MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

№ 30. 1848.

Prof. Raabe, über singuläre Integralauflösungen einer Differenzialgleichung erster Ordnung zweier Variabeln.

(Schluss.)

verschieden von — 1 gedacht wird; erklärt man also p innerhalb $-\pi$ und $+\pi$ liegend, so ist man auch $p = 0$ anzunehmen berechtigt, und man hat:

$$A \pm Bi = 2^{m+n} e^{\pm (m-n)\Theta i} \int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(1+r)^{m+n}},$$

oder nach Nro. 217 meiner Integralrechnung:

$$A \pm Bi = 2^{m+n} e^{\pm (m-n)\Theta i} \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

woraus die von H. Cauchy aufgestellten Ergebnisse:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2^{m+n} \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \operatorname{Cos.}(m-n)\Theta, \\ B &= 2^{m+n} \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \operatorname{Sin.}(m-n)\Theta \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

hervorgehen, in denen nach den obigen Feststellungen Θ innerhalb $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu liegen kommt.

4. Wird, um noch eines von H. Cauchy ohne Beweis veröffentlichtes Resultat nachzuweisen, in dem unmittelbar vorher durch A dargestellten bestimmten Inte-

grale m durch $\frac{m+1}{2}$ und n durch $\frac{m-1}{2}$ ersetzt, so ist:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{m-3}{2}} d\alpha}{(\text{Cos.}\,\Theta + i\alpha\,\text{Sin.}\,\Theta)^m} = 2^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m)} \text{Cos.}\,\Theta.$$

Weil Θ innerhalb $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ fällt, ist Tang. Θ aller reellen, nicht unendlichgross werdenden Werthe fähig; wird sonach Tang. Θ durch $\frac{b}{a}$ ersetzt, so ist:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{m-3}{2}} d\alpha}{(a+b\alpha i)^m} =$$

$$= 2^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m)} \cdot \frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{m+1}{2}}},$$

wo a nothwendig verschieden von Null ist; berücksichtigt man noch eine Eigenschaft der Function Γ [Gl. (ϑ) der Nr. 222 meiner Ir.], so hat man auch:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{m-3}{2}}}{(a+b\alpha i)^m} d\alpha = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{m+1}{2}}}, \quad (3)$$

wo m eine beliebige reelle positive Zahl repräsentirt, die grösser wie 1 ist; ebenso stellen a und b beliebige reelle Zahlen dar, mit der einzigen Beschränkung, dass a von Null verschieden sein muss.

5. Sehr brauchbar stellt sich das hier mitgetheilte Theorem dar, wenn Ergebnisse des Integrirens, die allgemeine reelle Constanten impliciren, auch auf imaginäre oder gar complexe Werthe derselben zu übertragen sind; wozu hier schliesslich ein Beleg mitgetheilt wird.

Wie bekannt, hat man:

$$\int_0^{\infty} r^{a-1} e^{-mr} dr = m^{-a} \Gamma(a), \qquad (4)$$

wo a und m reelle, positive Zahlen vorstellen; geht im bestimmten Integrale r in re^{pi} über, wodurch solches in

$$\int_0^{\infty} e^{api} r^{a-1} e^{-mre^{pi}} dr$$

übergeht, so entspricht dieses, bei der getroffenen Feststellung über m, allen Anforderungen des Theorems, wenn p bloss der Werthe von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ fähig erklärt wird. Es bietet sonach dieses bestimmte Integral für diese eben erwähnten Werthe von p denselben Werth, als bei der Annahme $p = 0$ dar; folglich hat man:

$$\int_0^{\infty} e^{api} r^{a-1} e^{-mre^{pi}} dr = m^{-a} \Gamma(a),$$

oder auch

$$\int_0^{\infty} r^{a-1} e^{-mre^{pi}} dr = e^{-api} m^{-a} \Gamma(a).$$

Wird nun m Cos. $p = \alpha$ und m Sin. $p = \beta$ gesetzt, so ist:

$$\int_0^{\infty} r^{a-1} e^{-(\alpha+\beta i)r} dr = (\alpha + \beta i)^{-a} \Gamma(a);$$

woraus hervorgeht, dass die Integralbestimmung in (4) noch Bestand hat, wenn auch m eine complexe Zahl $\alpha + \beta i$ repräsentirt, wobei jedoch der reelle Theil α nicht negativ sein darf.

Anmerkung. Streng genommen darf α nur insofern gleich 0 angenommen werden, als man dem Ausdrucke $r^a e^{-mri}$ beim unendlichen Wachsen von r (wo a reell und potitiv ist) den Grenzwerth 0 anweist.