zogenen Satzes über den wahrscheinlichsten Werth einer Reihe als gleichberechtigt erklärter Beobachtungen derselben Grösse folgt keineswegs die Unrichtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate, weil dieser Satz nur zur Bestimmung der in die Rechnung übergehenden Werthe dient, und weil durch die nachherige Behandlung die daher rührenden Fehler möglicherweise beseitigt werden. So in allen einfachen Fällen. Wenn dagegen wegen verschiedener Natur der Beobachtungen die gegenseitigen Gewichte bestimmt werden müssen, dann greift allerdings obiger modifizirter Satz in das Gefüge der Rechnung ein; er wird darum auch zu neuen Untersuchungen veranlassen.

Prof. Deschwanden, — zur krummlinigen Bewegung der Flüssigkeiten.

(Vorgelegt den 18. März 1850).

Die folgenden Untersuchungen sollen eine Ergänzung meiner früher veröffentlichten Abhandlung über die krummlinige Bewegung von Flüssigkeiten sein und schliessen sich daher der äussern Form nach in der Bezeichnung und Benennung der verschiedenen, in den Rechnungen vorkommenden Grössen genau an dieselbe an.

Ausser den allgemein bekannten Gesetzen, welchen die Bewegungen der Flüssigkeiten unterworfen sind, zeigte jene Abhandlung vorzüglich, was für Beziehungen zwischen den an verschiedenen Punkten einer bewegten flüssigen Masse herrschenden Geschwindigkeiten, sowie, was für ein Verhältniss zwischen der Grösse der verschiedenen Normalflächen einer solchen Masse bestehen. Durch die folgenden Betrachtungen soll dagegen versucht werden, auch noch die Gestalt der Normalflächen, sowie die Gestalt und Grösse der Elementarkanäle näher zu bestimmen. Sollte dieses gelingen, so wären hiermit alle wesentlichen Elemente der Bewegung der Flüssigkeiten mit genauerer oder entfernterer Annäherung bestimmt. Es muss zwar gleich zum Voraus zugegeben werden, dass die Ergebnisse dieser Untersuchungen jedenfalls nicht hinreichend sein werden, die Aufgabe, die Bewegung flüssiger Körper zu bestimmen, in ihrer ganzen Allgemeinheit aufzulösen. Allein dieselben dürften doch zur Bestimmung mehrerer Arten dieser Bewegung genügend sein und somit immerhin einiges Licht suf derartige Erscheinungen werfen.

Bevor auf den Hauptgegenstand eingetreten werden kann, muss eine Voruntersuchung angestellt werden.

Man nehme zu diesem Zwecke zwei nahe bei einanderliegende Normalflächen einer sich bewegenden Flüssigkeitsmasse an. Da eine jede dieser Flächen alle Elementarkanäle der Flüssigkeit in je einem Punkte schneiden wird, so befindet sich von jedem Elementarkanale ein gewisses Stück zwischen den beiden Normalflächen. Sind diese letztern unendlich nahe bei einander, so ist die Länge dieser Stücke gleich der normalen Entfernung, um welche die beiden Normalflächen an verschiedenen Stellen von einander entfernt sind; sowohl in diesem Falle aber, als auch bei einer endlichen Entfernung der beiden Normalflächen von einander, haben die von den verschiedenen Elementarkanälen abgeschnittenen Stücke im Allgemeinen ungleiche Grösse. Es zeigt sich nun durch folgende einfachen Beobachtungen, dass unter den analogen Dimensionen dieser Stücke ein sehr einfaches Verhältniss besteht.

Die Linien abcdef... und $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$... F(1) seien die Durchschnitte der beiden Normalflächen mit der

Ebene, in welcher die an dieser Stelle befindlichen Elementarkanäle liegen, und aa_1, bb_1, cc_1 ..... seien die Durchschnitte der Grenzflächen der Elementarkanäle mit dieser Ebene, so dass ab, bc, cd .... die Höhen und aa_1, bb_1, cc, ... die Längen der zwischen den beiden Normalflächen liegenden Stücke der Elementarkanäle bedeuten. Sowohl diese Längen, als jene Höhen, seien unendlich kleine Grössen.

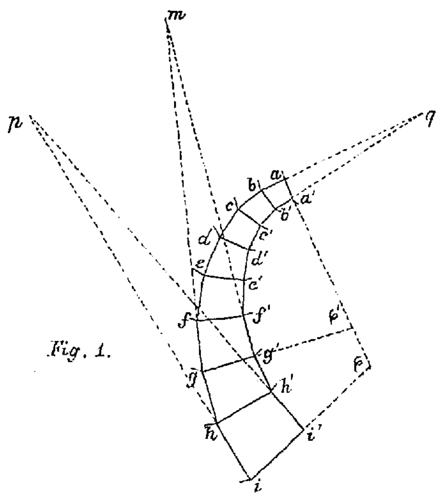


Fig. 1.

Um nun das Verhältniss kennen zu lernen, in welchem die Längen ff_1 und gg_1 der zwischen den Normalflächen liegenden Stücke zweier unmittelbar aufeinander folgender Elementarkanäle zu einander stehen, verlängere man die Linien fg und f_1g_1 his zu ihrem Durchschnittspunkte in m. Da nun ff_1 senkrecht auf fm steht, und gg_1 nur einen unendlich kleinen Winkel mit ff_1 bildet, so kann man die Dreiecke mff_1 u. mgg_1 als einander ähnlich annehmen und daher die Proportion

$$ff_1 : gg_1 = fm : gm$$

aufstellen. Bezeichnet man nun ff_1 als ein unendlich kleines Stück der Länge l^1 eines Elementarkanales, mit dl^1, so kann gg_1 mit $dl^1 + d^2l^1$ bezeichnet werden. Ebenso kann fg mit db^1 bezeichnet werden, wenn die Länge der ganzen Linie abc...f mit b^1 bezeichnet wird. Ferners soll fm, als Krümmungshalbmesser der Linie ff_1 im Punkte f, mit r^1 u. gm, mithin durch $r^1 + db^1$ bezeichnet werden. Führt man alle diese Bezeichnungen in diese Proportion ein und berechnet man daraus das Verhältniss $\frac{d^2l^1}{dl^1}$, so erhält man: $\frac{d^2l^1}{dl^1} = \frac{db^1}{r^1}$.

Bezeichnet man endlich noch das Längenstück aa_1 des ersten Elementarkanales auf der hohlen Fläche der Flüssigkeitsmasse mit dl und integrirt diese Gleichung zwischen den Grenzen dl u. dl^1 einerseits, und o u. b^1 anderseits, so erhält man:

$$\text{logn.}\,\frac{dl^1}{dl} = \int_0^{b^1} \frac{db^1}{r^1}.$$

Nun hat man aber für eine Flüssigkeitsmasse, welche aus einem Behälter mit ruhendem Flüssigkeitsspiegel herfliesst, auch die Gleichung:

$$\text{logn.}\,\frac{v}{v^1} = \int_0^{b^1} \frac{db^1}{r^1}$$

wo v und v^1 die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in den Elementarkanälen aa_1 und ff_1 bezeichnen (siehe Gl. 11 d. Abhdl. über d. Bew. d. Flüssigk.). Daher erhält man nun aus diesen beiden Gleichungen die Beziehung:

$$(1) \qquad . \quad . \qquad \frac{dl^1}{dl} = \frac{v}{v^1}$$

d. h. die normalen Entfernungen, um welche zwei unendlich nahe bei einander befindliche Normalflächen an verschiedenen Stellen von einander abstehen, sind verkehrt proportional mit den Geschwindigkeiten, welche die Flüssigkeit an diesen Stellen besitzt.

Giebt man allen Elementarkanälen einen solchen Querschnitt dq, dq^1, dass in gleichen Zeiten eine gleiche Menge Flüssigkeit durch sie hinfliesst, so besteht auch die Beziehung:

$$\frac{dq^1}{dq} = \frac{v}{v^1}$$

Drückt man nun dq^1 u. dq noch durch $d^1 . db^1$ und $d . db$ aus, indem man die senkrecht zur Zeichnungsebene gerichtete Dimension der Elementarkanäle mit d^1 und d bezeichnet, und annimmt, ihre Höhe db^1 u. db sei überall gleich, so hat man also:

$$(2) \quad . \quad . \quad \frac{dq^1}{dq} = \frac{d^1 . db^1}{d . db} = \frac{v}{v^1}$$

und aus den Gleichungen 1 und 2:

$$(3) \quad . \quad . \quad \frac{dl^1}{dl} = \frac{dq^1}{dq} = \frac{d^1 . db^1}{d . db}$$

Die Längen der zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Normalflächen liegenden Stücke zweier Elementarkanäle sind proportional mit ihren Querschnitten.

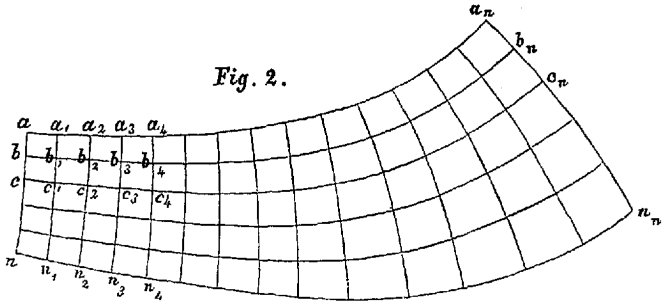
Sind die Dimensionen d^1 u. d einander gleich, wie z. B. bei einer zwischen zwei parallelen Wänden fliessenden Flüssigkeitsmasse, so erhält die Gleichung (3) folgende Gestalt:

$$(4) \quad . \quad . \quad \frac{dl^1}{dl} = \frac{db^1}{db}$$

Es findet also in diesem Falle das sehr einfache Verhältniss statt, dass die Längen derjenigen Stücke zweier Elementarkanäle, welche zwischen zwei unendlich nahe bei einander befindlichen Normalflächen liegen, mit ihren Höhen proportional sind.

Legt man z. B. die Normalflächen soweit aus einander, dass die zwischen ihnen liegenden Stücke des

Fig. 2.



ersten Elementarkanales $aa_1a_2a_3 \ldots . a_n$ ebenso lang als hoch sind, so dass in Fig. 2 die unendlich kleinen Rechtecke ab_1, a_1b_2, $a_2b_3 \ldots .$ Quadrate sind, so sind auch alle andern, von den Normalflächen und den Grenzflächen der Elementarkanäle gebildeten Rechtecke Quadrate.

Mit Hülfe dieser Sätze ist man nun im Stande, den Hauptzweck dieser Abhandlung, nämlich die Bestimmung der Gestalt der Normalflächen, sowie der Länge und Gestalt der Elementarkanäle auf folgende Weise zu erreichen.

Man bemerke zunächst, dass die Verlängerungen der zwei Grenzflächen ee_1 u. ff_1 (Fig. 1) irgend eines Elementarkanales, der die beiden Normalflächen $abc \ldots h$ und $a_1b_1c_1 \ldots h_1$ durchschneidet, den Winkel

$$\frac{ef - e_1f_1}{ff_1}$$

miteinander bilden, und dass dieser Winkel gleich dem Differenziale des Winkels φ^1 ist, welchen die beiden Tangenten miteinander bilden, die man an die beiden Elementarkanäle aa_1 u. ff_1 bei ihrem Durchschnittspunkte mit der gleichen Normalfläche ziehen kann. Man kann daher den Werth des obigen Ausdruckes der Grösse $\frac{d\varphi^1}{db^1} db^1$ gleich setzen. Ausserdem lässt sich derselbe auf folgende Weise auf theils gegebene, theils durch Rechnung bestimmbare Grössen zurückführen. Die Differenz $ef - e_1f_1$ ist nämlich nichts anderes als die Veränderung, welche die Höhe eines Elementarkanales bei seinem Uebergange aus einer Normalfläche in eine andere, unmittelbar auf diese folgende, erleidet, und kann mithin durch $d \,.\, db^1$ ausgedrückt werden. Da ferners b^1 als Funktion der Krümmungshalbmesser r u. R der beiden äussersten Elementarkanäle aa_1 und bb_1 des Flüssigkeitsstrahles angesehen werden kann, diese Krümmungshalbmesser aber für die Punkte a u. b einen andern Werth besitzen als für die Punkte a_1 u. b_1, so kann, zur Vermeidung aller Zweideutigkeit, jenem Ausdrucke noch bestimmter die Gestalt $\frac{d \,.\, db^1}{d(Rr)} d(Rr)$ gegeben werden, während er in jener allgemeinen Form auch den Unterschied der beiden Grössen e_1f_1 u. f_1g_1 anstatt des Unterschiedes von ef und e_1f_1 bedeuten könnte. Man hat daher nun:

$$ef - e_1f_1 = \mp \frac{d \,.\, db^1}{d(Rr)} d(Rr)$$

wo das — Zeichen für Elementarkanäle gilt, die nach der Richtung ihrer Bewegung konvergiren; das + Zeichen für solche, die nach dieser Richtung divergiren.

Ferners ist zufolge Gl. 1:

$$ff_1 = dl^1 = dl \frac{v}{v^1}$$

daher nun:

$$\mp \frac{\frac{d\,.\,db^1}{d(Rr)}\,d(Rr)}{dl\,\frac{v}{v^1}} = \frac{d\varphi^1}{db^1}\,db^1$$

Um den Winkel φ^1 oder den Winkel φ zu erhalten, den die an die beiden äussersten Elementarkanäle aa_1 und bb_1 gezogenen Tangenten miteinander bilden, muss diese Gleichung einerseits zwischen den Grenzen o u. b^1 oder o u. b, und andrerseits zwischen den Grenzen o und φ^1 oder o und φ integrirt werden. Bedenkt man, dass dl von b^1 und b ganz unabhängig ist, so hat man daher:

$$(5)\qquad \varphi^1 = \mp \frac{d(Rr)}{dl}\int_0^{b^1} \frac{\frac{d\,.\,db^1}{d(Rr)}}{\frac{v}{v^1}}, \qquad \varphi = \mp \frac{d(Rr)}{dl}\int_0^{b} \frac{\frac{d\,.\,db^1}{d(Rr)}}{\frac{v}{v^1}}.$$

Durch diese Gleichungen wird der Winkel φ^1 oder φ als die Summe aller unendlich kleinen Winkel dargestellt, unter welchen alle einzelnen Elementarkanäle, an der Stelle wo sie durch eine gegebene Normalflache gehen, konvergiren. Der letzte dieser Winkel lässt sich aber auch noch als das Ergebniss einer andern Operation auffassen.

Betrachtet man nämlich einen Flüssigkeitsstrahl (Fig. 2) an der Stelle an, wo seine Normalfläche noch eine Ebene ist, so sind die beiden durch die Punkte a u. n an die äussersten Elementarkanäle gezogenen Tangenten miteinander parallel, und der Winkel φ ist mithin für diese Stelle des Strahles gleich Null. Jede folgende Normalfläche auf dem gekrümmten Theile des Strahles wird. aber eine grössere Krümmung erhalten, und daher wird der Winkel φ, den die an die äussersten Elementarkanäle durch a_1 u. n_1, a_2 u. n_2, ... a_n u. n_n gezogenen

Tangenten mit einander bilden, bis zu einer gewissen Grenze mehr und mehr zunehmen, je mehr sich die Punkte a_n u. n_n von a u. n entfernen. Der Winkel φ kann also auch als die Summe aller unendlich kleinen Winkel angesehen werden, um welche die gegenseitige Neigung der äussersten Elementarkanäle, beim Uebergange von einer Normalfläche zu der unmittelbar darauf folgenden, zunimmt. Sind nun h_p u. h_{1p}, sowie aq u. a_1q die Krümmungshalbmesser R u. r der Stücke hh_1 und aa_1 der äussersten Elementarkanäle, so nimmt die gegenseitige Neigung dieser letztern bei ihrem Uebergange von h nach h_1 und von a nach a_1 offenbar um $d\alpha - d\beta$ oder um $d\beta - d\alpha$ (Fig. 1) zu, je nachdem von a u. h an die Linien aa_1 u. hh_1 konvergiren oder divergiren. Daher hat man nun:

$$\frac{d\varphi \, . \, d(Rr)}{d(Rr)} = \pm \, (d\alpha - d\beta)$$

wo das + oder — Zeichen genommen werden muss, je nachdem der Flüssigkeitsstrahl von da an, wo er geradlinig ist, konvergirt oder divergirt. Bezeichnet man aa_1, wie oben, mit dl, und hh_1 mit dL, so ist:

$$d\alpha = \frac{dL}{R}, \qquad d\beta = \frac{dl}{r}$$

Bezeichnet man endlich noch die Geschwindigkeit des Elementarkanales hh_1 mit V, während die des Elementarkanales aa_1, wie oben, mit v bezeichnet wird, so hat man zufolge Gl. 1:

$$\frac{dL}{dl} = \frac{v}{V} \text{ oder } dL = dl \, . \, \frac{v}{V}, \text{ und daher nun:}$$

$$(6) \quad . \quad \frac{d\varphi \, . \, d(Rr)}{d(Rr)} = \pm \, dl \left(\frac{1}{R} \, . \, \frac{v}{V} - \frac{1}{r}\right)$$

Aus den Gleichungen 5 und 6 erhält man nun sogleich:

$$\frac{\varphi d\varphi \,.\, d(Rr)}{d(Rr)} = -\, d(Rr)\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{v}{V} - \frac{1}{r}\right)\int_0^b \frac{\frac{d\,.\,db^1}{d(Rr)}}{\frac{v}{v^1}},$$

und durch Integrirung in Beziehung auf φ und zwischen den Grenzen o und φ einerseits, und in Beziehung auf R u. r, zwischen den Grenzen $R = r = \infty$ u. $R = R$, $r = r$ anderseits:

$$(7) \quad . \quad \varphi^2 = -\,2\int_{R=r=\infty}^{R=R,\; r=r} d(Rr)\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{v}{V} - \frac{1}{r}\right)\int_0^b \frac{\frac{d\,.\,db^1}{d(Rr)}}{\frac{v}{v^1}}$$

Da ferners, zufolge d. gen. Abhdlg., mit Hülfe der Gleichungen:

$$(8)\ .\ \begin{cases} \dfrac{v}{v^1} = \left(1 + \dfrac{R-r}{rb}\,b^1\right)^{\frac{b}{R-r}} & \text{für sehr kleine Werthe von } \dfrac{R}{r} \\[2ex] \operatorname{logn}\dfrac{v}{v^1} = \left(\dfrac{Rbb^1 + 1/2\,(r-R)(b^1)^2}{rRb}\right. & \text{für die Fälle, wo } \dfrac{R}{r} \text{ nicht nahe} = 0 \text{ ist} \end{cases}$$

$$(9) \quad . \quad d\,.\,db\,.\,v = d^1\,.\,db^1\,.\,v^1 = d_1\,.\,db_1\,.\,v_1 = \text{const.}$$

die Grössen b^1, b, v^1 u. v oder V als Funktionen von b_1, b_1', R u. r ausgedrückt werden können, so kann φ in gegebenen Specialfällen mit Hülfe der Gleichungen 7 u. 8 ebenfalls als Funktion dieser Grössen angesehen werden.

Aus Gl. 6 ergibt sich ferner:

$$dl = \pm\,\frac{\frac{d\varphi\,.\,d(Rr)}{d(Rr)}}{\frac{1}{R}\cdot\frac{v}{V} - \frac{1}{r}};$$

u. da zufolge dem durch Gl. 7 gegebenen Werthe von φ^2:

$$\frac{d\varphi\,.\,d(Rr)}{d(Rr)} = -\,\frac{d(Rr)}{\varphi}\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{v}{V} - \frac{1}{r}\right)\int_0^b \frac{\frac{d\,.\,db^1}{d(Rr)}}{\frac{v}{v^1}}$$

so erhält man durch Integrirung der Differenzialgleichung für dl zwischen den Grenzen l_2 u. l_1 einerseits, und den Grenzen R_2 u. R_1, r_2 u. r_1 anderseits:

$$(10) \quad . \quad l_1 - l_2 = \mp \int_{R=R_2,\ r=r_2}^{R=R_1,\ r=r_1} \frac{d(Rr)}{\varphi} \int_0^b \frac{\frac{d.db^1}{d(Rr)}}{\frac{v}{v^1}}$$

worin für φ der aus Gl. 7 sich ergebende Werth zu setzen ist. Zur Bestimmung der Länge des untersten Elementarkanales hat man:

$$dL = dl \frac{v}{V};$$

mithin:

$$(11) \quad . \quad L_1 - L_2 = \mp \int_{R=R_2,\ r=r_2}^{R=R_1,\ r=r_1} \frac{d(Rr)v}{\varphi V} \int_0^b \frac{\frac{d.db^1}{d(Rr)}}{\frac{v}{v^1}}$$

Das — Zeichen gilt in den beiden Gleichungen 10 und 11 für Flüssigkeitsstrahlen, welche von der geradlinigen Stelle an konvergiren, das + Zeichen für solche, welche divergiren.

Durch diese Gleichungen kann nun die Länge derjenigen Stücke des obersten und untersten Elementarkanales bestimmt werden, welche zwischen den Punkten liegen, bei welchen ihre Krümmungshalbmesser gleich r_1 u. r_2, R_1 u. R_2 sind. Durch die Gleichungen 7 bis 11 kann mithin sowohl die Bewegung als die Gestalt einer flüssigen Masse bestimmt werden. Diese Bestimmung kann jedoch in den meisten Fällen nur annäherungsweise erreicht werden, weil die zu integrirenden Ausdrücke fast stets sehr zusammengesetzt sind. Nur in wenigen, sehr einfachen Fällen ist es möglich, zu einer vollständigen Auflösung zu gelangen.