keine andern zuverlässigen und hierüber entscheidenden Erfahrungen vorliegen, so müssen zur Feststellung einer definitiven Ansicht hierüber weitere Experimente abgewartet werden.

In der Bestimmung einer andern Grösse, nämlich der Geraden rt, ist dagegen durch die Erfahrung grössere Vollständigkeit als durch die Theorie erreicht worden. Die oben angedeuteten Betrachtungen geben nur die Länge des Bogens $a_4\,m_4\,a'_4$, woraus wegen der zu unvollständigen Bestimmung der Lage und Krümmung dieses Bogens kein sicherer Schluss auf die Lage des Punktes t gezogen werden kann.

Prof. Raabe, über einige ohne Integrationsverrichtung gewonnene Integralergebnisse.

(Gelesen den 8. December 1851.)

Die niedere Arithmetik liefert schon einige Beispiele analogen Inhaltes zu dem hier Mitzutheilenden dar. Wenn z. B. von einer bestimmten ganzen Zahl die Zahl 996 subtrahirt werden soll, so kann die eigentliche Subtraction dadurch umgangen werden, dass man zum Minuendus die Zahl 4 addirt, und hierauf die Ziffer der Tausender um eine Einheit verringert. Wenn z. B. ferner eine vorgelegte ganze Zahl durch 25 dividirt werden soll, so kann die eigentliche Division dadurch umgangen werden, dass man den Dividendus mit 4 multiplicirt, und im Ergebnisse die Ziffern der Einheiten und Zehner unterdrückt. — Analog hiemit habe ich einige Integralbestimmungen, sei es ohne irgend welche Integrationsverrichtung, oder auf die höchst einfache Integration von $\int dx$ zurück gebracht erhalten, die ich im Vorliegenden mitzutheilen die Ehre habe.

I. Das von Poisson behandelte bestimmte Integral:

$$\int_0^\pi \log.(1 + a^2 + 2a\mathrm{Cos.}\, x)\, dx,$$

wo $a^2 < 1$ ist, sei durch $f(a)$ dargestellt, nämlich man setze:

$$f(a) = \int_0^\pi \log.(1 + a^2 + 2a\mathrm{Cos.}\, x)\, dx,$$

so hat man, wenn x durch $\pi - x$ ersetzt wird, auch:

$$f(a) = \int_0^\pi \log.(1 + a^2 - 2a\mathrm{Cos.}\, x)\, dx;$$

addirt man diese zwei Gleichungen, so ist:

$$2f(a) = \int_0^\pi \log(1 + a^4 - 2a^2\mathrm{Cos.}\, 2x)\, dx;$$

ersetzt man hier 2x durch x, so ist auch:

$$4f(a) = \int_0^{2\pi} \log(1 + a^4 - 2a^2\mathrm{Cos.}\, x)\, dx.$$

Zerlegt man dieses bestimmte Integral in eine Summe zweier, das eine von $x = 0$ bis $x = \pi$, und das andere von $x = \pi$ bis $x = 2\pi$; ersetzt man im letztern x durch $\pi + x$, so gelangt man zuletzt auf:

$$4f(a) = 2\int_0^\pi \log.(1 + a^4 + 2a^2\mathrm{Cos.}\, x)\, dx,$$

aus der beachtend die Bestimmungsgleichung von $f(a)$ folgende Functionalgleichung gezogen wird:

$$f(a) = \frac{1}{2} f(a^2).$$

Aus dieser findet man nach und nach folgende Gleichheiten:

$$f(a) = \frac{1}{2} f(a^2) = \frac{1}{2^2} f(a^4) = \frac{1}{2^3} f(a^8) = \frac{1}{2^4} f(a^{16}) \text{ u. s. w.}$$

und zuletzt:

$$f(a) = \frac{1}{2^n} f(a^{2^n}).$$

Da wir hier $a^2 < 1$ angenommen haben, so nähert sich der Ausdruck $f(a^{2^n})$ beim beständigen Wachsen von n ohne Ende dem Werthe von $f(0)$; es ist aber nach der Begriffsgleichung $f(0) = 0$, daher hat man auch $f(a) = 0$, d. h. man hat ohne irgend welche Integrationsverrichtung die Bestimmung:

$$\int_0^\pi \log (1 + a^2 \pm 2a\text{Cos. }x)\, dx = 0 \qquad \text{(a)}$$

gewonnen, wenn $a^2 < 1$ ist,

II. Sei ferner der zweite Fall:

$$f(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a^2 - 2a\text{Cos.}x}$$

vorgelegt, wo wir über a die einzige Annahme treffen, dass sie nicht der reellen Einheit gleich ist.

Durch Zerlegung des bestimmten Integrals gelangt man sehr bald auf:

$$f(a) = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + a^2 - 2a\text{Cos. }x} + \int_0^\pi \frac{dx}{1 + a^2 + 2a\text{Cos. }x},$$

woraus

$$f(a) = 2\,(1 + a^2) \int_0^\pi \frac{dx}{1 + a^4 - 2a^2 \text{Cos . }2x},$$

oder auch:

$$f(a) = (1 + a^2) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a^4 - 2a^2\text{Cos. }x}$$

erhalten wird; folglich hat man beachtend die Begriffsgleichung von $f(a)$ folgende Functionalgleichung:

$$f(a) = (1 + a^2)\, f(a^2), \tag{1}$$

die auch mit folgender einerlei ist:

$$f(a) = \frac{1 - a^4}{1 - a^2}\, f(a^2). \tag{2}$$

Ersetzt man in (1) a durch a^2, und führt das Ergebniss in (2) ein, so hat man:

$$f(a) = \frac{1 - a^8}{1 - a^2}\, f(a^4); \tag{3}$$

ersetzt man in (1) a durch a^4, und führt das Ergebniss in (3) ein, so hat man:

$$f(a) = \frac{1 - a^{16}}{1 - a^2}\, f(a^8);$$

fährt man in dieser zweimal beschriebenen Weise fort, so gelangt man auf folgende allgemeine Gleichheit:

$$f(a) = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2}\, f(a^{2^n}).$$

Ist nun a reell und numerisch kleiner wie die Einheit, oder ist a eine einfache oder complexe imaginäre Zahl, deren Modul (in der Bedeutung von Cauchy genommen) kleiner wie die Einheit ist; dann hat man, da unter n jede beliebig grosse Zahl, also auch eine unendlich gross werdende gedacht werden kann, die einfache Gleichheit:

$$f(a) = \frac{1}{1 - a^2}\, f(0). \tag{4}$$

Ist aber a reell und numerisch grösser wie die Einheit, oder ist es der Modul bei der Annahme eines imaginären Werthes von a, dann hat man zuerst wegen der Begriffsgleichung von f(a):

$$f(a) = \frac{1}{a^2}\, f\left(\frac{1}{a}\right);$$

wendet man auf $f\left(\frac{1}{a}\right)$ das Ergebniss in (4) an, so gelangt man gegenwärtig auf:

$$f(a) = -\frac{1}{1 - a^2} f(0).$$

Man hat also:

$$f(a) = \pm \frac{1}{1 - a^2} f(0), \tag{5}$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn a oder der Modul von $a < 1$ ist, das untere Zeichen aber bei der entgegengesetzten Ungleichheit Statt findet.

Aus der Begriffsgleichung von f(a) ist ferner

$$f(0) = \int_0^{2\pi} dx;$$

daher hat man bloss mit Zuziehung der einfachen Integrationsverrichtung in dieser Gleichung, die auf $f(0) = 2\pi$ führt, die Integralbestimmung:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a^2 - 2a \operatorname{Cos}. x} = \pm \frac{2\pi}{1 - a^2}, \tag{b}$$

wie auch beachtend die Gleichheit (2), die $f(-a) = f(a)$ giebt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a^2 + 2a \operatorname{Cos} x} = \pm \frac{2\pi}{1 - a^2} \tag{b'}$$

Das obere oder untere Zeichen gilt in diesen Ergebnissen, je nachdem die reell gedachte Zahl a oder, im Falle sie imaginär ist, ihr Modul kleiner oder grösser als die Einheit ist.

III. Als drittes und letztes Beispiel theile ich hier noch eine Differenzialgleichung erster Ordnung mit, deren vollständige Integralgleichung ebenfalls ohne irgend welche Integrationsverrichtung erzielt werden kann.

Wenn zu einem dreiachsigen Ellipsoid der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

wo a, b, c die drei Achsen vorstellen, die die Ungleichheiten $a > b > c$ eingehen, die sogenannten Krümmungscurven in irgend einem Punkte hergestellt werden sollen; dann hat man für die orthogonale Projection dieser Krümmungscurven in die Coordinatenebne der xy folgende Differenzialgleichung erster Ordnung zwischen x und y zu integriren:

$$Axyy_1^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\, y_1 - xy = 0, \qquad (2)$$

wo zur Abkürzung:

$$A = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}, \quad B = a^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c} \qquad (3)$$

gesetzt worden ist, und y_1 den Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ vorstellt.*)

Diese Differenzialgleichung (2) ist es, die ich im Folgenden ohne irgend eine Integrationsverrichtung vollständig integriren werde.

Dividirt man diese Differenzialgleichung durch y_1, und differenzirt sie hierauf nach y und x, so gelangt man sehr bald auf:

$$\left(A + \frac{1}{y_1^2}\right) (xyy_2 + xy_1^2 - yy_1) = 0, \qquad (4)$$

wo y_2 den zweiten Differenzialquotienten von y nach x repräsentirt. Sieht man nun von dem Faktor dieser Gleichung ab, der den Differenzialquotienten zweiter Ordnung nicht mitführt, so hat man es mit folgender Differenzialgleichung zweiter Ordnung zu thun:

$$xyy_2 + xy_1^2 - yy_1 = 0. \qquad (5)$$

Die Integration dieser kann durch die Bemerkung um-

*) Monge, Application de l'analyse à la géométrie, pag. 123.

gangen werden, dass sie, obwohl nur ein einmaliges Differenziationsergebniss der Gleichung (2), gleichwohl von den beiden allgemeinen Constanten A und B, die diese enthält, befreit ist. Es folgt nämlich hieraus, wenn der Gegenstand rein analytisch aufgefasst wird, dass eine von diesen zwei Constanten nothwendig eine sogenannte »überflüssige« ist.

Wenn daher eine dieser zwei Constanten durch die Null und die andere durch irgend eine allgemeine Constante ersetzt wird; dann bietet das Ergebniss eine vollständige Integralgleichung unmittelbar vorhergehender Ordnung dieser Differenzialgleichung zweiter Ordnung in (5) dar. Setzen wir sonach in (2):

$$A = 0 \text{ und } B = n,$$

wodurch sie in folgende übergeht:

$$(x^2 - n)\, y_1 - xy = 0, \tag{6}$$

wo n eine allgemeine Constante bedeutet: so ist diese eine vollständige Integralgleichung unmittelbar vorhergehender Ordnung zu (5); und da sie simultan mit (2) besteht: so bietet das Eliminationsergebniss von y_1 aus denselben folgende dar:

$$\frac{1}{n} x^2 + \frac{A}{n - B} y^2 = 1, \tag{7}$$

welche die endliche und, weil die allgemeine Constante n mitführend, die vollständige Integralgleichung zu (2) ist.

Betreffend den unbeachtet gelassenen Faktor in Gleichung (4), bemerken wir, dass derselbe der Null gleich gesetzt, wie bekannt, die singuläre Integralauflösung herbeiführt, und dass endlich diese auf die vier von Monge zuerst bemerkten »Ombilics« oder die sogenannten Nabelpunkte führt.

Nicht in dem Grade, wie die vorausgeschickten Beispiele, kann doch die Bestimmung von $\int_0^1 \log . \Gamma(x + a)\, dx$ etwelchermassen zu den in der Ueberschrift vorliegender Mittheilung angedeuteten Fällen gezählt werden, wo $\Gamma(z)$ die von Legendre eingeführte Bezeichnung der Function von z ist, welche das Euler'sche Integral zweiter Art werthet.

Zur Werthung des erwähnten Integrals lege ich den folgenden bekannten Satz dieser Function Gamma zu Grunde:

$$\Gamma(na) = \Gamma(a)\, \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \ldots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) n^{na - \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-n}{2}},$$

wo n irgend eine ganze positive Zahl, und a eine allgemeine positive Grösse vorstellt. Wird diese Gleichung logarithmisch aufgelöst, und erklärt hiebei n als eine unendlich grosswerdende Zahl, so gelangt man sofort auf die Gleichung:

$$\int_0^{a+1} \log . \Gamma(x)\, dx = \omega \log . \Gamma\left(\frac{a}{\omega}\right) + \left(a - \frac{1}{2}\omega\right) \log . \omega$$
$$+ \frac{1-\omega}{2} \log . 2\pi,$$

wo die unendlichklein werdende Zahl ω gleich $\frac{1}{n}$ ist.

Setzt man folgende Vereinfachungsgleichung fest:

$$\varphi(a) = \omega \log . \Gamma\left(\frac{a}{\omega}\right) + a \log . \omega\,, \tag{1}$$

so ist die unmittelbar vorher aufgestellte Gleichung auch mit folgender gleichbedeutend:

$$\int_0^1 \log . \Gamma(x + a)\, dx = \frac{1}{2} \log . 2\pi + \varphi(a). \tag{2}$$

Anstatt nun $\varphi(a)$ mit Hülfe der Gleichheit (1) zu ermitteln, schlage ich gegenwärtig folgenden einfachen Weg ein: —

Durch Differenziation der Gleichheit (2) nach a ergiebt sich:

$$\int_0^1 \frac{\Gamma_1 (x + a)}{\Gamma (x + a)} dx = \varphi_1(a),$$

oder, wenn die Integration linkerhand vollzogen wird:

$$\log. \frac{\Gamma (1 + a)}{\Gamma (a)} = \varphi_1(a),$$

die wegen der bekannten Eigenschaft der Function Γ, nämlich $\Gamma(1 + a) = a\Gamma(a)$, in:

$$\varphi_1(a) = \log a$$

übergeht, die nach einer wirklichen Integration auf

$$\varphi(a) = a \log. a - a + \text{Const.}$$

führt. Bei der Annahme $a = \omega$ gelangt man einerseits aus dieser auf:

$$\varphi(\omega) = \text{Const.},$$

und anderseits aus (1) auf $\varphi(\omega) = 0$; daher ist $0 = \text{Const.}$, und man hat:

$$\varphi(a) = a \log. a - a;$$

folglich geht die Gleichung (2) über in:

$$\int_0^1 \log. \Gamma(x + a)\, dx = a \log . a - a + \frac{1}{2} \log . 2\pi, \qquad (3)$$

welche Bestimmung für alle reelle Werthe von a Bestand hat.