MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN ZÜRICH.

No. 16. December 1847.

Prof. Raabe, über Produkte und Potenzen bestimmter einfacher Integralausdrücke durch mehrfache dargestellt.

(Vorgetragen den 11. October 1847.)

1.

Jedes bestimmte einfache Integral $\int_a^b \varphi(x)dx$ kann folgendermassen dargestellt werden:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \omega \sum_{p=o}^{p=n-1} \varphi(a+p\omega),$$

wo ω unendlich kleinwerdend, $b = a + n\omega$ ist und das Summenzeichen nur die ganzen und positiven Werthe von p, mitbegriffen die Grenzwerthe, betrifft; die Function $\varphi(x)$ muss jedoch der Beschaffenheit sein, dass irgend ein Glied der angedeuteten Summe eine unendlich kleinwerdende Grösse ist.

Entsprechen nun zwei Functionen von x, wie $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$, der zuletzt erwähnten Anforderung, so gelangt man durch wirkliche Multiplikation auf folgende Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)dx \cdot \int_a^b \varphi'(x)dx = \int_a^b \int_{x_1}^b [x_1, x_2]dx_2dx_1, \qquad (1)$$

wo $[x_1, x_2]$ eine durch folgende Gleichung:

$$[x_1, x_2] = \varphi(x_1)\varphi'(x_2) + \varphi(x_2)\varphi'(x_1) \qquad (1')$$

dargestellte symmetrische Function der Variabeln x_1 und x_2 ist. Wird ferner das Produkt:

$$\int_a^b \varphi(x)dx \cdot \int_a^b \varphi'(x)dx \cdot \int_a^b \varphi''(x)\,dx$$

durch P_3 dargestellt, so gelangt man mit Zuziehung des Ergebnisses in (1) auf:

$$P_3 = \int_a^b \int_{x_1}^b \int_{x_2}^b [x_1,\ x_2,\ x_3]\,dx_3dx_2dx_1, \tag{2}$$

wo die symmetrische Function $[x_1,\ x_2,\ x_3]$ der Variabeln x_1, x_2 und x_3 durch die Gleichung

$$[x_1, x_2, x_3] = [x_1, x_2]\varphi''(x_3) + [x_1, x_3]\varphi''(x_2) + [x_2, x_3]\varphi''(x_1) \tag{2'}$$

gegeben ist.

Stellt man allgemein das Produkt von n derartigen bestimmten Integralausdrücken durch P_n vor, d. h. setzt man

$$P_n = \int_a^b \varphi(x)dx \cdot \int_a^b \varphi'(x)dx \cdot \cdot \cdot \cdot \int_a^b \varphi^{(n-1)}(x)dx, \tag{I}$$

so findet man:

$$P_n = \int_a^b \int_{x_1}^b \int_{x_2}^b \cdots \int_{x_{n-1}}^b [x_1, x_2, x_3, .. x_n]dx_n\,..\,dx_3dx_2dx_1, \tag{II}$$

wo der Ausdruck $[x_1,\ x_2,\ x_3,\ .\ .\ .\ x_n]$ eine symmetrische Function der Variabeln x_1, x_2, x_3, . . . x_n ist, die durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}[x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdot\ \cdot\ \cdot x_n] = {} & [x_1,\ x_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ x_{n-1}]\varphi^{(n-1)}(x_n) \\ & + [x_1,\ x_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ x_{n-2},\ x_n]\varphi^{(n-1)}(x_{n-1}) \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + [x_1,\ x_3,\ x_4,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ x_n]\varphi^{(n-1)}(x_2) \\ & + [x_2,\ x_3,\ x_4,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ x_n]\varphi^{(n-1)}(x_1) \end{aligned} \tag{III}$$

gegeben, wobei die Functionen:

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x)\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \varphi^{(n-1)}(x) \tag{IV}$$

der am Eingange erwähnten Anforderung nachkommen.

2.

Werden die in (IV) zusammengestellten Functionen untereinander gleich, und zwar gleich $\varphi(x)$ angenommen, so bietet die Gleichung (1') folgende dar:

$$[x_1, x_2] = 1 \cdot 2\, \varphi(x_1)\varphi(x_2),$$

die Gleichung (2') folgende:

$$[x_1, x_2, x_3] = 1 \cdot 2 \cdot 3\, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3),$$

und die allgemeine Gleichung (III) folgende;

$$[x_1, x_2, x_3, \cdots x_n] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) \cdots \varphi(x_n).$$

Dieses vorausgesetzt, bieten die Gleichungen (I) und (II) folgende dar:

$$\left(\int_a^b \varphi(x)dx\right)^n =$$

$$= 1.2.3\ldots n \int_a^b \int_{x_1}^b \int_{x_2}^b \cdots \int_{x_{n-1}}^b \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)dx_n\ldots dx_2dx_1, \quad (V)$$

von der in der folgenden Nummer bei der Annahme $n = 2$ ein paar Anwendungen mitgetheilt werden.

3.

Aus dem allgemeinen Ergebnisse in (V) zieht man unmittelbar folgende Gleichung:

$$\left(\int_0^a \varphi(x)dx\right)^2 = 2\int_0^a \int_x^a \varphi(x)\varphi(y)dydx;$$

nun ist:

$$\int_x^a \varphi(y)dy = \int_0^a \varphi(y)dy - \int_0^x \varphi(y)dy,$$

daher hat man auch:

$$\left(\int_0^a \varphi(x)dx\right)^2 = 2\int_0^a \int_0^x \varphi(x)\varphi(y)dydx,$$

aus der sehr bald folgende gezogen wird:

$$\left(\int_0^a \varphi(x)dx\right)^2 = 2\int_0^1\int_0^a \varphi(x)\varphi(xy)x\,dx\,dy. \qquad (A)$$

I. Mittelst dieses allgemeinen Ergebnisses gelangt man bald auf:

$$\left(\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}\right)^2 = \int_0^1\int_0^{a^2} \frac{dx\,dy}{(1+x)(1+y^2x)};$$

vollzieht man rechterhand die Integration nach x, so erhält man:

$$\left(\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}\right)^2 = -\int_0^1 \log\cdot\left\{1-\frac{a^2}{1+a^2}(1-y^2)\right\}\frac{dy}{1-y^2},$$

aus der sehr bald folgende Bestimmungen gezogen werden:

$$(\text{Arc tang. } a)^2 =$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdot\cdot(2n+2)}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdot\cdot(2n+1)}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^{n+1}, \qquad (3)$$

$$(\text{Arcsin. } a)^2 =$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdot\cdot(2n+2)}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdot\cdot(2n+1)}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}a^{2n+2}, \qquad (4)$$

wo die Summenzeichen über die ganzen und positiven Werthe von n, mitbegriffen die Grenzwerthe, sich erstrecken. — Die Reihe in (3) convergirt für alle reellen Werthe von a, die in (4) aber nur für jene Werthe von a, die die Einheit nicht übertreffen.

II. Dieselbe allgemeine Gleichung (A) führt auf:

$$\left(\int_0^1 e^{-ax^2}dx\right)^2 = \int_0^1\int_0^1 e^{-a(1+y^2)x}\,dx\,dy,$$

die, wenn rechterhand die Integration nach x durchgeführt wird, folgende darbietet:

$$\left(\int_0^1 e^{-ax^2}dx\right)^2 = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{1-e^{-a(1+y^2)}}{1+y^2}dy, \qquad (5)$$

wo a eine beliebige Constante ist. Setzt man einstweilen:

$$u = \int_0^1 \frac{1 - e^{-\,a(1 + y^2)}}{1 + y^2} dy,$$

so hat man auch:

$$u = e^{-\,a} \int_0^1 \frac{e^a - e^{-\,ay^2}}{1 + y^2} dy,$$

woraus sehr bald folgende gewonnen wird:

$$u = e^{-a} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\int_0^1 \frac{1 - (-1)^n y^{2n}}{1 + y^2} dy \right) \frac{a^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \,.\,.\, \cdot n};$$

vollzieht man die angedeutete Division hinter dem Integralzeichen, integrirt hierauf innerhalb der angezeigten Integrationsgrenzen, so erhält man:

$$u = e^{-a} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{2n - 1}\right) \frac{a^n}{1.2.3\ldots n}$$

Führt man folgende durch f(x) darzustellende Function von x ein:

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots\cdots, \qquad (6)$$

so bietet das Ergebniss in (5) folgende Integralbestimmungen dar:

$$\int_0^1 \frac{e^{-\,ax^2}}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4} e^a - f(a), \qquad (7)$$

$$\left(\int_0^1 e^{-\,ax^2} dx\right)^2 = \frac{e^{-\,a}}{a} f(a), \qquad (8)$$

in denen a eine beliebige Constante ist. Aus dem letztern Ergebniss zieht man auch folgendes allgemeinere:

$$\left(\int_0^b {}^{-\,ax^2} dx\right)^2 = \frac{e^{-\,ab^2}}{a} f(ab^2), \qquad (8')$$

wo a und b beliebige Constanten sind.

Aus der Gleichung in (7) wird ferner entnommen, dass der Grenzwerth von $e^{-x}f(x)$ beim unendlichen Wachsen der reellen Grösse x gleich $\frac{\pi}{4}$ ist; daher zieht man aus (8'), falls a und b reell, und letztere unendlich grosswerdend vorausgesetzt wird, die bekannte Integralbestimmung:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \tag{9}$$

wo a eine positive reelle Constante ist.

Beachtet man endlich den Umstand, dass folgender Ausdruck:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

kleiner als eins ist, und dass die ohne Ende fortlaufende Reihe:

$$x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

für jeden endlichen Werth von x zu der convergenten gehört: so kann dasselbe um so mehr auch von der Reihe in (6), die f(x) darstellt, ausgesagt werden.

4.

Wenn mit der Gleichung (1) die Specialisirung und Umstellung der vorangehenden Nr. vorgenommen wird, erhält man:

$$\int_0^a \varphi(x)dx \cdot \int_0^a \varphi'(x)dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^a [\varphi(x)\varphi'(xy) + \varphi(xy)\varphi'(x)]\, xdxdy. \tag{B}$$

Dieses allgemeine Ergebniss führt folgendes specielle herbei:

$$2\int_0^1 e^{-ax^2}dx \cdot \int_0^1 e^{-bx^2}dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left\{ e^{-(a+by^2)x} + e^{-(b+ay^2)x} \right\} dx\,dy,$$

aus dem folgendes gezogen wird:

$$2\int_0^1 e^{-ax^2}dx \cdot \int_0^1 e^{-bx^2}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - e^{-(a+by^2)}}{a+by^2}dy + \int_0^1 \frac{1 - e^{-(b+ay^2)}}{b+ay^2}dy, \quad (10)$$

wo noch a und b beliebige Constanten sein können. Werden nun a und b positiv und reell erklärt, so besteht auch folgende Gleichung:

$$2\sqrt{ab}\int_0^1 e^{-ax^2}dx \cdot \int_0^1 e^{-bx^2}dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \frac{1 - e^{-a(1+y^2)}}{1+y^2}dy + \int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{1 - e^{-b(1+y^2)}}{1+y^2}dy,$$

aus der auch folgende gezogen wird:

$$2\int_0^a e^{-x^2}dx \cdot \int_0^b e^{-x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - e^{-a^2}\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{e^{-a^2y^2}}{1+y^2}dy - e^{-b^2}\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{e^{-b^2y^2}}{1+y^2}dy. \quad (12)$$

Wird hier $b = \infty$ gesetzt, so gelangt man mit Zuziehung der Ergebnisse in vorangehender Nr. auch auf folgende Integralbestimmung:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}dx = e^{\frac{a}{2}}\sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot e^{\frac{a}{2}} - \sqrt{f(a)}\right\}. \quad (7')$$

welche als eine Ergänzung zu der in (7) angesehen werden kann, in der jedoch a eine reelle positive Constante ist.