältnisse berücksichtigt, in denen sich jedesmal namentlich die äussersten Flüssigkeitsfäden befinden. Die Ergebnisse dieser graphischen Behandlungsweise mehrerer Fälle sollen im Folgenden kurz zusammengestellt, und wo möglich mit den Erfahrungsergebnissen verglichen werden.

2. Ausfluss bei grosser Druckhöhe, wenn die Oeffnung in der Mitte des Gefässbodens ist, und bei verschiedener Gefässweite.

Es wird hier angenommen, der Flüssigkeitsspiegel im Gefässe, aus welchem die Flüssigkeit ausfliesst, bleibe stets in der gleichen senkrechten Entfernung über der Oeffnung, indem die ausfliessende Flüssigkeit durch Zufluss von aussen stets wieder ersetzt werden soll. Dieser Zufluss kann von verschiedenen Seiten herkommen, und die Bewegung der ausfliessenden Flüssigkeit ist theilweise hiervon abhängig. Sie ist z. B. verschieden, wenn die neue Flüssigkeit von der Seite, parallel mit dem Boden des Gefässes, oder wenn sie von oben nach dem Spiegel der Flüssigkeit zufliesst. Jenes kömmt in der Anwendung da vor, wo eine flüssige Masse durch einen Kanal nach einer im Boden desselben angebrachten Oeffnung hinfliesst; das letztere dagegen soll gegenwärtig angenommen werden. Es wird daher vorausgesetzt, sowie der Flüssigkeitsspiegel aus der ursprünglichen Lage aa, Fig. 3 in eine tiefere hinuntersinkt, werde der über ihm entstehende, von Flüssigkeit entleerte Raum sogleich wieder durch neue Flüssigkeit bis zur Linie aa, ausgefüllt, und diese Flüssigkeit habe schon in dem Augenblicke, da sie in diesen Raum gelangt, die gleiche Bewegung, welche die früher durch die Stelle aa, fliessende Flüssigkeit hatte. Es wird mithin bei dieser Voraus-

Fig. 3.



setzung angenommen, in dem Querschnitte aa, des Gefässes, und daher auch in jedem andern Querschnitte desselben, bleibe die einmal vorhandene Bewegung der Flüssigkeit unverändert gleich.

Konstruirt man unter diesen Voraussetzungen die Flüssigkeitsfäden und Normalflächen so, wie in Abtheilung 1 dieses Aufsatzes angedeutet worden ist, für eine Oeffnung, deren Breite bb, zwischen $\frac{1}{15}$ und $\frac{1}{5}$ der Breite aa, des Gefässes liegt, so erhält man folgende Ergebnisse:

Die äussersten Fäden albc und a,l,b,c,, Fig. 3, liegen zuerst, wenn aa, in beträchtlicher Höhe über dd, ist, ganz nahe an den Flüssigkeitswänden ad und a,d, an, und fangen erst dann an sich merklich von denselben zu entfernen, wenn sie sich dem Boden bis auf eine Entfernung, die etwa gleich dem Durchmesser des Gefässes ist, genähert haben, oder wenn ad nahe gleich aa,