von Haut entblöste Schenkel in die Flüssigkeit getaucht ward, da solche Zuckungen auch immer vermisst wurden, wenn einem Frosche Blausäure unter die Haut oder auf die Centralorgane des Nervensystemes gebracht wird, so ist ihrem Auftreten anscheinend kein grosses Gewicht beizulegen.

Wird ein Schenkel, dessen Muskeln in schlaffem Zustande sich befinden, in Blausäure getaucht, so verlieren die Muskeln ihr Verkürzungsvermögen und verharren, sobald sie längere Zeit in Blausäure bleiben, in dem einmal gegebenen Zustande, ohne in eine mit Verletzung verbundenen Todtenstarre zu verfallen. Der schlaffe Zustand der Muskeln und das Nichteintreten der Todtenstarre kann darauf deuten, dass die Blausäure die Muskeln etwa ihrer Elasticitätsgrösse beraubt.

Ist diess der Fall, so muss auch die Blausäure wenigstens aber bei eintretender Todtenstarre die Muskeln in schlaffen Zustand versetzeu; dies thut sie aber keineswegs. Taucht man einen von Haut entblössten und in Todtenstarre begriffenen Froschschenkel, an dem die meisten Muskeln auf den stärksten unmittelbaren Reiz nicht mehr antworten und im Zustande der Starre unbeweglich verharren, an dessen übrigen Muskeln aber nur noch schwache Spuren von Zuckungeu einzelner Fascikel zu erlangen sind, in Blausäure, so erhält sich die Starre unverändert, falls der Muskel in der Blausäure bleibt.

Prof. Deschwanden. — Ueber die Bewegung der Flüssigkeiten bei Ueberfällen.

(Vorgetragen den 16. Juni 1851.)

Durch die ausgedehnten vielseitigen Versuche, welche während der letzten Jahre Boileau über die Bewegung des Wassers bei Ueberfällen angestellt hat, ist die Aufmerksamkeit der Mechaniker und Geometer neuerdings auf diesen Theil der Hydraulik gelenkt worden. Ich wurde durch sie veranlasst, zu versuchen, ob sich nicht diejenigen hydraulischen Prinzipien, die ich in einer im Jahr 1847 erschienenen Abhandlung entwickelte und auf mehrere einzelne Fälle anwandte, auch auf diesen Fall anwenden lassen. Das Folgende enthält die Ergebnisse dieses Versuches in einer kurzen und übersichtlichen Darstellung, in welcher der Weg, auf dem sie erhalten wurden, nur angedeutet, nicht vollständig beschrieben ist. Um dessen ungeachtet den Standpunkt, von welchem aus diese Untersuchungen geführt wurden, klar hervorzuheben, führe ich kurz die Unterschiede an, welche zwischen der hier befolgten und der bisher gewöhnlich angewendeten Behandlungsweise hydraulischer Prinzipien besteht.

Die wesentlichste Verschiedenheit besteht darin, dass ich von der Annahme, die Flüssigkeit bewege sich in parallelen und ebenen Schichten, abgewichen bin, und mir statt dessen die ganze Flüssigkeit in die unendlich dünnen faden- oder kanalförmigen Räume zerlegt dachte, welche die einzelnen Flüssigkeitstheilchen während ihrer Bewegung durch den betrachteten, von der Flüssigkeit durchströmten Raum beschreiben. Sollte aber diese Annahme irgend welche neue Resultate herbeiführen, so durfte von der Verschiedenheit der Bewegung, welche die Flüssigkeit in den verschiedenen Kanälchen dieser Art besitzt, nicht abgesehen werden. Die Bestimmung dieser Verschiedenheit gelang dadurch, dass die Zentrifugalkraft berechnet wurde, welche sich in diesen Kanälen entwickelt, wenn sie eine krummlinige Gestalt haben, und dass alsdann untersucht wurde, was für eine

Veränderung die Zentrifugalkraft eines jeden Kanälchens in der Bewegung der Flüssigkeit der übrigen Kanäle hervorbringe. Denkt man sich mehrere solcher unmittelbar aufeinanderfolgenden krummen Elementarkanäle, so ist leicht einzusehen, dass die Geschwindigkeit derjenigen, die näher an der erhabenen Fläche der von ihnen gebildeten Flüssigkeitsmasse liegen, durch die Zentrifugalkraft aller übrigen vermindert wird, weil alle diese Zentrifugalkräfte nach jener erhabenen Fläche hin gerichtet sind, und daher auf die in deren Nähe befindlichen Elementarkanäle einen merkbaren Druck ausüben, dadurch aber nach den gewöhnlichen hydraulischen Gesetzen eine Verminderung der in denselben vorhandenen Geschwindigkeit bewirken werden. Die an der hohlen Fläche der Flüssigkeitsmasse vorkommende Geschwindigkeit wird dagegen von diesen Zentrifugalkräften nicht verändert werden. Es ist nun in der oben angeführten Abhandlung das Gesetz genauer angegeben worden, nach welchem sich jene Geschwindigkeitsverminderung richtet. Mit Hülfe desselben und einiger anderer daraus abgeleiteter Folgerungen können dann auch die Querschnitte und endlich die ganze Gestalt der Elementarkanäle, sowie mithin die Geschwindigkeit und Richtung aller einzelnen Flüssigkeitstheilchen angegeben werden. Während bei der Annahme der Bewegung der Flüssigkeit in parallelen Schichten vorausgesetzt wird, die Bewegung sei in allen Punkten einer solchen Schicht gleich gross, wurde dagegen bei den Betrachtungen, welche den folgenden Ergebnissen zu Grunde liegen, auf die Verschiedenheit zwischen der Bewegung der im Innern der Flüssigkeitsmasse befindlichen Theilchen sehr sorgfältig Rücksicht genommen.

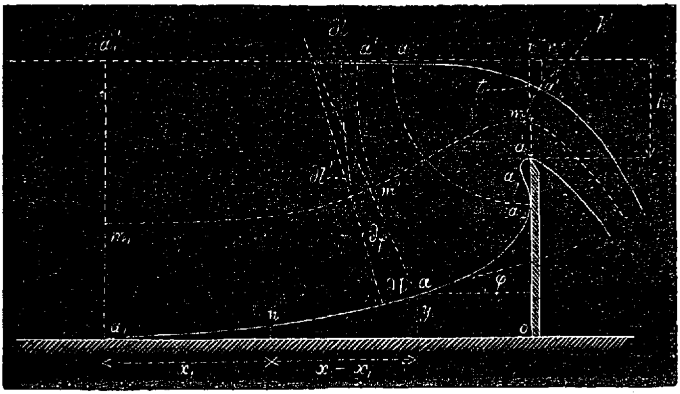
Obgleich nun diese Annahme, wie ich glaube, der Wahrheit näher kömmt, als die des Parallelismus der Schichten, so erhält man dennoch immer noch keine mit der Wirklichkeit vollständig übereinstimmende Ergebnisse. Die Annäherung an die Wahrheit ist zwar grösser als bei jener älteren Theorie, allein noch keineswegs vollkommen. Die Ursachen davon liegen darin, dass sämmtliche Reibungen, sowie die Viskosität der Flüssigkeiten unberücksichtigt gelassen werden mussten, und dass man die oben angedeuteten Grundsätze oft wegen mathematischen Schwierigkeiten nur angenähert, nicht vollstännig genau durchführen konnte. Gleichwohl aber hoffe ich durch diese Untersuchungen einiges Licht über die behandelten, in theoretischer Beziehung noch so wenig bearbeiteten Fälle zu verbreiten.

Vollkommener Ueberfall.

I. Länge der Ueberfallskante gleich der Breite des Kanals.

1. Bewegung der Flüssigkeit bis zur Ueberfallswand; von a_1 bis a_2.

Die Kante des Ueberfalles soll scharf angenommen werden. Der Flüssigkeitsstrahl falle, nachdem er über die Kante getreten, frei herunter, ohne sich an die Wand des Ueberfallwehres anzuhängen. Die nach der obern Seite gekehrte Ueberfallswand werde einstweilen senkrecht angenommen. Die Modifikationen, welche in der Untersuchungsweise und den Resultaten eintreten, wenn diese Annahmen nicht gemacht werden können, sowie namentlich der Fall, wo die Länge der Ueberfallskante kleiner als die Breite des Kanales ist, werden später besprochen werden.



In dieser Figur sei $a_, a_,'$ derjenige Querschnitt der Flüssigkeitsmasse, in welchem durch den Einfluss des Ueberfallwehres alle Elementarkanäle $a_,' a'$, $m_, m'$, $a_, a$ noch zu einander parallel und zugleich horizontal sind. Sollten diese Annahmen in der Wirklichkeit für keinen Querschnitt vollkommen erfüllt sein, so wird sich doch immer ein solcher finden lassen, für welchen sie mit grosser Annäherung an die Wahrheit gemacht werden können. Lässt man ferner die Reibung der Flüssigkeiten an den Wänden und dem Boden des Kanals, sowie die an der Luft bei $a_,' a'$ unberücksichtigt, so ist in diesem Querschnitte auch die Geschwindigkeit $v_,$ überall gleich gross. Verfolgt man nun die verschiedenen Elementarkanäle von diesem Querschnitte an in der Richtung gegen den Ueberfall hin, so werden sie im Allgemeinen folgende Veränderungen erleiden.

Der oberste Elementarkanal $a_,' a'$ wird sich nach und nach etwas senken, dadurch seine Geschwindigkeit vermehren, seinen Querschnitt dagegen in demselben Maase vermindern. Der unterste Elementarkanal $a_, a$ wird dagegen streben, nach der Kante a_4 hinaufzukommen, und muss sich daher auf irgend einem Wege von $a_{,}$ an emporheben. Ferner wird seine Geschwindigkeit sich nicht vermehren, so lange er nicht in die nächste Umgebung von a_4 kömmt, sondern nahezu unverändert gleich $v_{,}$ bleiben. Würde nämlich nur die Schwere auf ihn einwirken, so müsste seine Geschwindigkeit bei seiner aufsteigenden Bewegung nach demselben Gesetze abnehmen, wie die eines aufwärts geworfenen Körpers. Nun befindet sich aber zwischen $a_{,} a\, a_2$ und dem Boden $a_{,} o$ des Kanales eine Flüssigkeitsmasse, die nahezu als ruhend angesehen werden kann und daher nach den gewöhnlichen hydrostatischen Gesetzen betrachtet werden muss. Diese Flüssigkeitsmasse wird daher auf den Elementarkanal $a_{,}a$ einen hydrostatischen Druck ausüben, der an den höhern Stellen a und a_2 geringer ist als bei $a_{,}$, und zwar um das Gewicht einer Flüssigkeitssäule, deren Höhe der Höhendifferenz zwischen jenen Punkten a, a_2 und dem Punkte $a_{,}$ gleichkömmt. Da mithin dieser, die Bewegung des untersten Elementarkanales hemmende Druck nach oben zu abnimmt, so wird dadurch die Bewegung an den höhern Punkten mehr begünstigt als an den tiefer gelegenen, wodurch jene Wirkung der Schwere, welche die Geschwindigkeit an den höheren Stellen zu vermindern sucht, genau aufgehoben wird. Wendet man die gewöhnliche Formel:

$$v = \sqrt{2y\left(h + \frac{1}{3}(p_{,} - p)\right) + v_1^2},$$

welche der auf die Flüssigkeiten bezogene Ausdruck des Gesetzes der lebendigen Kräfte ist, und in welcher $v_{,}$ w $p_{,}$ die Geschwindigkeit und den Druck auf den Flüssigkeitsspiegel einer in einem Gefässe befindlichen Flüssigkeitsmasse, v und p dieselben Grössen an einer beliebigen andern Stelle der Flüssigkeit, s das spezifische Gewicht und h den senkrechten Höhenunterschied dieser zweiten Stelle vom Flüssigkeitsspiegel bedeuten, auf den vorliegenden Fall an, so erhält man das angeführte Ergebniss sogleich mit der grössten Leichtigkeit.

Zur Bestimmung der im Innern der flüssigen Masse vorhandenen Bewegung ist dagegen diese Gleichung nicht mehr hinreichend, indem hier die Wirkung der Zentrifugalkraft, von welcher oben gesprochen wurde, berücksichtigt werden muss. Durchschneidet man die Flüssigkeit an irgend einer Stelle mit einer Fläche a′m′a, welche von sämmtlichen Elementarkanälen normal getroffen wird, so wird man den durch a′ gehenden Elementarkanal noch als geradlinig ansehen können, während die übrigen um so mehr gekrümmt sind, je näher sie bei dem untersten Kanale $a_{,}a$ liegen. Die Geschwindigkeit wird mithin in dieser Normalfläche bei a′ am grösten, gegen a hin immer kleiner, und bei a selbst, wo sie gleich $v_{,}$ ist, am kleinsten sein. Bezeichnet man die Geschwindigkeit bei a′ und m′ mit v und v′, die Bogenlängen a′m′ und a′a mit b′ und b, und den Krümmungshalbmesser irgend eines Elementarkanales bei seinem Durchgange durch a′a mit r, so hat man zufolge der genannten Abhandlung über die Bewegung der Flüssigkeiten:

$$\text{logn}\ \frac{v}{v'} = \int_0^{b'} \frac{db'}{r}.$$

Führt man nun für r eine passende Funktion von b′ ein, deren Werth für den Punkt a′ unendlich gross und für a gleich dem Krümmungshalbmesser R des untersten Elementarkanales wird. z. B. $r = R\frac{b}{b'}$, so erhält man aus obiger Formel:

$$\text{logn}\ \frac{v}{v_{,}} = \frac{(b')^2}{2bR}, \quad \text{oder:} \quad \text{logn}\ \frac{v'}{v_{,}} = \frac{b^2 - (b')^2}{2\,b\,R}.$$

Mittelst dieser Gleichung lässt sich, wie man sieht, die Geschwindigkeit berechnen, welche an irgend einer Stelle der Normalfläche aa' herrscht, wenn man nur die Geschwindigkeit $v_{,}$ und den Krümmungshalbmesser R des untersten Elementarkanales, sowie die Länge b oder das Verhältniss $\frac{b}{R}$ kennt. Für den obersten Elementarkanal ergibt sich: $\operatorname{logn} \frac{v}{v_{,}} = \frac{b}{2R}$, oder;

$$v = v_{,}\, e^{\frac{b}{2R}}$$

Da man nun durch diese Gleichungen das Verhältniss der Geschwindigkeit v', die an irgend einer Stelle von a'a vorkömmt, zur Geschwindigkeit $v_{,}$ bei a, und mithin zu derselben Geschwindigkeit $v_{,}$, welche in allen Punkten der Normalfläche $a_{,}a_{,}'$ vorhanden ist, annäherungsweise kennt, die Querschnitte der Elementarkanäle in a' und $a_{,}'\,a_{,}$ sich aber zu einander umgekehrt wie diese Geschwindigkeiten verhalten, so kann man nun auch das Verhältniss bestimmen, in welchem diese Querschnitte a'a und $a_{,}'\,a_{,}$ oder b und $b_{,}$ zu einander stehen. Ein angenähertes Resultat dieser Bestimmung ist:

$$b = b_{,}\left\{1 - \frac{1}{3}\frac{1}{R} + 0{,}04444\left(\frac{b}{R}\right)^2 - 0{,}00212\left(\frac{b}{R}\right)^3 - 0{,}00014\left(\frac{b}{R}\right)^4 + 0{,}00002\left(\frac{b}{R}\right)^5 - \ldots\ldots\right\}.$$

Diese Reihe konvergirt auch dann noch, wenn der Werth von $\frac{b}{R}$ in die Nähe von 3 kömmt.

Zur vollständigen Kenntniss der Gestalt der bewegten Flüssigkeitsmasse ist aber namentlich noch die Kenntniss des Winkels φ nöthig, welchen die an den untersten Elementarkanal durch irgend einen Punkt a gezogene Tangente mit einer Horizontalen bildet. Um diesen

Winkel angenähert zu bestimmen, kann auf folgende Weise verfahren werden. Man denke sich neben der Normalfläche a'a eine zweite, die von der ersten um die unendlich kleinen Grössen dl, dl', dL entfernt sei, und für welche der Werth $\frac{b}{R}$ ebenfalls um die unendlich kleine Grösse $d\frac{b}{R}$ grösser sei, als der entsprechende Werth für die Normalfläche aa'. Alsdann kann man zunächst die Länge der zweiten Normalfläche, die nun gleich b — db sein wird, mittelst obiger Gleichung für b durch $\frac{b}{R}$ und $d\frac{b}{R}$ bestimmen. Ausserdem ergibt sich durch einige einfache geometrische Betrachtungen, und mit Hülfe der oben angeführten Gleichung zur Bestimmung der Geschwindigkeit v', der Satz, dass:

$$\frac{dl'}{dL} = \frac{v_{\prime}}{v'},$$

oder dass die Entfernung der beiden Normalflächen an zwei verschiedenen Stellen sich umgekehrt verhalten wie die an denselben Stellen vorhandenen Geschwindigkeiten. (Siehe Mittheil. der Naturf. Gesellsch. in Zürich, Nr. 47, 1850.) Mittelst dieses Satzes und der oben angegebenen Gleichung für v', und wenn man sich die nicht ganz richtige Annahme erlaubt, dass die Linie a'a ein Kreisbogen sei, können nun auch dl, dl' und dL durch $d\frac{b}{R}$ bestimmt werden. Da nun in der Figur, welche von den beiden Normalflächen und von dL und dl eingeschlossen wird, alle Umfangslinien der Grösse und Gestalt nach und ebenso alle Winkel bekannt sind, so kann auch der Winkel $d\varphi$ bestimmt werden, denn die beiden

Normalflächen oder die an sie gezogenen Tangenten bei dL miteinander bilden. Denkt man sich endlich die ganze flüssige Masse von a,a,' bis aa' mit unendlich vielen, einander unendlich nahe stehenden Normalflächen geschnitten, so kann man alle Winkel, welche je zwei und zwei derselben bei a,a miteinander bilden, durch Integration addiren, und erhält dadurch den ganzen Winkel φ. Entwickelt man die sämmtlichen Funktionen, die sich bei diesen Rechnungen ergeben, in Reihen nach Potenzen von $\frac{b}{R}$, so erhält man:

$$\varphi^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{R}\right)^2 + 0,08889\left(\frac{b}{R}\right)^3 + 0,01058\left(\frac{b}{R}\right)^4 + 0,00051\left(\frac{b}{R}\right)^5 - 0,00002\left(\frac{b}{R}\right)^6 + 0,00001\left(\frac{b}{R}\right)^7 + \ldots\ldots$$

Mittelst dieses Werthes von φ^2 lassen sich nun die Ordinaten und Abscissen des untersten Elementarkanales bestimmen. Nimmt man die Horizontale a,a als Abscissenaxe und a, als den Anfangspunkt der Koordinaten an, so erhält man:

$$y = b,\left\{\frac{1}{3}\frac{b}{R} + 0,01111\left(\frac{b}{R}\right)^2 - 0,00899\left(\frac{b}{R}\right)^3 - 0,00168\left(\frac{b}{R}\right)^4 - 0,00004\left(\frac{b}{R}\right)^5 + 0,00008\left(\frac{b}{R}\right)^6 + \ldots\ldots\right\},$$

$$x - x, = b,\left\{0,57735 \operatorname{logn}\frac{\frac{b}{R}}{\frac{b,}{R,}} - 0,03847\left(\frac{b}{R} - \frac{b,}{R,}\right) - 0,05533\left(\left(\frac{b}{R}\right)^2 - \left(\frac{b,}{R,}\right)^2\right) - 0,00602\left(\left(\frac{b}{R}\right)^3 - \left(\frac{b,}{R,}\right)^3\right) + 0,00090\left(\left(\frac{b}{R}\right)^4 - \left(\frac{b,}{R,}\right)^4\right) + 0,00035\left(\left(\frac{h}{R}\right)^5 - \left(\frac{b,}{R,}\right)^5\right) + \ldots\right\}$$