MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

№ 68. 1851.

Prof. Deschwanden. — Ueber die Bewegung der Flüssigkeiten bei Ueberfällen.

(Fortsetzung.)

worin sich $x_,$ und $\frac{b_,}{R_,}$ in dem Ausdrucke für $x - x_,$ auf irgend einen Punkt in der Linie $a_,a$ beziehen.

Durch diese Gleichung ist nun die Gestalt des untersten Elementarkanales vollständig bestimmt. Es ergiebt sich aus ihnen, dass diese Linie, von irgend einem Punkte a an gerechnet, in der Richtung nach aufwärts oder gegen die Bewegung der Flüssigkeit hin, sich immer mehr der Horizontalen $a_,o$ nähert, und dabei ihre Krümmung immer mehr vermindert. Der Punkt $a_,$ selbst aber, wo der Elementarkanal vollständig in die Gerade $a_,0$ übergehen würde, wäre unendlich weit von jedem Punkte a entfernt, in welchem die Linie eine endliche Krümmung hat. Nach abwärts oder nach der Richtung der Bewegung hin, krümmt sich dagegen die Linie mit immer zunehmender Biegung gegen die Ueberfallskante hinauf, und erreicht die Stelle a_2, wo sie der Richtung nach senkrecht gegen die Horizontale $a_,0$ steht, in einer Höhe von etwa 0,638 $b_,$, wo $\frac{b}{R}$ nahe den Werth 2,1 hat.

Zugleich sieht man auch, dass die Linie schon in einer kleinen Entfernung von a_2 der Horizontalen $a_{,}0$ sehr nahe kömmt, obschon sie dieselbe erst in unendlicher Entfernung genau erreicht; denn setzt man in den Gleichungen für $x - x_{,}$ und y $\frac{b}{R} = 2{,}1$ und $\frac{b_{,}}{R_{,}} = 0{,}01$, so erhält man: $x - x_{,} = 2{,}73\, b_{,}$ und $y = 0{,}003\, b_{,}$. Wenn man also von a_2 aus nur um etwas mehr als das $2\frac{1}{2}$fache der Tiefe, die der Kanal beim Anfange der Aufstauung hat, aufwärts geht, so findet man den untersten Elementarkanal so nahe bei der Horizontalen $a_{,}0$, dass er von derselben kaum mehr zu unterscheiden ist, wenn der Kanal nicht aussergewöhnlich grosse Dimensionen hat. Ueber dem Punkte a_2 lässt sich die Linie nicht mit Genauigkeit weiter verfolgen, theils weil für diese Gegend die oben angegebenen Reihen nicht mehr konvergiren, theils weil die Bedingungen nicht mehr erfüllt sind, unter denen sie allein richtige Ergebnisse liefern. Die zwischen a_2 und a_4 gelegene Stelle wird nachher besonders besprochen werden. Dagegen muss hier noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Coordinaten der Linie $a_{,}a_2$ mit $b_{,}$ proportional sind, und dass mithin die Linie in tiefen Kanälen die gleiche Gestalt wie in weniger tiefen, nicht aber die gleiche Grösse hat, sondern dass ihre Dimensionen proportional mit dieser Tiefe sind. Alle Linien dieser Art in allen Kanälen sind also einander geometrisch ähnlich.

Der Zustand der zwischen $a_{,}aa_2$ und $a_{,}0$ eingeschlossenen Flüssigkeitsmasse kann nun auch genauer beurtheilt werden. Da diese Masse keinen Theil der Elementarkanäle der ausfliessenden Flüssigkeitsmenge bildet, so wird sie selbst nicht zum Ausflusse gelangen können, sondern fortwährend in dem bezeichneten Raume verbleiben. Dessen ungeachtet nimmt sie doch einigen Theil an der Bewegung der ausfliessenden Flüssigkeitstheile. Da wo sie nämlich den Elementarkanal $a_{,}aa_{2}$ berührt, wird ihr durch die Reibung der Flüssigkeitstheilchen aneinander die Bewegung des Elementarkanales selbst wenigstens theilweise mitgetheilt, so dass die zunächst bei $a_{,}aa_{2}$ liegenden Theilchen sich von $a_{,}$ gegen a_{2} hin bewegen, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die gleich oder etwas kleiner als die des Elementarkanales selbst ist. Da diese Theilchen aber in der Gegend von a_{2} nach der Richtung der Linie aa_{2} nicht mehr weiter gehen können, so müssen sie sich nach 0, und von dort nach a_{1} zurückwenden, von wo sie denselben Kreislauf wieder beginnen. Die zwischen $a_{,}aa_{2}$ und $a_{,}0$ befindliche Flüssigkeitsmasse wird mithin eine wirbelnde Bewegung machen; jedoch nur mit so geringer Geschwindigkeit, dass sehr angenähert angenommen werden kann, der von dieser Masse auf ihre Umgebung ausgeübte Druck sei den gewöhnlichen hydrostatischen Gesetzen unterworfen.

Es kann daher nun auch die Pressung, die an verschiedenen Stellen des ganzen, oberhalb des Wehres befindlichen Raumes stattfindet, bestimmt werden. In dem, jene schwach wirbelnde Bewegung enthaltenden Raume findet also, wie bemerkt wurde, der gewöhnliche hydrostatische Druck sehr angenähert statt. Da dieser Druck in $a_{,}$ nun gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule mit der Höhe $a_{,}a_{,}'$ oder $b_{,}$ ist, so ist mithin der Druck an irgend einer Stelle zwischen $a_{,}aa_{2}$ und $a_{,}0$ gleich dem Gewicht einer Flüssigkeitssäule, deren Höhe gleich dem senkrechten Abstande dieser Stelle von dem Flüssigkeitsspiegel in $a_{,}'$ ist. Dieses Gesetz gilt ferner auch noch für den untersten Elementarkanal $a_{,}aa_{2}$ der zum Ausflusse gelangenden Flüssigkeitsmasse, auf der ganzen Strecke von $a_{/}$ an bis a_2; weiter jedoch, wie nachher gezeigt werden soll, nicht mehr. Für die übrigen Elementarkanäle gilt dagegen dieses Gesetz um so weniger genau, je mehr sie sich der Oberfläche der Flüssigkeit nähern. Sowie nämlich die Geschwindigkeit dieser Kanäle grösser wird als die des untersten Kanales, so wird die in ihnen herrschende Pressung etwas kleiner als die dem Flüssigkeitsspiegel bei $a_{/}$ entsprechende hydrostatische, und erhält im obersten Elementarkanale $a_{/}'a'$ endlich den Werth Null, obschon alle Punkte a', a'_2 . . . . desselben tiefer liegen als $a_{/}'$. Dieser Unterschied zwischen der hydrostatischen und wirklich vorhandenen Pressung in den verschiedenen Elementarkanälen ist jedoch seinem absoluten Werthe nach nicht bedeutend, so lange man nicht in die unmittelbare Nähe der Ueberfallskante kömmt, weil sich die Oberfläche der Flüssigkeit erst nahe bei dieser Kante merklich senkt.

2. Bewegung der Flüssigkeit von der Ueberfallswand bis zur Ueberfallskante; von a_2 bis a_4.

Nachdem die Beweguug der Flüssigkeit bis zur Normalfläche $a_2 a'_2$ verfolgt worden, muss der zwischen dieser und der Normalfläche $a_4 a'_4$ liegende Raum näher betrachtet werden. Die Bewegung, welche in demselben stattfindet, lässt sich zwar nicht so genau wie bei dem vorher behandelten Raume $a_{/}a_{/}'a'_2a_2$ bestimmen, allein es können doch wenigstens einige wesentliche Eigenschaften derselben näher erkannt werden.

Vor Allem muss festgehalten werden, dass die sämmtlichen Elementarkanäle bei ihrem Uebergange von $a_2 a'_2$ zu $a_4 a'_4$ ihre Geschwindigkeit sehr bedeutend vermehren. Diess ist vorzüglich bei dem untersten Kanale während seines Ueberganges von a_2 nach a_4 der Fall. In a_2 ist die Geschwindigkeit dieses Kanales noch gleich $v_{,}$, nämlich dieselbe wie in $a_{,}a_{,}'$; in a_4 entspricht sie dagegen der Fallhöhe $a_4r = h$ oder dem senkrechten Abstande der Ueberfallskante vom Flüssigkeitsspiegel in $a_{,}'$, und ist mithin gleich $\sqrt{2gh + v_{,}^2} = v_4$. Ebenso ist die Geschwindigkeit v'_4 bei a'_4 gleich $\sqrt{2gh' + v_{,}^2}$. Es folgt hieraus, dass die im untersten Elementarkanale bei a_4 vorkommende Geschwindigkeit grösser ist, als die, welche in derselben Normalfläche bei a'_4 im obersten Elementarkanale vorhanden ist, während bis zu $a_2 a'_2$ immer die Geschwindigkeit des untersten Elementarkanales kleiner war, als die des obersten. Der zwischen a_2 und a_4 stattfindenden Umkehrung dieses Verhältnisses entspricht auch die in denselben Zwischenraum fallende Veränderung des Sinnes, in welchem der unterste Elementarkanal gebogen ist, indem er von $a_{,}$ bis a_2 seine erhabene Seite nach unten, in a_4 dagegen dieselbe nach oben wendet. Der Wendungspunkt a_3 kann angenähert bestimmt werden. Die wichtigste Veränderung aber ist die, welche mit der im untersten Elementarkanale vorhandenen Pressung vorgeht, indem diese in a_2 noch gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule mit der Höhe $a_{,}r$, in a_4 aber, mit Ausschluss des Luftdruckes, gleich Null ist. Dass innerhalb des Elementarkanales $a_2a_3a_4$ diese Veränderung in der Pressung vorgeht, ist kaum zu widerlegen; alsdann muss aber auch dieselbe Veränderung in dem kleinen zwischen dem Boden $a_2a_3a_4$ und der Geraden a_3a_4 enthaltenen Raume vorgehen, also auch in diesem Raume der Druck bei a_2 gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule mit der Höhe a_2r, der bei a_4 dagegen Null sein. Es müsste also die kleine Flüssigkeitsmasse $a_2a_3a_4$ gleichsam soviel wiegen, als eine Flüssigkeitssäule mit der Höhe a_2r. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich bei näherer Betrachtung der obwaltenden Verhältnisse auf die einfachste und befriedigendste Weise auf. In dem zwischen der Ueberfallswand und dem Bogen $a_2a_3a_4$ eingeschlossenen Raume ist eine Flüssigkeitsmasse enthalten, welche, wie die zwischen $a_{,}a_2$ und $a_{,}0$ befindliche, nicht ausfliesst, sondern nur eine wirbelnde Bewegung hat. Da sich dieser Wirbel ungefähr den ihn umgebenden festen und flüssigen Theilen anschliesst, so hat er eine längliche Gestalt, und wird namentlich in der Nähe von a_2 eine sehr rasche Biegung machen, so dass er an dieser Stelle fast in eine Spitze ausläuft, während er oben und besonders auf den Seiten weniger rasche Krümmungen hat. Eine Folge hievon ist nun aber der Umstand, dass die in diesem spitzen Winkel sich herumbewegenden Flüssigkeitstheilchen in der Nähe von a_2 wegen des kleinen Krümmungshalbmessers der Kurven, welche sie zu durchlaufen haben, eine viel grössere Zentrifugalkraft nach Aussen ausüben, als an irgend einer andern Stelle, und dass mithin hier der Druck des Wirbels nach Aussen grösser ist, als oben und auf den Seiten. Durch die genauere Rechnung ergiebt sich nun, dass die Pressung zwischen den einzelnen Flüssigkeitstheilchen des Wirbels, wenn sie in a_4 gleich Null oder gleich einem Atmosphärendrucke angenommen wird, im Mittelpunkte etwas kleiner als dieser ist, bei a_2 aber allerdings zu der Grösse des Gewichtes einer Flüssigkeitssäule a_2r, oder der Summe dieses Gewichtes und des atmosphärischen Luftdruckes ansteigt. Damit steht ferner in nothwendigem Zusammenhange, dass die Geschwindigkeit des Wirbels bei a_2 kleiner sein muss, als an irgend einer andern Stelle. Diese Geschwindigkeit wird nun aber nahezu gleich der des Elementarkanales $a_2a_3a_4$, also in a_2 etwa gleich $v_{,}$, in a_4 gleich v_4, und mithin dort wirklich viel kleiner als hier sein. Es lässt sich auch der Mittelpunkt des Wirbels mit einiger Annäherung an die Wahrheit bestimmen, und es zeigt sich, dass derselbe viel näher bei a_4 als bei a_2 liegt. Man sieht hiermit, dass die Veränderung, welche die zwischen den Flüssigkeitstheilchen herrschende Pressung bei ihrem Uebergange von a_2 nach a_4 erleidet, nur durch die wirbelnde Bewegung der kleinen Flüssigkeitsmasse $a_2a_3a_3$ möglich wird, eine Bewegung, welche aber auch durch die Reibung an den ausfliessenden Flüssigkeitstheilchen nothwendig entstehen, und während der ganzen Zeit des Ausflusses immerwährend erhalten werden muss.

3. Bewegung der Flüssigkeit über die Ueberfallskante.

Es bleibt nun noch übrig, die Bewegung und Gestalt des Flüssigkeitsstrahles bei seinem Uebertritte über die Ueberfallskante zu bestimmen. Da zu den Grössen, welche zu diesem Zwecke näher untersucht werden müssen, namentlich auch die in jeder Zeiteinheit ausfliessende Flüssigkeitsmenge gehört, so wäre es wünschbar, diesen Theil der vorliegenden Betrachtungen mit besonders grosser Genauigkeit und Sorgfalt anstellen zu können. Die Bestimmung der Flüssigkeitsmenge selbst kann nun zwar mit einem ziemlich hohen Grade von Genauigkeit ausgeführt werden; dagegen ist es nicht möglich, einige andere hier in Betracht kommende Grössen, namentlich die Richtung des Flüssigkeitsstrahles unmittelbar über der Ueberfallskante, mit einiger Zuverlässigkeit anzugeben. Ich muss mich daher einstweilen begnügen, im Folgenden ausser der Flüssigkeitsmenge noch die Dicke und Krümmung des Flüssigkeitsstrahles in der Nähe der Ueberfallskante anzugeben, und die Bestimmung der übrigen Grössen, die man zu kennen wünschen möchte, künftigen Untersuchungen vorbehalten.

Die verschiedenen, nahe bei der Kante a_4 befindlichen Normalflächen haben, je nachdem sie mehr oder minder weit unter oder über dem Wehre sind, sehr verschiedene Richtungen, indem sich die unterhalb befindlichen mehr nach der Seite hin neigen, nach welcher die Flüssigkeit hinströmt, die oberhalb befindlichen mehr nach derjenigen, von welcher sie herfliesst. Aus allen diesen Normalflächen wurde zur Untersuchung diejenige $a_4m_4a_4'$ ausgewählt, deren Richtung am genauesten als eine senkrechte angesehen werden kann, oder welche so beschaffen ist, dass die durch den Punkt m_4 an die Normalfläche gezogene Tangente senkrecht steht, und zwar unter der Voraussetzung, dass dieser Punkt die Normalfläche in zwei solche Theile a_4m_4 und $a'_4\,m_4$ zerlege, dass durch dieselben in gleichen Zeiträumen gleiche Flüssigkeitsmengen fliessen. In dieser Normalfläche ist nun die Geschwindigkeit V_4 bei a_4 gleich $\sqrt{2gh + v_,^2}$. Um die Geschwindigkeit v' irgend eines andern Elementarkanales zu bestimmen, muss wieder die Formel:

$$\operatorname{logn} \frac{v_4}{v'} = \int \frac{db'}{r'}$$

angewendet werden. Da ohne Zweifel die Krümmungsradien der höher liegenden Elementarkanäle etwas grösser als die der tiefer liegenden sind, so wurde in dieser Formel für den vorliegenden Fall für r' der Ausdruck $R_4 + b'$ gesetzt, in welchem R_4 den Krümmungshalbmesser des untersten Elementarkanales bei a_4, und b' die Bogenlänge von a_4 bis zu dem betrachteten Elementarkanale bedeutet. Man erhält alsdann sogleich:

$$v' = \frac{V_4}{1 + \frac{b'}{R_4}}$$

Hieraus kann nun leicht die Flüssigkeitsmenge M, die in jeder Sekunde ausfliesst, bestimmt werden, sobald R_4 und b_4 bekannt sind. Die Bestimmung des Krümmungshalbmessers R_4 gelingt dadurch, dass man das Verhältniss der Schwere zu der auf die Elementarkanäle wirkenden Zentrifugalkraft berücksichtigt. Nimmt man nämlich an, dass die Normalfläche $a_4 a'_4$ überall nur wenig von der senkrechten Stellung abweiche, so muss die ganze auf die Elementarkanäle in $a_4 a'_4$ wirkende Schwere nur allein von den senkrecht nach oben wirkenden Zentrifugalkräften dieser Kanäle aufgehoben werden, weil der von Aussen auf die flüssige Masse bei a_4 ausgeübte Druck ja nur gleich dem Luftdrucke ist. Desshalb muss R_4 diejenige Grösse erhalten, bei welcher die Summe aller jener Zentrifugalkräfte gleich der auf die Kanäle wirkenden Schwere ist.

Um nun aber auch noch die Dicke $a_4 a'_4$ des Flüssigkeitsstrahles, oder die Grösse b_4 zu bestimmen, muss ein anderes Prinzip beigezogen werden. Alle diese Betrachtungen werden nämlich unter der Voraussetzung angestellt. dass die Flüssigkeit in den Beharrungszustand der Bewegung gelangt sei, oder dass die Bewegung in allen Punkten des von der Flüssigkeit angefüllten Raumes in allen Beziehungen stets gleich bleibe. Dieser Zustand tritt aber nur dann ein, wenn die Schwere die grösst mögliche mechanische Arbeit auf die in jeder Zeiteinheit von dem Beginne $a, a,'$ der Stauung bis zur Ueberfallskante $a_4 a'_4$ strömenden Flüssigkeit ausübt. Die Grösse b_4 muss daher denjenigen Werth annehmen, für welchen jene mechanische Arbeit ein Maximum wird. Anstatt bei der Ausführung der hier angedeuteten Rechnungen b_4 selbst oder $\frac{b_4}{R_4}$ als die Unbekannte anzusehen, ist es übrigens bequemer, diese letztern Grössen als bekannt, dagegen aber $v_,$ als Unbekannte zu betrachten, wobei das Prinzip, auf das sich die Rechnungen stützen, ganz unverändert bleibt.

Folgende Gleichungen sind die Ergebnisse dieser Rechnungen:

$$\frac{v_,^2}{2yh} = \frac{2 - 3\frac{b_4}{R_4} - \left(\frac{b_4}{R_4}\right)^2}{7 \cdot \frac{b_4}{R_4} + 3\left(\frac{b_4}{R_4}\right)^2 - \frac{2\left(1 + \frac{b_4}{R_4}\right)\left(3 + \frac{b_4}{R_4}\right)}{2 + \frac{b_4}{R_4}} \log n \left(1 + \frac{b_4}{R_4}\right)}$$

und wenn $\frac{v_,^2}{2gh} = \infty$, oder die Tiefe des Kanales im Verhältnise zur Tiefe h der Kante unter dem Flüssigkeitsspiegel sehr gross ist:

$$\frac{b_4}{R_4} = \frac{1}{2}\left(-3 + \sqrt{17}\right) = 0{,}56155.$$

Ferner:

$$b_4 = h\left(1 + \frac{v_,^2}{2gh}\right)\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{b_4}{R_4}\right)^2}\right)$$

$$M = h\sqrt{2gh}\,.\left(1 + \frac{v_,^2}{2gh}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{R_4}{b_4}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{b_4}{R_4}\right)^2}\right) \log n \left(1 + \frac{b_4}{R_4}\right)$$

Hierzu kommt noch zur Berechnung der Tiefe $b_,$ des Kanales:

$$b_, = \frac{M}{v_,}$$

Wenn man die durch die Reibungen hervorgebrachte Verminderung der Geschwindigkeit berücksichtigt, und sich dabei auf die Untersuchungen von Weisbach stützt, so muss der oben angegebene Werth von b_4 noch mit $0,96^2$ und der von M mit $0,96^3$ multiplicirt werden.

In folgender Tafel sind die numerischen Resultate zusammengestellt, die man durch diese Formeln für verschiedene Werthe von $\frac{b_4}{R_4}$ erhält:

$\frac{b_4}{R_4}$	$\frac{v_1^2}{2gh}$	Ohne Rücksicht auf Reibung.			Mit Rücksicht auf Reibung.		
		b_4	M	h_1	b_4	M	b_1
0,5616	0,0000	0,5899 h	0,4682 $h\sqrt{2gh}$	∞	0,5437 h	0,4143 $h\sqrt{2gh}$	∞
0,5550	0,0092	0,5918 »	0,4729 »	4,9286 h	0,5454 »	0,4184 »	4,3604 h
0,5500	0,0166	0,5935 »	0,4768 »	3,7036 »	0,5469 »	0,4218 »	3,5230 »
0,5300	0,0472	0,5998 »	0,4925 »	2,2677 »	0,5528 »	0,4357 »	2,0063 »
0,5000	0,0982	0,6100 »	0,5184 »	1,6546 »	0,5622 »	0,4586 »	1,4706 »
0,4500	0,1998	0,6304 »	0,5702 »	1,2759 »	0,5808 »	0,5045 »	1,1285 »

Hieraus ergeben sich nun die wesentlichsten Gesetze, nach denen sich der Ausfluss der Flüssigkeiten bei einer Ueberfallwehre richtet.

Zunächst muss hervorgehoben werden, dass die numerischen Coeficienten von b_4 und M unabhängig von der absoluten Tiefe des Kanales und der Ueberfallskante sind, und nur von dem Verhältnisse dieser beiden Grössen zu einander abhängen; und dass somit die Bewegungen der Flüssigkeiten bei geometrisch ähnlichen Kanälen jeder Grösse auch geometrisch ähnlich sind. Ferner zeigt sich, dass die Grösse b_4 stets proportional mit der ersten Potenz und M proportional mit der $1^1/_2$ Potenz der Tiefe h der Kante unter dem Flüssigkeitsspiegel ist. Dagegen ist der Werth des numerischen Coefficienten der Grössen b_4 und M für verschiedene Werthe von $\frac{b_4}{R_4}$ oder $\frac{h_\prime}{h}$ etwas verschieden, und zwar so, dass er bei verhältnissmässig sehr grossen Kanaltiefen etwas kleiner, bei kleinen dagegen etwas grösser ist. Diese, jedoch nicht sehr merkliche Vermehrung des Coefficienten von b_4 für kleinere Kanaltiefen kommt vorzüglich davon her, dass bei weniger tiefen Kanälen die Geschwindigkeit der Flüssigkeit grösser ist, als bei tieferen, und daher bei jenen der Strahl in der Gegend von a'_4 sich nicht so schnell senkt, sondern weiter horizontal herausspringt, und desshalb den Punkt a'_4 höher über a_4 emporhebt. Die bei weniger tiefen Kanälen vorkommende Vermehrung des Coefficienten von M kommt dagegen von den beiden Umständen her, dass bei diesen der Querschnitt b_4 des Strahles und zugleich auch dessen Geschwindigkeit grösser ist als bei tiefen Kanälen.

Diese Vermehrung der Coefficienten beginnt indessen erst dann merklich zu werden, wenn sich die Tiefe

b_1 des Kanales bis etwa auf das Fünffache der Tiefe h der Kante h vermindert hat, indem bei allen tieferen Kanälen die Coefficienten nur um einige Tausendstel ihres ganzen Werthes von einander abweichen. Wird aber die Tiefe des Kanales noch kleiner als etwa das Fünffache der Tiefe h, so nehmen jene Coefficienten immer schneller zu, bis sie ihren Maximumwerth für den Fall erreicht haben, in welchem b_1 und h gleich gross sind, oder wo der Kanal ohne ein Wehr in die freie Luft ausmündet.

Es lässt sich die Frage aufwerfen, ob bei einem sehr tiefen Kanale in der That alle Flüssigkeitstheile zum Ausflusse gelangen, oder ob sich nicht etwa bloss die höher liegenden bis zu einer gewissen Tiefe hinunter über die tiefer liegenden wegschieben, diese letztern aber in Ruhe oder in einer schwach wirbelnden Bewegung verharren möchten? Die vorliegende Theorie entscheidet hierüber nichts, und die Frage muss daher als eine unerledigte angesehen werden; dagegen verdient bemerkt zu werden, dass die oben berechneten numerischen Coefficienten auch für den Fall keine merkliche Veränderung erleiden würden, dass die tiefsten Flüssigkeitstheilchen eines sehr tiefen Kanales nicht mehr zum Ausflusse gelangen würden.

4. Vergleichungen der theoretischen Ergebnisse mit den Erfahrungen.

Der Vergleich dieser Ergebnisse mit der Wirklichkeit kann nicht so weit ausgedehnt und mit solcher Sicherheit angestellt werden, wie es wünschbar wäre; weil die Versuche, die über den Ausfluss des Wassers bei Wasserfällen angestellt worden sind, theils nicht auf alle in den oben angedeuteten Rechnungen vorkommenden

Grössen sich erstrecken, theils innerhalb enger Grenzen eingeschlossen sind, und desshalb die extremen, von der Theorie noch behandelten Fälle nicht erreichen; oder weil sie endlich unter Umständen vorgenommen wurden, welche die Ergebnisse veränderten, oder bei den hier angestellten Betrachtungen nicht berücksichtigt werden konnten. Dennoch bestätigen die bekannt gewordenen Erfahrungsresultate mehrere der angeführten theoretischen Ergebnisse auf die erfreulichste Weise.

Die durch die Theorie bestimmte Bewegung der Flüssigkeit oberhalb des Wehres von a_1 bis a_4 wird im wesentlichsten durch die neuesten Versuche von Boileau vollkommen bestätigt. Er wies nach, dass die ausfliessenden Wassertheilchen von einem gewissen Punkte a_1' aus in einer hyperbelähnlichen Linie gegen die Ueberfallskante hinaufsteigen; dass zwischen diesen Theilchen, dem Boden und der Wand des Wehres ein Winkel bestehe, dessen einzelne Theilchen niemals zum Ausflusse gelangen; und dass endlich, was zur Bestätigung der theoretischen Resultate namentlich wichtig ist, der hydrostatische Druck an irgend einer Stelle dieses Raumes, bis in die Nähe der Ueberfallskante, also bis in die Gegend von a_2, gleich dem Gewichte einer Wassersäule sei, deren Höhe gleich dem senkrechten Abstande der betrachteten Stelle vom Punkte a_1' ist. Es folgt hieraus, dass nicht nur die Gestalt des von den Wassertheilchen durchlaufenen Weges, sondern auch ihre Geschwindigkeit sehr nahe mit den Ergebnissen der Theorie übereinstimmen muss.

Bei den Versuchen über den frei ausfliessenden Flüssigkeitsstrahl $a_4 a'_4$ wurde fast immer ausschliesslich eine möglichst genaue Bestimmung der Flüssigkeitsmenge M zu erreichen gesucht, weil diese für die praktische Mechanik von grosser Wichtigkeit ist. In folgender Tafel sind die neuesten Versuche dieser Art, die von Boileau, soweit sie öffentlich bekannt geworden, mit den Ergebnissen der Rechnung zusammenstellt. Es muss aber bemerkt werden, das die hier unter Boileau's Namen angeführten Zahlen nicht unmittelbar die Ergebnisse seiner Erfahrungen sind, sondern aus einer von ihm aufgestellten Formel gewonnen wurden, deren Ergebnisse zwischen den Grenzwerthen $\frac{b_{\prime}}{h} = 7{,}000$ und $\frac{b_{\prime}}{h} = 1{,}667$ mit den Erfahrungsresultaten selbst verglichen wurden, und von denselben innerhalb dieser Grenzen höchstens um $^1/_{20}$ ihres Werthes bisweilen im einen, bisweilen im anderen Sinne abwichen.

$\frac{b_{\prime}}{h}$	M durch Rechnung mit Rücksicht auf Reibung.	M nach Boileau's Formel.
∞	$0{,}4143\, h\sqrt{2gh}$	$0{,}4083\, h\sqrt{2gh}$
4,3604	0,4184 »	0,4233 »
3,5230	0,4218 »	0,4258 »
2,0063	0,4357 »	0,4709 »
1,4706	0,4586 »	0,5568 »
1,1285	0,5045 »	0,8810 »

Es ergiht sich aus der Vergleichung dieser Zahlwerthe, dass für tiefe Kanäle die Ergebnisse der Rechnung mit den von Boileau erhaltenen ziemlich genau übereinstimmen, jedoch etwas grösser als diese letzteren sind; dass aber bei weniger tiefen Kanälen die Uebereinstimmung nicht mehr so befriedigend ist und die Abweichung zugleich im entgegengesetzten Sinne stattfindet,