Prof. Raabe, über die Darstellung einer Function zweier Variabeln z, z' nach aufsteigenden Potenzen anderer zwei Variabeln y, y', deren gegenseitige Abhängigkeiten die Gleichungen:

$$z = x + yf(z), \quad z' = x' + y'f(z')$$

feststellen, wo $f(z)$ dieselbe Function von z, als $f(z')$ es von z' ist.

(Mitgetheilt den 20. Dec. 1847.)

Behufs Auflösung der Mittelpunktsgleichung in der Astronomie befasste sich Lagrange mit einer der in der Ueberschrift aufgestellten Gleichungen; einen ähnlichen Zweck für die Theorie der Störungen beabsichtige ich mit der Behandlung des hier vorgelegten zusammengesetztern Problems, wie am Schlusse angedeutet und bei einer nächsten Gelegenheit noch bestimmter gezeigt werden soll.

I.

Liegen zwei Gleichungen wie in der Ueberschrift vor, nämlich:

$$z = x + yf(z), \quad z' = x' + y'f(z'), \tag{1}$$

wo f ein bestimmtes Functionszeichen je der betreffenden Variable z oder z' ist, und setzt man die Gleichung:

$$u = \varphi(z, z') \tag{2}$$

fest, wo der Ausdruck rechterhand ebenfalls eine bestimmte Function von z und z' ist; so ist der Zweck der gegenwärtigen Mittheilung u durch eine Gliederreihe darzustellen, die nach aufsteigenden Potenzen von y und y′ fortgeht.

Legt man zu diesem Zwecke die Maclaurin'sche Reihe für zwei Variabeln zu Grunde, so stellt sich als nächstes Problem die Angabe der verschiedenen partiellen Differentialquotienten von u nach y und y′ dar, zu dessen Lösung unmittelbar geschritten wird.

Zuerst hat man:

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}, \qquad \frac{du}{dy'} = \frac{du}{dz'}\frac{dz'}{dy'};$$

aus den vorgelegten Gleichungen in (1) folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{1 - yf_1(z)}, & \dfrac{dz}{dy} = \dfrac{f(z)}{1 - yf_1(z)}, \\ \dfrac{dz'}{dx'} = \dfrac{1}{1 - y'f_1(z')}, & \dfrac{dz'}{dy'} = \dfrac{f(z')}{1 - y'f_1(z')}, \end{array}\right\} \quad (3)$$

wo $f_1(z)$ den Differentialquotienten von $f(z)$ nach z und $f_1(z')$ denselben von $f(z')$ nach z' vorstellt, aus welchen folgende gezogen werden:

$$\frac{dz}{dy} = f(z)\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz'}{dy'} = f(z')\frac{dz'}{dx'}; \qquad (4)$$

sonach hat man:

$$\frac{du}{dy} = f(z)\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = f(z)\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy'} = f(z')\frac{du}{dz'}\frac{dz'}{dx'} = f(z')\frac{du}{dx'}, \quad (5)$$

welche die verlangten ersten partiellen Differentialquotienten darstellen.

Uebergehend zu dem zweiten partiellen Differentialquotienten, ziehen wir aus der erstern der eben gewonnenen Gleichungen in (5) folgende:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = f_1(z)\frac{dz}{dy}\frac{du}{dx} + f(z)\frac{d^2u}{dxdy},$$

die beachtend (4) und (5) folgendermassen gestellt werden kann:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = f(z)\,f_1(z)\,\frac{dz}{dx}\,\frac{du}{dx} + f(z)\,\frac{d\cdot\left[f(z)\frac{du}{dx}\right]}{dx};$$

und da diese auch mit folgender gleichbedeutend ist:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = f(z)\,\frac{du}{dx}\,\frac{d\cdot f(z)}{dx} + f(z)\,\frac{d\cdot\left[f(z)\frac{du}{dx}\right]}{dx},$$

so hat man:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d\cdot\left[f(z)^2\frac{du}{dx}\right]}{dx},$$

und durch ganz ähnliche Betrachtungen auch folgende:

$$\frac{d^2u}{dy'^2} = \frac{d\cdot\left[f(z')^2\frac{du}{dx'}\right]}{dx'}.$$

Ferner zieht man aus der erstern Gleichung in (5), beachtend dass z von y' unabhängig ist, folgende:

$$\frac{d^2u}{dy\,dy'} = f(z)\,\frac{d^2u}{dx\,dy'},$$

die mit Zuziehung der zweiten Gleichung in (5) in folgende übergeht:

$$\frac{d^2u}{dy\,dy'} = f(z)\,\frac{d\cdot\left[f(z')\frac{du}{dx'}\right]}{dx},$$

oder endlich, weil auch z' von x unabhängig ist, in folgende:

$$\frac{d^2u}{dy\,dy'} = f(z)\,f(z')\,\frac{d^2u}{dx\,dx'}.$$

Dieses nun vorausgesetzt, stellen sich folgende Bestimmungen für die zweiten partiellen Differentialquotienten dar:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{d^2u}{dy^2} = \dfrac{d\cdot\left[f(z)^2\frac{du}{dx}\right]}{dx}, \quad \dfrac{d^2u}{dy'^2} = \dfrac{d\cdot\left[f(z')^2\frac{du}{dx'}\right]}{dx'}, \\ \dfrac{d^2u}{dy\,dy'} = f(z)\,f(z')\,\dfrac{d^2u}{dx\,dx'}, \end{array}\right\} \quad (6)$$

wo man:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}, \quad \frac{du}{dx'} = \frac{du}{dz'}\frac{dz'}{dx'}; \quad \frac{d^2u}{dx\,dx'} = \frac{d^2u}{dz\,dz'}\frac{dz}{dx}\frac{dz'}{dx'} \qquad (7)$$

hat.

Die dritten partiellen Differentialquotienten von u nach y und y′ ziehen wir aus den Ergebnissen in (6) in ähnlicher Weise, wie wir diese aus (5) gewonnen haben. — Man gewinnt nämlich aus den erstern in (6) folgende:

$$\frac{d^3u}{dy^3} = \frac{d^2\lambda}{dx\;dy}, \quad \text{wo } \lambda = f(z)^2 \frac{du}{dx} \text{ gesetzt ist;}$$

nun stellt sich:

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{d \cdot [f(z)^2]}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{du}{dx} + f(z)^2 \frac{d\left[\frac{du}{dy}\right]}{dx}$$

dar, oder auch wegen (4) und (5) folgendermassen:

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{d \cdot [f(z)^2]}{dz}\frac{dz}{dx} f(z)\frac{du}{dx} + f(z)^2 \frac{d \cdot \left[f(z)\frac{du}{dx}\right]}{dx}$$

$$= \frac{d \cdot [f(z)^2]}{dx} f(z)\frac{du}{dx} + f(z)^2 \frac{d \cdot \left[f(z)\frac{du}{dx}\right]}{dx};$$

daher hat man:

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{d \cdot \left[f(z)^3\frac{du}{dx}\right]}{dx},$$

und

$$\frac{d^3u}{dy^3} = \frac{d^2 \cdot \left[f(z)^3\frac{du}{dx}\right]}{dx^2}.$$

Behält ferner λ dieselbe Bedeutung, so ist zunächst:

$$\frac{d^3u}{dy^2dy'} = \frac{d^2\lambda}{dx\;dy'};$$

nun ist aus Gründen, die wir schon oben geltend machten:

$$\frac{d\lambda}{dy'} = f(z)^2 \frac{d\left[\frac{du}{dy'}\right]}{dx} = f(z)^2 \frac{d \cdot \left[f(z') \frac{du}{dx'}\right]}{dx} = f(z)^2 f(z') \frac{d^2u}{dx\ dx'},$$

daher stellt sich auch folgende Bestimmungsgleichung dar:

$$\frac{d^3u}{dy^2\,dy'} = \frac{d \cdot \left[f(z)^2 f(z') \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx}.$$

In ähnlicher Weise gelangt man auf ähnliche Bestimmungen für die beiden noch übrigen partiellen Differentialquotienten dritter Ordnung: so dass man gegenwärtig folgende Ergebnisse hat:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^3u}{dy^3} &= \frac{d^2\left[f(z)^3 \frac{du}{dx}\right]}{dx^2}, \quad \frac{d^3u}{dy'^3} = \frac{d^2\left[f(z')^3 \frac{du}{dx'}\right]}{dx'^2}, \\ \frac{d^3u}{dy^2\,dy'} &= \frac{d \cdot \left[f(z)^2 f(z') \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx}, \\ \frac{d^3u}{dy\,dy'^2} &= \frac{d \cdot \left[f(z) f(z')^2 \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx'}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Wird weiter behufs Herstellung des vierten partiellen Differentialquotienten $\mu = f(z)^3 \frac{du}{dx}$ gesetzt, wo:

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{d \cdot \left[f(z)^4 \frac{du}{dx}\right]}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d\mu}{dy'} = f(z)^3 f(z') \frac{d^2u}{dx\,dx'}$$

erhalten wird; so gewinnt man aus der erstern Gleichung in (8) folgende:

$$\frac{d^4u}{dy^4} = \frac{d^3 \cdot \left[f(z)^4 \frac{du}{dx}\right]}{dx^3}, \quad \frac{d^4u}{dy^3\,dy'} = \frac{d^2 \cdot \left[f(z)^3 f(z') \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx^2}.$$

Durch Vertauschung von x, y, z in x′, y′, z′ bieten diese noch andere zwei partielle Differentialquotienten vierter Ordnung dar.

Wird weiter zur Herstellung des fünften dieser Differentialquotienten $\mu' = f(z)^2 f(z') \frac{d^2u}{dx\,dx'}$ gesetzt, wodurch

$$\frac{d\mu'}{dy'} = f(z)^2 \frac{d \cdot \left[f(z')^2 \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx'} = \frac{d \cdot \left[f(z)^2 f(z')^2 \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx'}$$

erhalten wird; so ergiebt sich auch:

$$\frac{d^4u}{dy^2 dy'^2} = \frac{d^2 \left[f(z)^2 f(z')^2 \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx\,dx'}.$$

Man hat sonach durch Zusammenstellung:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^4u}{dy^4} = \frac{d^3\left[f(z)^4 \frac{du}{dx}\right]}{dx^3}, \quad \frac{d^4u}{dy'^4} = \frac{d^3 \cdot \left[f(z')^4 \frac{du}{dx'}\right]}{dx'^3}, \\
&\frac{d^4u}{dy^3 dy'} = \frac{d^2 \cdot \left[f(z)^3 f(z') \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx^2}, \\
&\frac{d^4u}{dy\,dy'^3} = \frac{d^2 \cdot \left[f(z) f(z')^3 \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx'^2}, \\
&\frac{d^4u}{dy^2 dy'^2} = \frac{d^2\left[f(z)^2 f(z')^2 \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx\,dx'}.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Wird in der bis jetzt befolgten Weise fortgefahren; so stellen sich allgemein folgende Bestimmungen dar:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^ku}{dy^k} = \frac{d^{k-1} \cdot \left[f(z)^k \frac{du}{dx}\right]}{dx^{k-1}}, \quad \frac{d^ku}{dy'^k} = \frac{d^{k-1} \cdot \left[f(z')^k \frac{du}{dx'}\right]}{dx'^{k-1}}, \\
&\frac{d^ku}{dy^a dy'^b} = \frac{d^{k-1} \cdot \left[f(z)^a f(z')^b \frac{d^2u}{dx\,dx'}\right]}{dx^{a-1}\,dx'^{b-1}}
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

wo $a + b = k$ ist, und wo $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dx'}$, $\frac{d^2u}{dx\,dx'}$ durch die Gleichungen (7) gegeben sind.

II.

Nachdem man sämmtliche partielle Differentialquotienten von u nach y und y' hergestellt, sind dieselben der Maclaurin'schen Reihe gemäss für die speciellen Verfügungen $y = y' = 0$ zu bestimmen. Deutet man den Werth irgend einer im Vorangehenden gebrauchten Grösse, welche diesen speciellen Verfügungen entspricht, dadurch an, dass man solcher rechtstehend oben eine 0 innerhalb Parenthesen beifügt: so erhält man aus den Gleichungen (1):

$$z^{(0)} = x, \quad z'^{(0)} = x',$$

falls f(x) und f(x') nicht ohne Ende wachsende Werthe darstellen. Sind ferner die Werthe von x und x' der Art, dass auch die Differentialquotienten der letztern Function nicht ohne Ende zu nehmen; so bieten die Gleichungen (3):

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^{(0)} = 1, \quad \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^{(0)} = 1$$

dar. Beachtet man weiter die Bedeutung von u aus Gleichung (2), so ist:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^{(0)} = \frac{d\varphi(x,x')}{dx}, \quad \left(\frac{du}{dz'}\right)^{(0)} = \frac{d\varphi(x,x')}{dx'}, \quad \left(\frac{d^2u}{dz\,dz'}\right)^{(0)} = \frac{d^2\varphi(x,x')}{dx\,dx'};$$

daher hat man wegen der vorhergehenden Ergebnisse und der Gleichungen in (7):

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^{(0)} = \frac{d\varphi(x,x')}{dx}, \quad \left(\frac{du}{dx'}\right)^{(0)} = \frac{d\varphi(x,x')}{dx'}, \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dx'}\right)^{(0)} = \frac{d^2\varphi(x,x')}{dx\,dx'}.$$

Dieses Alles vorausgesetzt, gehen die Gleichungen (10) bei der Annahme $y = y' = 0$ in folgende über:

$$\left(\frac{d^ku}{dy^k}\right)^{(0)} = \frac{d^{k-1} \cdot \left[f(x)^k \frac{d\varphi(x,x')}{dx}\right]}{dx^{k-1}},$$

$$\left(\frac{d^ku}{dy^a\,dy'^b}\right)^{(0)} = \frac{d^{k-2} \cdot \left[f(x)^a f(x')^b \frac{d^2\varphi(x,x')}{dx\,dx'}\right]}{dx^{a-1}\,dx'^{b-1}},$$

$$\left(\frac{d^k u}{dy'^k}\right)^{(0)} = \frac{d^{k-1} \cdot \left[f(x')^k \frac{d\varphi(x, x')}{dx'}\right]}{dx'^{k-1}},$$

wo $a + b = k$ ist.

Berücksichtiget man nun die Maclaurin'sche Reihe für zwei Variabeln, so geht aus den vorgelegten Gleichungen (1), bei Feststellung der Vereinfachungsgleichungen:

$$v = f(x) \frac{d\varphi(x, x')}{dx}, \quad v' = f(x') \frac{d\varphi(x, x')}{dx'}, \quad w = f(x) f(x') \frac{d^2\varphi(x, x')}{dx\, dx'}$$

folgende Bestimmungsgleichung für die Function $\varphi(z, z')$ heraus:

$$\begin{aligned}
&\varphi(z, z') = \\
&= \varphi(x, x') + vy + v'y' \\
&+ \frac{1}{1.2} \left\{\frac{d \cdot [vf(x)]}{dx} y^2 + 2wyy' + \frac{d \cdot [v'f(x')]}{dx'} y'^2\right\} \\
&+ \frac{1}{1.2.3} \left\{\frac{d^2 \cdot [vf(x)^2]}{dx^2} y^3 + 3\frac{d \cdot [wf(x)]}{dx} y^2y' + 3\frac{d \cdot [wf(x')]}{dx'} yy'^2 \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{d^2 \cdot [v'f(x')^2]}{dx'^2} y'^3\right\} \\
&+ \frac{1}{1.2.3.4} \left\{\frac{d^3 \cdot [vf(x)^3]}{dx^3} y^4 + 4\frac{d^2 \cdot [wf(x)^2]}{dx^2} y^3y' \right.\\
&+ 6\frac{d^2 \cdot [wf(x)\, f(x')]}{dx\, dx'} y^2y'^2 + 4\frac{d^2 \cdot [wf(x')^2]}{dx'^2} yy'^3 + \left.\frac{d^3 \cdot [v'f(x')^3]}{dx'^3} y'^4\right\} \\
&+ \frac{1}{1.2.3.4.5} \left\{\frac{d^4 \cdot [vf(x)^4]}{dx^4} y^5 + 5\frac{d^3 \cdot [wf(x)^3]}{dx^3} y^4y' \right.\\
&\qquad + 10\frac{d^3 \cdot [wf(x)^2\, f(x')]}{dx^2\, dx'} y^3y'^2 + 10\frac{d^3 \cdot [wf(x)\, f(x')^2]}{dx\, dx'^2} y^2y'^3 \\
&\qquad\qquad + 5\frac{d^3 \cdot [wf(x')^3]}{dx'^3} yy'^4 + \left.\frac{d^4 \cdot [v'f(x')^4]}{dx'^4} y'^5\right\} \\
&+ \text{u. s. w.,} \qquad\qquad (11)
\end{aligned}$$

deren Fortsetzung nunmehr ein Leichtes ist. —

Anmerkung. Die Brauchbarkeit dieses Ergebnisses in der Theorie der Störungen, wie am Eingange erwähnt wurde, wenigstens anzudeuten, ersetzen wir die allgemeinen Gleichungen (1) durch folgende:

$$u - e \operatorname{Sin} \cdot u = n(t + h), \; u' - e' \operatorname{Sin} \cdot u' = n'(t + h'), \quad \text{(I)}$$

wo u und u' die excentrischen Anomalien zweier Planeten m und m' zu einer bestimmten Zeit t, welche von einer gewissen Epoche aus gezählt wird, darstellen; wo ferner e und e' die Excentricitätsverhältnisse der ungestörten Ellipsenbahnen derselben zwei Planeten sind, welche, wie bekannt, nur kleine Bruchzahlen vorstellen; wo endlich n und h zwei constante Elemente der einen, und n' und h' analoge der andern Ellipsenbahn besagter Planeten sind.

Die elliptischen Coordinaten des Schwerpunktes eines Planeten m sind durch die einfachsten Functionen von Sin.u und Cos · u angebbar (Nr. 630 meiner Integralr.). Stellt man aber die wirklichen Coordinaten desselben Planeten m nach steigenden Potenzen der Massen m', m'', m''', . . . der übrigen Planeten dar, so sind die verschiedenen Coefficienten dieser Massen Functionen der elliptischen Coordinaten des gestörten m und des jedesmal in Betracht gezogenen störenden Planeten m' oder m'' oder m''' u. s. w. Diese Functionen sind durch einfache noch zu vollziehende Quadraturen darstellbar, in denen die oben erwähnte Zeit t, welche für alle Planeten eine gemeinschaftliche Epoche hat, die Integrationsvariable ist; d. i., wenn x, y, z die elliptischen Coordinaten von m und x', y', z' die analogen von m' sind, so hat man Quadraturen der Form:

$$\int_0^t F(x, y, z, x', y', z')\, dt$$

zu vollziehen. Die erstern dieser Coordinaten sind aber, wie schon gesagt, durch die excentrische Anomalie u, und die letzteren in analoger Weise durch u' darstellbar, wodurch Quadraturen folgender Form:

$$\int_0^t \varphi(u, u')\, dt$$

zur Vollziehung sich darbieten; sonach stellt sich die Aufgabe dar: die Function $\varphi(u, u')$ mit Hülfe der simultanen Gleichungen (I) vorerst durch t auszudrücken, welches durch das oben gewonnene allgemeine Ergebniss in (11) immer realisirt werden kann.