

# MITTHEILUNGEN

DER

## NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

N<sup>o</sup> 47.

-----  
1850.

### **Hr. Ingen. Denzler, — über den Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Quadrate.**

(Schluss).

Beide Anforderungen sehen wir in Bessel's und Bayer's » Ostpreussischer Gradmessung « in grösstmöglicher Vollkommenheit erfüllt, indem das Ergebniss der endlichen Ausgleichung so nahe der Wahrheit gleich sein muss, dass wir uns vergeblich um Herbeischaffung besseren Stoffes abmüden würden.

Die Berechnung der ersten 884 Beobachtungen von Horizontalwinkeln in vier aufeinanderfolgenden und nahebei gleichgrossen Abtheilungen führte jedesmal zum nämlichen Endergebnisse, wesshalb eine grössere Ausdehnung der Untersuchungen behufs Entscheidung obiger ersten Frage überflüssig erscheinen musste. Die Ermittlung der Abweichungen des einfachen arithmetischen Mittels aller als gleichberechtigt erklärten Beobachtungen und derjenigen ihrer innern Hälfte von den durch die endliche Ausgleichung erhaltenen Werthen ergab nämlich die nachstehenden Zahlen:

Beob.		durchschnittl. Fehler aller Beobacht.		Fehler d. Innern Hälfte Beob.
227	zeigen	0,397''	und	0,238''
229	»	0,355''	»	0,334''
207	»	0,341''	»	0,294''
221	»	0,104''	»	0,065''
<hr/>		<hr/>		<hr/>
884	»	0,300''	»	0,226''

d. h. in allen vier Reihen spricht das (auf Serien von ungleicher Grösse beruhende) Endergebniss zu Gunsten der innern Hälfte, deren Mittel um ein Viertel genau ausgefallen ist, als das Mittel sämmtlicher vom Beobachter als gleichberechtigt erklärten Einzelwerthe.

Note. Von Interesse mögen noch folgende Ergebnisse sein:

Absolut grösste Abweichungen =

16,25'' in 89 Beobachtungen desselben Winkels,

13,25'' - 35 - - -

11,00'' - 30 - - -

9,70'' - 28 - - -

u. s. w.                      u. s. w.

im Mittel 7,88'' auf eine mittlere Serie von 24,4 Beobacht.

Absolut grösste Ausweichungen in der innern Hälfte =

3,88'' in 32 Beobachtungen desselben Winkels,

3,53'' - 30 - - -

3,50'' - 36 - - -

3,25'' - 89 - - -

3,00'' - 29 - - -

3,00'' - 22 - - -

u. s. w.                      u. s. w.

im Mittel 2,46'' auf eine mittlere Serie von 35,2 Beob.

Betrachten wir jedoch die Ergebnisse jener vier Reihen näher, so fällt uns die stetige Abnahme des mittlern Fehlers\*) aller Beobachtungen und namentlich der

---

\*) Es ist hier das einfache arithmetische Mittel gemeint, und nicht der oben definirte mittlere Fehler.

kleine Werth der vierten Reihe sogleich auf. In der That bestehen die drei ersten Reihen aus kleinen Beobachtungsreihen desselben Winkels, während die vierte Reihe einige grosse in sich fasst. Verfolgen wir diese Andeutung, so erhalten wir für

Serien	Fehler aus allen Beob.	Fehler aus der innern H. B.
17 mit 258, od. durchschn. 15 B.	0,348''	und 0,387''
10 - 283, - - -	28 - 0,332''	- 0,288''
6 - 343, - - -	57 - 0,237''	- 0,054''

d. h. bei kleinen Beobachtungsreihen scheint das arithmetische Mittel aller Beobachtungen genauer als das der innern Hälfte zu sein.

Note. Eine neue Berechnung der 432 ersten Beobachtungen, in Serien von je 8 Beobachtungen ausgeschieden, spricht zwar nicht zu Gunsten dieser Wahrnehmung. Man findet nämlich bei

Serien.	Fehler einer Serie.
27 mit 216 Beob. resp.	0,748'' und 0,695''
27 - 216 - - -	0,879'' - 0,867''
oder im Gesamtmittel	0,814'' - 0,781''

Allein die Maxima der Abweichungen betragen resp. 4,557'' und 4,874'', die mittlern Fehler (nach der oben gegebenen Definition) in den 27 letzten Serien resp. 0,486'' und 0,555'', und es finden sich ferner bei den 54 Serien

Fehler über 2,0''	resp. 2 und 3
- - 1,5''	- 6 - 8
- - 1,0''	- 13 - 13
- - 0,8''	- 23 - 21
- - 0,5''	- 37 - 33

vor, d. h. die innere Hälfte gibt hier zwar genauere, allein auch extrematischere Werthe. — Die ersten 355 Beobachtungen, in Serien von je 5 Beobachtungen geschieden, wovon die 3 innern als innere Hälfte angesehen wurden, sprechen dagegen zu Gunsten obiger Wahrnehmung, indem

35 Serien resp. 0,681'' u. 0,723'' durchschn. Fehl. einer Serie  
 36 - - - 0,887'' - 0,903'' - - - -  
 oder also

71 Serien resp. 0,786'' u. 0,815'' durchschn. Fehl. einer Serie  
 ergeben. Die Maxima der Ausweichungen betragen resp.  
 6,730'' und 6,868'', die mittlern Fehler resp. 0,836'' und  
 0,951''; endlich finden sich bei den 71 Serien

Fehler über	2,0''	resp.	4	und	4
-	1,5''	-	8	-	7
-	1,0''	-	20	-	25
-	0,8''	-	28	-	31
-	0,5''	-	38	-	39

vor. Die Entscheidung der Frage, bei wieviel Beobachtungen für diese Beobachtungen und Beobachter die gleiche Genauigkeit von Mitteln liege, ist also hier nicht gegeben; jedenfalls dürfte aber die Zahl 8 von der Wahrheit wenig abweichen.

Weil somit bei grossen Beobachtungsreihen das arithmetische Mittel der innern Hälfte, bei kleinen hingegen dasjenige aller Beobachtungen die grössere Genauigkeit erlangt, so müssen wir uns gestehen, dass der wahrscheinlichste Werth einer Reihe als gleichberechtigt erklärter Bestimmungen derselben Grösse weder hier, wie bisher geschah, gesucht werden darf, noch dort zu finden ist. Wir sind folglich genöthigt, eine richtige Mitte voranzusetzen und aufzusuchen.

Es ist hier allerdings nicht der Ort zur philosophischen Erörterung dieser Aufgabe; daher wollen wir versuchen, das Schema unserer Abstraktionen in bildlicher Anschauungsweise niederzulegen.

Soll eine Menge selbständiger Personen für einen anerkannt guten Zweck gewonnen und verbunden werden, zeigen sich jedoch in ihren Ansichten Abweichungen nach allen Seiten hin, so wird vorerst eine gerechte

Politik jeder Persönlichkeit volle und gleiche Berechtigung des Worts und des Gewissens zugestehen. Damit ist ihre Aufgabe zu Ende. Nun aber ist es Sache der Diplomatie, die Verschiedenheit der Ansichten so auszugleichen, dass schliesslich alle modifizirten Meinungen eine blossse Konsequenz des obersten Grundsatzes sind. Der Hebel, auf den sie rechnen darf, ist die in jeder Vereinigung liegende moralische Kraft, welche den Trieb des Menschen zur Gesellschaftlichkeit bewirkt und rechtfertigt. Die Diplomatie wird daher bei der Erfindung des obersten Grundsatzes vorzüglich die nahe oder ferne Verwandtschaft der Ansichten mit der grössern oder geringern Vertretung derselben durch Personen in's Ebenmass zu bringen trachten, und es wird ihm gelingen, die Entferntstehenden zu um so grössern Konzessionen zu bewegen, je isolirter sie sich sehen und je klarer sie ihnen den Vortheil der Vereinigung nachzuweisen im Stande ist.

Wir dürfen jetzt erklären, dass die Benutzung aller als gleichberechtigt bezeichneten Einzelwerthe mit unserer Ansicht im Einklange steht, dass aber eine höhere Gerechtigkeit nicht die abstrakte Idee der formellen Gleichberechtigung, sondern die konkrete, einzige und daher oberste Idee der innern Gleichberechtigung, die im formellen Rechte, in der Stellung und Bedeutung zugleich und zwar auf organische Weise Platz greift, zum Prinzipie hat. Wenn wir gewissenhaft die » Gleichberechtigung in der Diskussion «, die » Achtung vor der freien Persönlichkeit « und den » Steuerfuss nach Kräften « massgebend im Reiche der Wahrscheinlichkeit walten lassen, dann werden wir den höchstmöglichen Ertrag erzielen und verhoffen dürfen.

Note. Aus der Ungenauigkeit des bisher nie in Zweifel ge-

zogenen Satzes über den wahrscheinlichsten Werth einer Reihe als gleichberechtigt erklärter Beobachtungen derselben Grösse folgt keineswegs die Unrichtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate, weil dieser Satz nur zur Bestimmung der in die Rechnung übergelenden Werthe dient, und weil durch die nachherige Behandlung die daher rührenden Fehler möglicherweise beseitigt werden. So in allen einfachen Fällen. Wenn dagegen wegen verschiedener Natur der Beobachtungen die gegenseitigen Gewichte bestimmt werden müssen, dann greift allerdings obiger modificirter Satz in das Gefüge der Rechnung ein; er wird darum auch zu neuen Untersuchungen veranlassen.

---

**Prof. Deschwenden, — zur krummlinigen  
Bewegung der Flüssigkeiten.**

(Vorgelegt den 18. März 1850).

Die folgenden Untersuchungen sollen eine Ergänzung meiner früher veröffentlichten Abhandlung über die krummlinige Bewegung von Flüssigkeiten sein und schliessen sich daher der äussern Form nach in der Bezeichnung und Benennung der verschiedenen, in den Rechnungen vorkommenden Grössen genau an dieselbe an.

Ausser den allgemein bekannten Gesetzen, welchen die Bewegungen der Flüssigkeiten unterworfen sind, zeigte jene Abhandlung vorzüglich, was für Beziehungen zwischen den an verschiedenen Punkten einer bewegten flüssigen Masse herrschenden Geschwindigkeiten, sowie, was für ein Verhältniss zwischen der Grösse der verschiedenen Normalflächen einer solchen Masse bestehen. Durch die folgenden Betrachtungen soll dagegen versucht werden, auch noch die Gestalt der Normalflächen, sowie