MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSHCENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

№ 56. 1850.

Prof. Raabe. — Zurückführung der Wurzelform einer algebraischen Gleichung auf die Integration linearer partieller, oder auch eines Systems simultaner gemeiner Differenzialgleichungen erster Ordnung.

(Schluss.)

Auf diesem Wege gelangt man zur partiellen Differenzialgleichung, die φ als Function von b_1, b_2, ... b_{m-1} darzubieten hat. Da aber in dieser Endgleichung die Grösse α oder $\frac{a_1}{m}$ nicht mehr vorkommen darf; so kann die erwähnte Umbildung um ein Bedeutendes vereinfacht werden, wenn, nachdem ähnlich wie vorhin sämmtliche partielle Differenzialquotienten von x_1 hergestellt worden sind, die in denselben explicite noch vorkommende Grösse α durch irgend einen constanten, gegenwärtig durch den Nullwerth ersetzt wird. — Diesem nach wird man statt $\frac{dx_1}{da_1}$ den Ausdruck:

$$-\frac{1}{m}\left\{1 + \binom{m-2}{1} a_2 \frac{d\varphi}{db_2} + \ldots \binom{m-k}{1} a_k \frac{d\varphi}{db_k} + \ldots a_{m-1}\frac{d\varphi}{db_{m-1}}\right\}$$

wie statt der partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{dx_1}{da_2}, \frac{dx_1}{da_3}, \ldots \frac{dx_1}{da_m}$$

bezüglich folgende:

$$\frac{d\varphi}{db_1}, \frac{d\varphi}{db_2}, \ldots \frac{d\varphi}{db_{m-1}}$$

in die allgemeine partielle Differenzialgleichung I. einzuführen, und, nachdem solches geschehen, die Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ bezüglich durch $0, b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ zu ersetzen haben.

Dieses Alles ausgeführt, gelangt man auf folgende lineare partielle Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned}
& S'_{h+1} \frac{d\varphi}{db_1} \\
& + \left(S'_{h+2} + \frac{2}{m} b_1 S'_h\right) \frac{d\varphi}{db_2} \\
& + \left(S'_{h+3} + b_1 S'_{h+1} + \frac{3}{m} b_2 S'_h\right) \frac{d\varphi}{db_3} \\
\text{II.}\quad & + \left(S'_{h+4} + b_1 S'_{h+2} + b_2 S'_{h+1} + \frac{4}{m} b_1 S'_h\right) \frac{d\varphi}{db_4} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left(S'_{h+m-1} + b_1 S'_{h+m-3} + \ldots b_{m-3} S'_{h+1}\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{m-1}{m} b_{m-2} S'_h\right) \frac{d\varphi}{db_{m-1}} = \frac{1}{m} S'_h - \varphi^h,
\end{aligned}$$

wo wir unter S'_λ den Werth von S_λ verstehen, wenn man in dieser $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ bezüglich durch 0, $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ ersetzt.

Der kleinste Werth von m ist hier noch immer gleich 2; die Zahl h endlich ist hier nur angebbarer ganzer Werthe fähig, weil bei der Annahme $h = 0$ die eben gewonnene partielle Differenzialgleichung in die Identität $0 = 0$ übergeht.

6. Bedenkt man, dass gegenwärtig folgende Gleichungen bestehen:

$$S'_0 = m, \quad S'_1 = 0, \quad S'_2 + 2b_2 = 0, \quad S'_3 + 3b_2 = 0,$$

wie für alle Werthe von $r = 4$ bis $r = m$ folgende Bestand hat:

$$S'_r + b_1 S'_{r-2} + b_2 S'_{r-3} + \ldots b_{r-3} S'_2 + r b_{r-1} = 0;$$

so geht die allgemeine partielle Differenzialgleichung in II. bei der Annahme $h = 0$ in folgende über:

$$18)\quad 2b_1 \frac{d\varphi}{db_1} + 3b_2 \frac{d\varphi}{db_2} + 4b_3 \frac{d\varphi}{db_3} + \ldots m b_{m-1} \frac{d\varphi}{db_{m-1}} = \varphi$$

Diese lineare partielle Differenzialgleichung integrirt, erhält man die Bestimmung:

$$19)\qquad \varphi = \sqrt{b_1} \,.\, \varphi'(c_1, c_2, c_3, \ldots c_{m-2}),$$

wo φ' eine auf die Grössen $c_1, c_2, \ldots c_{m-2}$ bezügliche willkührliche Function bedeutet, die wir in der Folge einfach durch φ' andeuten werden. Betreffend diese neu eingeführten Grössen $c_1, c_2, \ldots c_{m-2}$ hat man, wenn k einen der Werthe $1, 2, 3, \ldots m - 2$ vorstellt, die allgemeine Gleichung:

$$20)\qquad c_k = \frac{b^2_{k+1}}{b_1^{k+2}}.$$

Dieses Ergebniss in 19) führt die Eingangs Nr. 2

angeregte Frage wieder einen Schritt näher der Erledigung zu. Mittelst desselben geht nämlich Gleichung 16) in folgende über:

$$16') \qquad x_1 = -\frac{a_1}{m} + \sqrt{b_1} \cdot \varphi'(c_1, c_2, c_3, \ldots c_{m-2}),$$

aus der entnommen wird, dass die Bestimmung von x_1 nur noch von der Ermittelung einer Function φ' abhängig ist, die lediglich noch die $m - 2$ Argumente c_1, c_2, ... c_{m-2} implicirt.

Anmerkung. In dem besondern Falle, wo $m = 2$ ist, stellt die hier eingeführte Function φ' nur noch eine Zahlenconstante vor, d. h. wenn x_1 eine Wurzel der Gleichung des zweiten Grades $x^2 + a_1x + a_2 = 0$ ist, hat man nach 16):

$$x_1 = -\frac{a_1}{2} + c\sqrt{b_1} = -\frac{a_1}{2} + c\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}},$$

wo c die besagte Zahlenconstante ist. Führt man diese Bestimmung der Wurzel in die vorgelegte Gleichung zweiten Grades ein, so gelangt man auf $c^2 + 1 = 0$; und wenn diese Gleichung aufgelöst, und das Ergebniss von c in den vorigen Werth von x_1 eingeführt wird, so gelangt man auf die bekannten Wurzelformen einer Gleichung zweiten Grades.

7. Nach der unmittelbar vorher mitgetheilten Bemerkung dürfen wir die Annahme $m = 2$ nunmehr ausschliessen; so dass in der noch mitzutheilenden Umbildung der partiellen Differenzialgleichung II. der kleinste Zahlenwerth von m gleich 3 anzunehmen ist.

Behufs dieser Umbildung, die uns zur Bestimmung von φ' abermals eine lineare partielle Differentialgleichung darbieten wird, ziehen wir aus 19) die partiellen Differenzialquotienten von φ nach b_1, b_2, ... b_{m-1}, wobei wir auf folgende Gleichungen geführt werden:

$$21)\quad \begin{aligned} \frac{d\varphi}{db_1} &= \frac{1}{\sqrt{b_1}} \left\{ \frac{1}{2}\varphi' - 3c_1 \frac{d\varphi'}{dc_1} - 4c_2 \frac{d\varphi'}{dc_2} \dots - mc_{m-2} \frac{d\varphi'}{dc_{m-2}} \right\} \\ \frac{d\varphi}{db_k} &= 2 \sqrt{\frac{c_{k-1}}{b_1^k}} \cdot \frac{d\varphi'}{dc_{k-1}}, \end{aligned}$$

wo k die Zahlen 2, 3, 4, . . . $m-1$ vorstellt.

Führt man diese Bestimmungen, wie die von φ aus 19) in II. ein, so gelangt man auf eine Bestimmungsgleichung der Function φ'; nun hängt diese lediglich von den neu eingeführten Argumenten $c_1, c_2, \dots c_{m-2}$ ab; — daher darf die in der besagten Bestimmungsgleichung explicite noch vorkommende Grösse b_1 durch jedweden constanten Zahlenwerth, im vorliegenden Fall am bequemsten durch die reelle positive Einheit ersetzt werden. Diesem nach wird man statt $\frac{d\varphi}{db_1}$ den Ausdruck setzen:

$$\frac{1}{2}\varphi' - 3c_1 \frac{d\varphi'}{dc_1} - 4c_2 \frac{d\varphi'}{dc_2} \dots - mc_{m-2} \frac{d\varphi'}{dc_{m-2}},$$

dann:

$$\frac{d\varphi}{db_k} \text{ durch } 2\sqrt{c_{k-1}}\ \frac{d\varphi'}{dc_{k-1}}, \text{ (von } k = 2 \text{ bis } k = m-1)$$

und die Argumente $b_1, b_2, b_3, \dots b_{m-1}$ bezüglich durch $1, \sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \dots \sqrt{c_{m-2}}$ zu ersetzen haben.

Nimmt man alle diese Abänderungen mit der partiellen Differenzialgleichung II. vor, so gelangt man zur Bestimmung von φ' auf folgende lineare partielle Differenzialgleichung:

$$\text{III.}\quad A_1\sqrt{c_1}\frac{d\varphi'}{dc_1} + A_2\sqrt{c_2}\frac{d\varphi'}{dc_2} + A_3\sqrt{c_3}\frac{d\varphi'}{dc_3} + \dots$$
$$\dots A_{m-2}\sqrt{c_{m-2}}\frac{d\varphi'}{dc_{m-2}} = \frac{1}{2m}S''_h - \frac{1}{4}S''_h + {}_1\varphi' - \frac{1}{2}\varphi'^h,$$

wo zur Vereinfachung der Darstellung die Gleichungen festgestellt worden sind:

$$A_1 = S''_{h+2} - \frac{3}{2}\sqrt{c_1}\, S''_{h+1} + \frac{2}{m} S''_h ,$$

$$A_2 = S''_{h+3} + (1 - 2\sqrt{c_2}) S''_{h+1} + \frac{3}{m}\sqrt{c_1}\, S''_h$$

und für alle ganzen Werthe von $k = 3$ bis $k = m - 2$ besteht folgende Gleichung:

$$A_k = S''_{h+k+1} + S''_{h+k-1} + \sqrt{c_1}\, S''_{h+k-2} + \ldots .$$
$$\sqrt{c_{k-3}}\, S''_{h+2} + \left(\sqrt{c_{k-2}} - \frac{k+2}{2}\sqrt{c_k}\right) S''_{h+1} + \frac{k+1}{m}\sqrt{c_{k-1}}\, S''_h$$

In allen diesen Gleichungen stellt S''_λ den Werth von S'_λ dar, wenn in dieser die Argumente b_1. b_2, b_3, . . b_{m-1} bezüglich durch 1, $\sqrt{c_1}$, $\sqrt{c_2}$, . . . $\sqrt{c_{m-2}}$ ersetzt werden; der kleinste Werth der hier auftretenden ganzen Zahl m ist 3; die Zahl h endlich ist mit Ausnahme des Nullwerthes wie der positiven Einheit, für welche Werthe die Gleichung III. auf Identitäten führt, aller übrigen ganzen Zahlenwerthe fähig. Schliesslich bemerke ich noch, dass dort, wo man bei einer speciellen Verfügung über m oder h auf c_0 geführt wird, diese durch die reelle positive Einheit, wie jedes c_{-k} durch die Null zu ersetzen ist.

Anmerkung. Die partielle Differenzialgleichung III. ist es, auf die ich bis jetzt gelangen konnte; ihre Integration verlangt, wie bekannt, die vollständige Integration eines Systems $m - 2$ simultaner gemeiner Differenzialgleichungen, welches Endziel ich jedoch bis jetzt vergebens angestrebt habe.