MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSHCENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

№ 55. 1850.

Jac. Amsler, über die Anwendung von Schwingungsbeobachtungen zur Bestimmung der spezifischen Wärme fester Körper bei constantem Volumen.

(Vorgetragen den 25. November 1850.)

Wertheim*) bestimmte für nachgenannte Metalle aus einer grossen Anzahl sehr sorgfältig angestellter Beobachtungen die Elasticitätscoefficienten theils nach der Methode der Verlängerung, theils nach der Methode der Schwingungen. Fast ohne Ausnahme lieferte die letztere grössere Werthe, als die erstere. Wertheim schrieb den Unterschied auf Rechnung der durch Compression frei werdenden Wärme. Unter dieser Voraussetzung suchte er aus der Combination der beiden Beobachtungsreihen das Verhältniss der spezifischen Wärme bei constantem Druck zur spezifischen Wärme bei constantem Volumen zu berechnen, ganz analog dem von Dulong für die Gase angewendeten Verfahren. Folgende Tabelle enthält die von ihm gefundenen Zahlen:

*) Annales de chim. et de phys. T. XII.

	Elasticitätscoefficienten aus Verlängerung = q	aus Schwingungen = q'	k	h
Blei, gegossen	1775	1993,4	1,4417	74,10
gezogen	1803	2278	1,2718	— 1,14
angelassen	1827,5	2146	1,4356	— 1,33
Silber, gezogen	7357,7	7576	1,0524	+ 1,35
angelassen	7140,5	7242	1,2540	1,14
Gold, gezogen	8131,5	8599	1,1035	1,96
angelassen	5584,6	6372	1,2540	— 7,69
Zink, gegossen	9021	9338	1,0628	+ 1,44
gezogen	8734,5	9555	1,1690	4,42
Kupfer, gezogen	12449	12536	1,0158	1,07
angelassen	10519	12540	1,1595	— 2,22
Gussstahl, gezg.	19549	19823	1,0252	+ 1,14
angelassen	19561	19828	1,0245	1,14
Stahldraht,	18809	19445	1,0605	1,42
angelassen	17278	19200	1,2001	27,20
Platindraht,	17044	17165	1,0130	1,07
angelassen	15518	15611	1,0105	1,05
Messing, gezog.	8543	10163		— 2,31
Krystallglas,	4088,8	5409,4		— 8,36
Eisen, gezogen	20869	19903		
angelassen	20794	19925		

Die Beobachtungen für Messing und Glas sind einer spätern Abhandlung Wertheims entnommen.*) Die mit k bezeichnete Columne enthält die von Wertheim für das Verhältniss der beiden spezifischen Wärmen angegebenen Werthe. Er berechnete sie nach der Formel

$$h = 1{,}8 \left(\frac{q'}{q}\right) - 0{,}8$$

Er scheint dazu gekommen zu sein durch Anwendung des Poisson'schen Satzes, dass die Schallgeschwindigkeit in einer unbegränzten Masse sich zu der in einem dünnen Stabe verhält, wie $\sqrt{\frac{6}{5}} : 1$. Allein dieser Satz ist, unter Zulassung der Poisson'schen Elasticitätstheorie, nur dann richtig, wenn $k = 1$ gesetzt wird. Die von Wertheim angewendete Formel ist daher falsch. — Wir wollen die strenge Formel entwickeln unter folgender allgemeinen Voraussetzung: wenn ein cylindrischer Stab in der Richtung der Axe einen Druck erleidet, sind die Veränderungen der Längeneinheit, $\frac{\Delta L}{L}$, und der Aenderung der Volumeneinheit, $\frac{\Delta V}{V}$, dem Drucke proportional, und es findet zwischen ihnen die Relation statt

$$\frac{1}{m} \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta V}{V}$$

wo m eine Constante ist. Poisson setzte bekanntlich $m = 2$ in Uebereinstimmung mit den Versuchen von Cagniard-Latour; Wertheim**) dagegen fand aus eigenen Versuchen $m = 3$ als wahrscheinlichsten Werth. —

*) Annales de chim. et de phys. T. XXIII.

**) Ibid.

Wir betrachten ein Element, das von zwei auf die Axe senkrechten Ebenen begränzt wird. Seien l, f, v beziehlich Länge, Querschnitt und Volumen dieses Elements, q der Elasticitätscoefficient, so erzeugt ein in der Richtung der Axe wirkender Druck P eine Volumenänderung $= -\frac{Pv}{mqf}$, vorausgesetzt, dass bei der Compression die Temperatur constant erhalten wird. Bleibt aber die Wärmemenge des Elementes unverändert, so ändert sich in Folge der Compression seine Temperatur um t Grade. Bezeichnet α den linearen Ausdehnungscoefficienten, so wird sein Volumen überhaupt die Aenderung $\varDelta v$ erfahren, wenn

$$1)\qquad \frac{\varDelta v}{v} = -\frac{P}{mqf} + 3\alpha t$$

Den Zustand des Elementes kann man sich auch so erzeugt denken: erst theilt man ihm eine solche Wärmemenge ω mit, dass sein Volumen gerade in $v + \varDelta v$ übergeht. Lässt man nun den Druck P wirken, und entzieht gleichzeitig dem Elemente wieder dieselbe Wärmemenge ω, so wird sein Volumen nicht weiter verändert. Sei ε die specifische Wärme bei constantem Druck, η die specifische Wärme bei constantem Volumen, ϱ die Dichtigkeit, so wird die Mittheilung der Wärme ω eine Temperaturerhöhung um $\frac{\omega}{\varepsilon v \varrho}$, also eine Volumenänderung

$$2)\qquad \frac{\varDelta v}{v} = \frac{3\alpha\omega}{\varepsilon v \varrho}$$

zur Folge haben. Die Wärmemenge ω wird nun bei constantem Volumen des Elementes entzogen; die Temperatur wird also wieder sinken um $\frac{\omega}{\eta v \varrho}$. Die ganze Temperaturzunahme wird also sein:

3) $$t = \frac{\omega}{\varepsilon v \varrho} - \frac{\omega}{\eta v \varrho}$$

Aus den Formeln 1, 2, 3 zieht man

$$\begin{aligned} \alpha t &= \frac{1}{3} \frac{\varDelta v}{v} \left(1 - \frac{\eta}{\varepsilon}\right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{p}{mqf} \left(1 - \frac{\eta}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Die Längenänderung des Elementes ist

$$\frac{\varDelta l}{l} = - \frac{p}{qf} + \alpha t$$

also wird

$$\frac{\varDelta l}{l} = - \frac{p}{3mqf} \left(3m - 1 + \frac{\eta}{\varepsilon}\right)$$

Setzt man

$$q' = \frac{3mq}{3m - 1 + \frac{\eta}{\varepsilon}}$$

so ist

$$p = - \frac{dl}{l} q'$$

Hieraus leitet man nun leicht auf bekannte Weise die Differentialgleichung für die Longitudinalschwingungen eines dünnen Stabes ab. Sei x die Entfernung des Elementes v vom Ende des Stabes im Zustande des Gleichgewichtes, x + u seine Entfernung zu einer beliebigen Zeit ϑ, so erhält man

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} = \frac{q'}{\varrho} \frac{d^2u}{dx^2}$$

$v' = \sqrt{\frac{q'}{\varrho}}$ ist bekanntlich die Geschwindigkeit, mit welcher der Schall sich im Stabe fortpflanzt, und lässt sich leicht aus der Schwingungsdauer ableiten.

Hat man v' und ϱ beobachtet, so erhält man $q' = \varrho v'^2$, was man uneigentlich den aus Longitudinalschwingungen bestimmten Elasticitätscoefficienten nennt. Auf diese Weise sind die in der Tabelle für q' angegebenen Werthe bestimmt.

Aus dem Ausdrucke für q' folgt

$$\frac{1}{k} = \frac{\eta}{\varepsilon} = 3m \left(\frac{q}{q'}\right) - 3m + 1$$

Dieses ist die gesuchte Formel zur Berechnung von $\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)$. Mit Hülfe derselben ergeben die Wertheim'schen Beobachtungen für $m = 3$ die in der Tafel in der mit h bezeichneten Columne enthaltenen Werthe. Der grösste Theil derselben liegt aber ausser aller Wahrscheinlichkeit, oder ist geradezu unmöglich. Die direkte Beobachtung zeigt nämlich, dass unter gewöhnlichen Verhältnissen durch Compression Wärme frei wird; es muss also $\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)$ positiv und < 1 sein. Die Tabelle zeigt aber mehrere negative Wertbe, und darunter gerade für die am sorgfältigsten untersuchten Körper, Messing und Glas. — Für Eisen würde $\frac{\eta}{\varepsilon} > 1$. — Für $m = 2$ erhält man wenig wahrscheinlichere Zahlen.

Die Ursachen dieses höchst auffallenden Verhaltens verdienen näher untersucht zu werden. An der Zuverlässigkeit der Beodachtungen darf nicht gezweifelt werden. — Vielleicht kann eine der folgenden Bemerkungen zur Erklärung führen:

1) Die abgeleitete Formel beruht auf der Voraussetzung, dass das Element v seine Temperatur nicht ändert, wenn es beliebigen Kräften unterworfen wird, die seine Form, nicht aber sein Volumen ändern. — Die Richtigkeit dieser, allerdings höchst wahrscheinlichen Annahme, ist noch durch keine Versuche erwiesen.

2) Es ist möglich, dass bei festen Körpern, welche einem einseitigen Drucke unterworfen sind, der Ausdehnungscoefficient α in der Richtung des Druckes ein anderer ist, als in einer darauf senkrechten Richtung.

1) Am wahrscheinlichsten dürfte die Annahme sein, dass die durch Verlängerung bestimmten Elasticitätscoefficienten, ausser für Eisen, sämmtlich zu klein sind, nämlich in folgendem Sinne: Es ist wahrscheinlich, dass die einer gewissen Anspannung entsprechende Verlängerung nicht augenblicklich eintritt (abgesehen von dem Einflusse der Trägheit der Masse). Dass dieses bei der bleibenden Dehnung der Fall ist, ist bekannt; dass es bei vorübergehenden Verlängerungen statt finde, darauf scheinen einzelne Erfahrungen wenigstens hinzudeuten. — Es wird unter dieser Voraussetzung einer bestimmten momentanen Verlängerung eine grössere Anspannung entsprechen, als die ist, welche bei längerer Dauer (wie die Bestimmung von q sie immer erfordert) dieselbe Verlängerung hervorbringen würde. — Ausser beim Eisen könnten so alle, sowohl die negativen als die übermässig grossen Werthe von h, erklärt werden.

Wie dem nun sei, jedenfalls ist aus dem Gesagten so viel klar, dass bei unsrer gegenwärtigen Kenntniss der molecularen Kräfte, Schwingungsbeobachtungen **nicht** zu einer zuverlässigen Bestimmung des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen benutzt werden können.*) Dagegen scheinen sie geeignet, um zu einer genauern Kenntniss der molecularen Kräfte selber zu führen, wenn man jenes Verhältniss anderweitig bestimmt hat.

Prof. Raabe. — Zurückführung der Wurzelform einer algebraischen Gleichung auf die Integration linearer partieller, oder auch eines Systems simultaner gemeiner Differenzialgleichungen erster Ordnung.

(Vorgelegt den 2. December 1850.)

1. Wenn wir die allgemeine Form einer algebraisch rationalen Gleichung des m-ten Grades folgendermassen feststellen:

$$1)\qquad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots a_{m-1} x + a_m = 0,$$

so denken wir uns unter den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_m$ beliebige, von x independente Zahlengrössen, die unter einander in keinerlei gegenseitiger Beziehung stehen.

Wenn die m Wurzeln der Gleichung 1) durch x_1, $x_2, x_3, \ldots x_m$ repräsentirt werden, so ist bekanntlich irgend einer der Coefficienten in 1), etwa a_k, wenn derselbe noch mit $(-1)^k$ multiplicirt wird, der Summe aller Combinationen besagter m Wurzeln zur k-ten Klasse, ohne Wiederholungen gleich, falls nämlich die

---

*) Natürlich bezieht sich diese Bemerkung nicht auf die von W. Weber in Pogg. Ann. Bd. XX mitgetheilte Methode, weil dort die Schwingungsbeobachtungen nur zur Bestimmung der Spannungsänderung dienen.