nen.*) Dagegen scheinen sie geeignet, um zu einer genauern Kenntniss der molecularen Kräfte selber zu führen, wenn man jenes Verhältniss anderweitig bestimmt hat.

Prof. Raabe. — Zurückführung der Wurzelform einer algebraischen Gleichung auf die Integration linearer partieller, oder auch eines Systems simultaner gemeiner Differenzialgleichungen erster Ordnung.

(Vorgelegt den 2. December 1850.)

1. Wenn wir die allgemeine Form einer algebraisch rationalen Gleichung des m-ten Grades folgendermassen feststellen:

$$1)\qquad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots a_{m-1} x + a_m = 0,$$

so denken wir uns unter den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_m$ beliebige, von x independente Zahlengrössen, die unter einander in keinerlei gegenseitiger Beziehung stehen.

Wenn die m Wurzeln der Gleichung 1) durch x_1, x_2, x_3, ... x_m repräsentirt werden, so ist bekanntlich irgend einer der Coefficienten in 1), etwa a_k, wenn derselbe noch mit $(-1)^k$ multiplicirt wird, der Summe aller Combinationen besagter m Wurzeln zur k-ten Klasse, ohne Wiederholungen gleich, falls nämlich die

---

*) Natürlich bezieht sich diese Bemerkung nicht auf die von W. Weber in Pogg. Ann. Bd. XX mitgetheilte Methode, weil dort die Schwingungsbeobachtungen nur zur Bestimmung der Spannungsänderung dienen.

in jeder Combinationsgruppe vorkommenden k Wurzeln, als gegenseitige Faktoren auftreten.

Dieses vorausgesetzt, stellen wir die Gleichung des $(m - 1)$-ten Grades, welche mit Ausnahme der einen Wurzel x_p, wo p aller Werthe von 1 bis m fähig ist, alle übrigen Wurzeln mit der Gleichung 1) gemein hat, durch:

$$2) \quad x^{m-1} + (p)_1 x^{m-2} + (p)_2 x^{m-3} + \ldots (p)_{m-2} x + (p)_{m-1} = 0$$

dar; so bestehen unter den Coefficienten $(p)_1$, $(p)_2$, $(p)_3$, ... $(p)_{m-1}$ dieser, und denen a_1, a_2, a_3, ... a_m der vorgelegten Gleichung 1) folgende einfache Relationen:

$$3) \quad \begin{aligned} a_1 &= (p)_1 - x_p, \\ a_2 &= (p)_2 - x_p(p)_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k &= (p)_k - x_p(p)_{k-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m &= - x_p(p)_{m-1}, \end{aligned}$$

wo die ganze und positive Zahl k aller Werthe von 2 bis $m - 1$ fähig, und wo irgend ein Symbol $(p)_r$ die Wurzel x_p nicht enthält.

Aus diesen Relationen in 3) zieht man nach und nach, wenn von der ersten ausgegangen wird, folgende:

$$4) \quad \begin{aligned} (p)_1 &= a_1 + x_p, \\ (p)_2 &= a_2 + a_1 x_p + x_p^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p)_{m-1} &= a_{m-1} + a_{m-2} x_p + a_{m-3} x_p^2 + \ldots a_1 x_p^{m-2} + x_p^{m-1} \end{aligned}$$

geht man hingegen von der letztern unter den Relationen in 3) aus, so gelangt man auf folgende Gleichungen:

$$(p)_{m-1} = -\frac{a_m}{x_p},$$

$$(p)_{m-2} = -\frac{a_m}{x_p^2} - \frac{a_{m-1}}{x_p},$$

$$(p)_{m-3} = -\frac{a_m}{x_p^3} - \frac{a_{m-1}}{x_p^2} - \frac{a_{m-2}}{x_p},$$

u. s. w.

von welchen wir jedoch im Folgenden keinerlei Gebrauch machen werden.

Die hier aufgestellten Ergebnisse setzen stillschweigend voraus, dass der Grad der Gleichung 1), oder dass die Zahl m mindestens gleich 2 ist.

2. Irgend eine Wurzel der Gleichung 1), z. B. die Wurzel x_1, kann als Function der Coefficienten a_1, a_2, a_3, . . . a_m angesehen werden. Denkt man sich in dieser zwar unbekannten Function eben diese Coefficienten durch die bekannten symmetrischen Functionen der Wurzeln — wie sie etwa die Gleichungen 3) angeben — ersetzt; so darf die zuerst erwähnte Darstellungsgleichung von x_1 nach jeder der m Wurzeln für sich, oder partiell differenzirt werden.

Wird diese partielle Differenziation zuerst nach x_1 vollzogen, so gelangt man zunächst auf:

$$1 = \frac{dx_1}{da_1}\frac{da_1}{dx_1} + \frac{dx_1}{da_2}\frac{da_2}{dx_1} + \frac{dx_1}{da_3}\frac{da_3}{dx_1} + \ldots \frac{dx_1}{da_m}\frac{da_m}{dx_1},$$

wenn aber in den Gleichungen 3) $p = 1$ angenommen wird, so zieht man aus denselben:

$$\frac{da_1}{dx_1} = -1, \quad \frac{da_2}{dx_1} = -(1)_1, \quad \frac{da_3}{dx_1} = -(1)_2, \ldots .$$

$$\frac{da_m}{dx_1} = -(1)_{m-1};$$

folglich geht das vorhergehende partielle Differenziationsergebniss über in:

$$5)\quad \frac{dx_1}{da_1} + (1)_1 \frac{dx_1}{da_2} + (1)_2 \frac{dx_1}{da_3} + \ldots (1)_{m-1} \frac{dx_1}{da_m} = -1.$$

Wird ferner dieselbe, am Eingange gedachte Bestimmungsgleichung für x_1 nach x_2 partiell differenzirt, so gelangt man, weil x_1 von x_2 unabhängig ist, zunächst auf:

$$0 = \frac{dx_1}{da_1}\frac{da_1}{dx_2} + \frac{dx_1}{da_2}\frac{da_2}{dx_2} + \frac{dx_1}{da_3}\frac{da_3}{dx_2} + \ldots \frac{dx_1}{da_m}\frac{da_m}{dx_2},$$

nimmt man in den Relationen 3) $p = 2$ an, so zieht man aus denselben:

$$\frac{da_1}{dx_2} = -1,\quad \frac{da_2}{dx_2} = -(2)_1,\quad \frac{da_3}{dx_2} = -(2)_2, \ldots .$$

$$\frac{da_m}{dx_2} = -(2)_{m-1};$$

folglich geht das vorhergehende partielle Differenziationsergebniss über in:

$$6)\quad \frac{dx_1}{da_1} + (2)_1 \frac{dx_1}{da_2} + (2)_2 \frac{dx_1}{da_3} + \ldots (2)_{m-1} \frac{dx_1}{da_m} = 0.$$

Wird weiter dieselbe gedachte Bestimmungsgleichung nach x_3 partiell differenzirt, so gelangt man ähnlich wie zu den eben aufgestellten auf die folgende Gleichung:

$$7)\quad \frac{dx_1}{da_1} + (3)_1 \frac{dx_1}{da_2} + (3)_2 \frac{dx_1}{da_3} + \ldots (3)_{m-1} \frac{dx_1}{da_m} = 0.$$

Wenn in dieser Weise fortgefahren wird, so gelangt man zuletzt auf das partielle Differenziationsergebniss nach x_m, welches folgender Form ist:

$$8)\quad \frac{dx_1}{da_1} + (m)_1 \frac{dx_1}{da_2} + (m)_2 \frac{dx_1}{da_3} + \ldots (m)_{m-1} \frac{dx_1}{da_m} = 0.$$

Multiplicirt man diese durch partielle Differenziationen nach x_1, x_2, x_3, ... x_m in 5), 6), 7), ..., 8) aufgestellten Ergebnisse nach der Ordnung ihrer Folge mit x_1^h, x_2^h, x_3^h, ... x_m^h, und stellt hierauf ihre Summe her, so stellt sich folgendes Summenergebniss heraus:

$$\frac{dx_1}{da_1}\sum_{p=1}^{p=m} x_p^h + \frac{dx_1}{da_2}\sum_{p=1}^{p=m}(p)_1 x_p^h$$

$$+ \ldots \frac{dx_1}{da_m}\sum_{p=1}^{p=m}(p)_{m-1}\, x_p^h = -\, x_1^h,$$

wo die angedeuteten Summenzeichen über alle ganzen Zahlenwerthe von 1 bis m sich erstrecken, und wo wir unter h irgend eine ganze Zahl, Null mitbegriffen, verstehen.

Ersetzt man hier die Symbole $(p)_1$, $(p)_2$, ... $(p)_{m-1}$ gemäss den Gleichungen 4), und führt folgende abkürzende Bezeichnung ein:

$$9)\quad S_\lambda = x_1^\lambda + x_2^\lambda + x_3^\lambda + \ldots x_m^\lambda$$

so stellt sich das zuletzt gewonnene Summenergebniss folgendermassen dar:

$$\begin{aligned}
& S_h \frac{dx_1}{da_1} \\
& + \left(S_{h+1} + a_1 S_h\right)\frac{dx_1}{da_2} \\
& + \left(S_{h+2} + a_1 S_{h+1} + a_2 S_h\right)\frac{dx_1}{da_3} \\
\text{I.}\quad & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \Big(S_{h+m-1} + a_1 S_{h+m-2} + \ldots\, a_{m-2} S_{h+1} \\
& \qquad + a_{m-1} S_h\Big)\frac{dx_1}{da_m} = -\, x_1^h,
\end{aligned}$$

wo der geringste Werth von m, wie schon erwähnt ward, gleich 2 ist, wo aber h aller ganzen, positiven wie negativen Werthe, wie auch des Nullwerthes fähig ist. —

Bekanntlich ist S_λ, falls λ irgend eine ganze Zahl, Null mitbegriffen, ist, durch die Coefficienten wie durch die Gradzahl m der Gleichung 1) darstellbar; daher haben wir in I. eine lineare partielle Differenzialgleichung zwischen der Wurzel x_1, als der relativen Variable, und den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_m$ der Gleichung 1), als den absoluten Variabeln, gewonnen, die von nicht unbedeutendem Werthe bei der Bestimmung der Wurzelform einer Gleichung des m-ten Grades unzweifelhaft ist. Wird ferner die oben angedeutete Willkührlichkeit der Zahl h in Betracht gezogen, so nimmt man weiter die unendliche Mannigfaltigkeit dieser aus I. zu ziehenden linearen partiellen Differenzialgleichungen ab; von denen jedoch, wie sich von selbst versteht, bloss m unter einander wesentlich verschiedene sein werden.

3. Ehe wir zu einer nähern Discussion der partiellen Differenzialgleichung in I. übergehen, theilen wir die bekannten Relationen mit, die zur Bestimmung von S_λ aus Gleichung 9) führen.

Erstens hat man, wie aus Gleichung 9) unmittelbar entnommen wird:

10) $$S_0 = m.$$

Zweitens besteht für alle ganzen und positiven Werthe von $r = 1$ bis $r = m$ die Recursion:

11) $$S_r + a_1 S_{r-1} + a_2 S_{r-2} + \ldots a_{r-1} S_1 + r a_r = 0.$$

Drittens hat man für alle ganzen Werthe von r die Recursion:

$$12)\quad S_{m+r} + a_1 S_{m+r-1} + a_2 S_{m+r-2} + \ldots a_m S_r = 0,$$

die, wenn r positiv gedacht wird, als Ergänzung von 11) zur Bestimmung von S_λ, falls λ ganz und positiv, anzusehen ist.

Viertens zieht man aus 12), wenn r negativ und ganz, aber numerisch kleiner oder höchstens gleich m ist, mit Zuziehung der Gleichungen 10) und 11), folgende Recursion:

$$13)\ a_m S_{-r} + a_{m-1} S_{-r+1} + \ldots a_{m-r+1} S_{-1} + r a_{m-r} = 0.$$

Fünftens wird ebenfalls aus 12), wenn r durch — m — r ersetzt wird, folgende Recursion gezogen:

$$15)\quad a_m S_{-m-r} + a_{m-1} S_{-m-r+1} + a_{m-2} S_{-m-r+2}$$
$$+ \ldots a_1 S_{-r-1} + S_{-r} = 0,$$

die mit der vorhergehenden vereint, zur Bestimmung von $S_{-\lambda}$ für alle ganzen und positiven Werthe von λ gebraucht werden kann.

4. Wird nun in der allgemeinen linearen partiellen Differenzialgleichung I. die Annahme h = 0 gemacht, so nimmt solche beachtend die Gleichungen 10) und 11) vorangehender Nr. folgende höchst einfache Form an:

$$15)\quad m \frac{dx_1}{da_1} + (m-1)\, a_1 \frac{dx_1}{da_2} + (m-2)\, a_2 \frac{dx_1}{da_3}$$
$$+ \ldots 1 \cdot a_{m-1} \frac{dx_1}{da_m} = -1.$$

Integrirt man diese nach der von Lagrange herrührenden Verfahrungsweise, welche ich in Nr. 567 meiner Integralrechnung ebenfalls mitgetheilt habe, so gelangt man mit Uebergehung aller Zwischenrechnungen auf folgende Integralgleichung:

$$16)\qquad x_1 = -\frac{a_1}{m} + \varphi(b_1, b_2, b_3, \ldots b_{m-1}),$$

wo das zweite Glied rechterhand vom Gleichheitszeichen eine willkührliche Function der $m - 1$ Grössen b_1, b_2, b_3, ... b_{m-1} vorstellt, die wir in der Folge einfach durch φ darstellen werden. Betreffend die Grössen b_1, b_2, b_3, ... b_{m-1}, hängen solche von den Coefficienten der vorgelegten Gleichung 1) in der Weise ab, dass wenn k einen der Zeiger 1, 2, 3, ... $m - 1$ vorstellt, die Grösse b_k durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$17)\quad b_k = a_{k+1} - a_k \binom{m-k}{1}\frac{a_1}{m} + a_{k-1}\binom{m-k+1}{2}\left(\frac{a_1}{m}\right)^2$$

$$-\ldots\ldots(-1)^{k-1}a_2\binom{m-2}{k-1}\left(\frac{a_1}{m}\right)^{k-1} + (-1)^k k\binom{m}{k+1}\left(\frac{a_1}{m}\right)^{k+1},$$

wo ein Symbol wie $\binom{p}{k}$ den Coefficienten von x^k in der Entwickelung des Binoms $(1 + x)^p$ vorstellt.

Dieses Ergebniss in 16) erledigt zum Theil die am Eingange in Nr. 2 angeregte Frage, welche die Darstellung einer Wurzel x_1 der in Rede stehenden algebraischen Gleichung, als Function ihrer m Coefficienten a_1, a_2, ... a_m verlangt. Wir ersehen nämlich aus diesem Ergebnisse, dass besagte Wurzel von einer Function φ noch abhängig ist, die bloss die $m - 1$ Argumente b_1, b_2, ... b_{m-1} involvirt, deren allgemeiner Repräsentant durch b_k in Gleichung 17) gegeben ist. Ueberdiess nehmen wir aus demselben Ergebnisse in 16) ab, dass das bei den Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades übliche Verfahren, das zweite Glied, ehe zu deren Lösung geschritten wird, wegzuschaffen, allgemein bei jeder Gleichung zu befolgen sei, worauf namentlich das Glied $-\frac{a_1}{m}$ in Gleichung 16) hinweist. Ersetzt man nämlich in der vorgelegten m gradigen Gleichung 1) die Unbekannte x durch $-\frac{a_1}{m}+\varphi$, so erhält man in Bezug auf φ abermals eine Gleichung m-ten Grades, in der das zweite Glied fehlt, und in der die Coefficienten der übrigen Glieder genau die durch $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ vorgestellten Grössen sind; daher auch der Werth von φ eine Function dieser $m-1$ Argumente sein muss.

5. Die allgemeine partielle Differenzialgleichung I. sind wir nun mittelst des Ergebnisses in 16) in eine analoge umzubilden im Stande, in der φ die relative Variable, und die $m-1$ Argumente $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ die absoluten Variabeln vorstellen.

Man wird zu diesem Zwecke die partiellen Differenzialquotienten von x_1 nach $a_1, a_2, \ldots a_m$ aus 16) ziehen; so z. B. wird man:

$$\frac{dx_1}{da_3}=\frac{d\varphi}{db_2}-\binom{m-3}{1}\alpha\frac{d\varphi}{db_3}+\binom{m-3}{2}\alpha^2\frac{d\varphi}{db_4}$$
$$-\ldots(-1)^{m-3}\alpha^{m-3}\frac{d\varphi}{db_{m-1}}$$

finden, wo man Kürze halber α statt $\frac{a_1}{m}$ gesetzt hat. Diese Bestimmung, wie die der übrigen partiellen Differenzialquotienten, die man in ähnlicher Weise aus 16) ziehen kann, wird man in die allgemeine partielle Differenzialgleichung I. einführen, und hierauf die Grössen $a_2, a_3, \ldots a_m$ der allgemeinen Gleichung 17) gemäss als Functionen von $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ und α ersetzen.

(Schluss folgt in nächster Nummer.)