schliessen, dass wir uns oberhalb einer Felswand befanden, daher hielten wir uns, für einmal noch, in der Höhe, überschritten mehrere Bäche, und erblickten endlich, nachdem wir 2½ Stunden herabgestiegen, die Hütten der Alpe. Wir lagerten uns auf einem Vorsprung denselben gegenüber und stiegen dann nach kurzer Rast auf gebahntem Wege einer Felswand nach ins Thal von Torembec, wie der oberste Theil des Bagnethales heisst, hinunter. Alle Bäche, die wir überschritten, stürzten als Wasserfälle über diese Felswand zu Thal. Wir waren nun an der Stelle, die ich schon oben geschildert, und kamen nach fünfstündigem Marsche glücklich in Chable, dem Hauptorte des Bagnethales, an.

Ich schliesse hiemit meinen diessjährigen Bericht und hoffe, wenn die Verhältnisse es gestatten, das folgende Jahr wieder diese Gegenden besuchen und über dieselben noch weitere Aufklärungen geben zu können.

Hr. Ing. Denzler. — Mathematische Notizen.

(Vorgelegt den 10. Dezember 1849.)

1. *Satz über die Flächen von Dreiecken zwischen Parallelen.*

Satz. Zwischen n Paaren von parallelen Linien mit $2n(n-1)$ Schnittpunkten liegen $\frac{8n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Dreiecke, welche unter sich und mit den Parallelen nur die Spitzen gemein haben und wovon die durch complementäre Schnittpunkte gebildeten Dreiecke gleich gross sind.

Erläuterung. Es sei $a_1, b_1, c_1 \ldots n_1$ die eine Linie und $a_2, b_2, c_2 \ldots n_2$ die andere Linie jedes Parallelenpaars, so bezeichnen a_1b_1, $a_1c_1 \ldots a_1n_1$, $b_1c_1 \ldots b_1n_1, \ldots c_1n_1$ Schnittpunkte und a_2b_2, $a_2c_2 \ldots a_2n_2$, $b_2c_2 \ldots b_2n_2 \ldots c_2n_2$ ihre complementären Schnittpunkte und dann muss

$$\Delta(a_1b_1,\ a_2c_1,\ b_2c_2) = \Delta(a_2b_2,\ a_1c_2,\ b_1c_1)$$
$$\Delta(a_1b_2,\ a_2c_1,\ b_1c_2) = \Delta(a_2b_1,\ a_1c_2,\ b_2c_1)$$
$$\Delta(l_2m_2,\ l_1n_2,\ m_1n_1) = \Delta(l_1m_1,\ l_2n_1,\ m_2n_2) \text{ etc. sein.}$$

Die angeführte Anzahl der Schnittpunkte $2n(n-1)$ ist das Maximum für n Parallelpaare. Nimmt diese Anzahl ab, so vermindert sich um so mehr auch die Anzahl der gebildeten Dreiecke.

Die Anzahl der für das Maximum von Schnittpunkten entstehenden Dreiecke ist leicht abzuleiten und soll hier nicht besprochen werden. Dagegen bemerken wir, dass der Beweis für den allgemeinen Satz sich auf denjenigen für drei Parallelenpaare reducirt, weil je die zwei einander gleichen Dreiecke in den drei gleichen Paaren liegen, dass ferner in diesen drei Paaren die Nachweisung der Gleichheit je zweier complementärer Dreiecke, wenn er nur allgemein geführt wird, volle Beweiskraft für die übrigen drei Paare hat.

Beweis. Die Parallelen mögen von links nach rechts fortschreitend in der Ordnung $a_1a_2b_1c_2c_1c_2 \ldots$ auf einander folgen. Es sei a_1 die Abscissenaxe und A, B, C ... die senkrechten Abstände der Parallelen a_1 und a_2, b_1 und b_2, c_1 und $c_2 \ldots$; ferner sei φ der Winkel von b_1 und b_2 mit a_1 und a_2, ψ der Winkel von c_1 und c_2 mit a_1 und a_2 und β und γ die Entfernungen der Schnittpunkte a_1b_1 und a_1c_1 vom Anfangspunkt der Coordinaten und endlich sollen die Abscissen $X_{a_1b_1}$, $X_{a_1b_2}$, $X_{a_2b_1} \ldots$ den darauf senkrechten Ordinaten $Y_{a_1b_1}$, $Y_{a_1b_2}$, $Y_{a_2b_1} \ldots$ entsprechen.

Für die Behauptung

$$\Delta(a_2b_1,\ a_1c_1,\ b_2c_2) = \Delta(a_1b_2,\ a_2c_2,\ b_1c_1)$$

hat man

$$X_{a_2b_1} = \beta - A\,\mathrm{cotg.}\,\varphi,\ X_{a_1c_1} = \gamma,\ X_{b_2c_2} = \gamma + \frac{C}{\sin\psi}$$

$$- \frac{\left(\beta - \gamma + \frac{B}{\sin\varphi} - \frac{C}{\sin\psi}\right)\sin\varphi\ \cos\psi}{\mathrm{Sin}\ (\psi - \varphi)}$$

$$Y_{a_2b_1} = A,\ Y_{a_1c_1} = 0,\ Y_{b_2c_2}$$

$$= \frac{\left(\beta - \gamma + \frac{B}{\sin\varphi} - \frac{C}{\sin\psi}\right)\sin\varphi\ \sin\psi}{\sin\ (\psi - \varphi)}$$

$$X_{a_1b_2} = \beta + \frac{B}{\sin\varphi},\ X_{a_2c_2} = \gamma + \frac{C}{\sin\psi} - A\,\mathrm{ctg}\,\psi,$$

$$X_{b_1c_1} = \gamma - \frac{(\beta - \gamma)\sin\varphi\ \cos\psi}{\sin(\psi - \varphi)}$$

$$Y_{a_1b_2} = 0,\ Y_{a_2c_2} = A,\ Y_{b_1c_1} = \frac{(\beta - \gamma)\sin\varphi\ \sin\psi}{\sin\ (\psi - \varphi)}$$

Für diesen Fall muss man haben

$$A(X_{a_2b_1} - \gamma) + (A + Y_{b_2c_2})\ (X_{b_2c_2} - X_{a_2b_1})$$
$$- Y_{b_2c_2}\ (X_{b_2c_2} - \gamma)$$
$$= A\left(\beta - X_{a_2c_2} + \frac{B}{\sin\varphi}\right) + (A + Y_{b_1c_1})\ (Y_{a_2c_2} - X_{b_1c_1})$$
$$- Y_{b_1c_1}\left(\beta - X_{b_1c_1} + \frac{B}{\sin\varphi}\right)$$

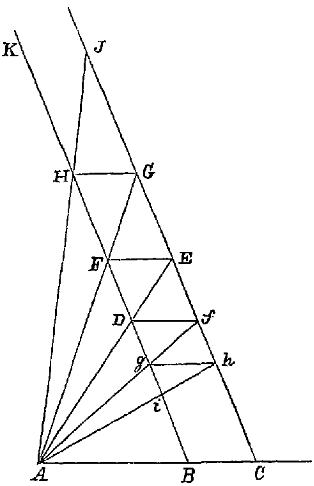
welche Gleichung sich reduzirt auf

$$- A\gamma + AX_{b_2c_2} - X_{a_2b_1}\cdot Y_{b_2c_2} + \gamma Y_{b_2c_2} = A\beta + \frac{AB}{\sin\varphi}$$
$$- AX_{b_1c_1} + X_{a_2c_2}\cdot Y_{b_1c_1} - \beta\cdot Y_{b_1c_1} - \frac{BY_{b_1c_1}}{\sin\varphi}$$

Setzt man für die Coordination ihre oben angegebenen Werthe in diese Gleichung und reducirt, so wird sich endlich auf beiden Seiten der Gleichung der Werth Null ergeben, womit dann die Richtigkeit des Satzes; $\Delta(a_2b_1, a_1c_1, b_2c_2) = \Delta(a_1b_2, a_2c_2, b_1c_1)$ und folglich auch des allgemeinen Satzes bewiesen ist.

Dieser Satz schliesst auch den aus der Elementar-Geometrie bekannten über die Gleichheit der Dreiecke zwischen Parallelen bei gleichen Grundlinien in sich ein. Auf ähnliche Art könnte man zu beliebigen Vielecken, ja auf Pyramiden zwischen mehrern parallelen Flächenpaaren übergehen. Ebenso würden Untersuchungen über die von den Parallelen oder einzelnen Punkten derselben beschriebenen Curven nahe liegen. Einstweilen wollen wir aber diese Fragen unbeantwortet lassen.

2. *Eine neue Anwendung des Lehrsatzes von der Aehnlichkeit der ebenen Dreiecke.*



Wenn die Schenkel eines Winkels von Parallelen geschnitten werden, so erhält man bekanntlich ähnliche oder proportionale Dreiecke, deren merkwürdige Eigenschaften in den Lehrbüchern der Geometrie meistens sehr ausführlich behandelt werden. Man braucht indess nur die einfachste Beziehung auf dem nächsten Wege zu verfolgen, so erhält man die interessante Lösung der Aufgabe, ganze oder gebrochene Zahlen mit dem Zirkel zu potenziren.

Sei nämlich AQ eine von den Parallelen BK und CI geschnittene gerade Linie, so wird, wenn BD = AB gemacht ist, CE = AC sein. Setzt man nun AB = a, AC = b und zieht EF parallel AQ und AG durch F, so erhält man: AB : BF = AC : CG oder a : b = b : CG, woraus CG = $\frac{b^2}{a}$ gefunden wird. Ist nun abermals GH $\parallel$ AQ, so ergiebt sich: AB : BH = AC : CI oder, weil BH = CG ist: a : $\frac{b^2}{a}$ = b : CI, woraus CI = $\frac{b^3}{a^2}$ folgt. Die Wiederholung dieser Operation wird successive $\frac{b^4}{a^3}$ $\frac{b^5}{a^4}$, $\frac{b^6}{a^5}$, u. s. w. geben, somit, wenn a als Mass der Linien CE, CG, CI u. s. f. angesehen werden will, so bildet sich nach und nach die Reihe:

$$\frac{b^1}{a^1} \quad \frac{b^2}{a^2} \quad \frac{b^3}{a^3} \quad \frac{b^4}{a^4} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{b^n}{a^n}$$

worin $\frac{b}{a}$ eine ganze oder gebrochene Zahl vorstellen kann. Ebenso zeigt sich: AC : AB = Cf : Bg oder b : a = a : Bg, d. h. Bg = $\frac{a^2}{b} = \frac{b^{-1}}{a^{-2}}$ und weiters Bi = $\frac{a^3}{b^2} = \frac{b^{-2}}{a^{-3}}$ oder auch, wenn b als Mass betrachtet wird, successive

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^{-2} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^{-3} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^{-4} \cdots\cdots\cdots \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$$

Setzt man dagegen BD einer beliebigen Grösse c gleich, so ergiebt sich durch die successive Entwickelung der Werthe CE, CG, CI für den Massstab a und der Werthe von CD, CG, Ci u. s. f., für den Massstab b nachstehendes Reihenpaar:

$$\frac{bc}{a^2} \quad \frac{b^2c}{a^3} \quad \frac{b^3c}{a^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{b^{n-1}c}{a^n}$$

$$\frac{c}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} \quad \frac{c}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{-2} \quad \frac{c}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{-3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{c}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{-n+1}$$

Bezeichnet man AB mit A, AC mit B, AQ mit C, u. s. f., ferner BD mit a, CE mit b, u. s. f., und verlängert die Parallelen mit AQ rückwärts, so lassen sich nachstehende Proportionsverhältnisse ermitteln:

1) $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ d. h. $b = \frac{Ba}{A}$

2) $\frac{A}{b} = \frac{C}{c}$ d. h. $c = \frac{bC}{A} = \frac{aBC}{A^2}$

3) $\frac{A}{c} = \frac{D}{d}$ d. h. $d = \frac{cD}{A} = \frac{aBCD}{A^3}$

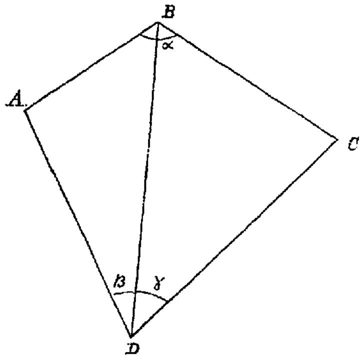
4) $\frac{A}{d} = \frac{E}{e}$ d. h. $e = \frac{dE}{A} = \frac{aBCDE}{A^4}$ u. s. w.

woraus, wenn man A als Massstab annimmt, folgende Reihe hervorgeht:

$$\frac{aB}{A^2} \quad \frac{aBC}{A^3} \quad \frac{aBCD}{A^4} \quad \frac{aBCDE}{A^5} \quad \ldots\ldots \quad \frac{aBCDE\ldots N}{A^n}$$

und insofern $A = 1$ gesetzt wird, so geben die successiv entwickelten Linien Produkte von Zahlen an, die durch Linien repräsentirt sind. Dieses Liniensystem ist also geeignet, Zahlen von Flächen- und Körperräumen sowohl als die von höhern Ordnungen sinnlich darzustellen, oder, praktisch gefasst, die Multiplikationen, Divisionen und Potenzirungen niederer und höherer Ordnungen selbst zu vollziehen.

3) *Neues Verfahren bei der trigonometrischen Anwendung des Pothenot'schen Problems.*



Nach Tobias Mayer ist:

$$\varphi = 360 - \alpha - \beta - \gamma$$

angenommen und dann findet sich:

$$\text{cotang. A} = \text{cotang. } \varphi + \frac{\text{AB sin. } \gamma}{\text{BC sin. } \beta \text{ sin. } \varphi}$$

woraus

$$\text{BD} = \frac{\text{AB sin. A}}{\text{sin. } \beta}$$

$$\text{AD} = \frac{\text{AB sin. } (\text{A} + \beta)}{\text{sin. } \beta}$$

$$\text{CD} = \frac{\text{BC sin. } (\gamma + \varphi - \text{A})}{\text{sin. } \gamma}$$

folgt. Nun sollten aber nicht allein α, β und γ vom sphärischen Excesse befreit sein, was also von vorn herein eine Wiederholung der Rechnung bedingt, sondern es sind, wenn zwischen mehr als drei gegebenen Punk-