Dr. Raabe, über den Werth eines bestimmten Integrals,

aus der unbestimmten Integralfunction gezogen, falls diese der Form Arctang. $f(x)$ ist, wo $f(x)$ eine eindeutige Function von x vorstellt.

Mitgetheilt den 15. März 1847.

Die Schwierigkeiten sind dem mit der Integralrechnung Vertrauten bekannt, wenn aus einer unbestimmten Integralfunction der Form:

$$\text{Arc sin. } f(x), \quad \text{Arc tang. } f(x) \text{ u. s. w.}$$

der Werth eines bestimmten Integrals abzuleiten ist. Die vorliegende Note hat nun zum Zweck, die Lösung dieses Problems in seiner ganzen Allgemeinheit mitzutheilen, falls $f(x)$ eine eindeutige Function von x repräsentirt.

Vorerst können alle vieldeutigen Functionen vorhin erwähnter Beschaffenheit nach bekannten Sätzen aus der Analysis des Endlichen auf die Eine Arc tang. $f(x)$ gebracht werden; daher wir auch nur diese zum Gegenstande unserer Mittheilung machen.

Von der Annahme des Vorhandenseins einer Integralgleichung der Form:

$$\int \varphi(x)\, dx = \text{Arc tang. } [f(x)] \tag{1}$$

ausgehend, wo $\varphi(x)$ und $f(x)$ eindeutige Functionen von x sind, theilen wir nun einen Doppelsatz mit, der das bestimmte Integrale $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ angibt, falls $\varphi(x)\omega$, wo ω eine unendlich kleinwerdende Grösse ist, für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ unendlich kleinwerdend verbleibt, wo nämlich der Uebergang von einem dieser Werthe zum unmittelbar folgenden durch das Increment ω bewerkstelliget wird.

Wenn a kleiner als b ist, welches wir durch $b - a = +$ andeuten, wenn ferner α_1, α_2, α_3, ... α_k innerhalb a und b fallende Zahlenwerthe von x sind, die, in analoger Weise angedeutet, den Bedingungen:

$$\alpha_1 - a = +, \quad \alpha_2 - \alpha_1 = +, \quad \alpha_3 - \alpha_2 = +,$$
$$\ldots \alpha_k - \alpha_{k-1} = +, \quad b - \alpha_k = +$$

entsprechen und die Grenzen bilden, wo die Function f(x) in Gleichheit (1) aus dem einen Zeichenzustande in den entgegengesetzten übergeht, so lautet der erwähnte Doppelsatz folgendermassen:

Stellt die Function f(x) in Gleichheit (1) von $x = a$ bis $x = \alpha_1$ positive Werthe, von $x = \alpha_1$ bis $x = \alpha_2$ negative, von $x = \alpha_2$ bis $x = \alpha_3$ positive u. s. w. dar, so hat man:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx =$$

$$= (-1)^k \text{Arc tang.}\,[(-1)^k f(b-\omega)] - \text{Arc tang.}\,[f(a+\omega)]$$
$$+ 2 \Big\{ \text{Arc tang.}\,[f(\alpha_1 - \omega)] - \text{Arc tang.}\,[f(\alpha_2 + \omega)] + \ldots$$
$$\ldots (-1)^{k-1} \text{Arc tang.}\,[f(\alpha_k + (-1)^k \omega)] \Big\}; \qquad (2)$$

wenn aber das Gegentheil stattfindet, d. h. wenn f(x) in Gleichheit (1) von $x = a$ bis $x = \alpha_1$ negative Werthe, von $x = \alpha_1$ bis $x = \alpha_2$ positive, von $x = \alpha_2$ bis $x = \alpha_3$ negative u. s. w. annimmt, so hat man folgende Bestimmungsgleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx =$$

$$=(-1)^{k-1} \text{Arc tang.}[(-1)^{k-1} f(b-\omega)] + \text{Arc tang.}[-f(a+\omega)]$$

$$-2 \Big\{ \text{Arc tang.}[f(\alpha_1+\omega)] - \text{Arc tang.}[f(\alpha_2-\omega)] + \ldots$$

$$\ldots (-1)^{k-1} \text{Arc tang.}[f(\alpha_k + (-1)^{k-1}\omega)] \Big\} . \qquad (3)$$

In diesen zwei Bestimmungsgleichungen stellt ω eine unendlich kleinwerdende Grösse dar, und ein Ausdruck rechter Hand der Gleichheitszeichen der Form Arc tang. $[\lambda]$ stellt den kleinsten positiven Kreisbogen vom Halbmesser Eins vor, dessen trigonometrische Tangente der jedesmal positiven Grösse λ gleich ist.

Bei der Begründung dieser Ergebnisse hat man folgende Momente zu beachten:

1) Wenn durch ((Arc tang. λ)) sämmtliche Kreisbogenwerthe angedeutet werden, denen dieselbe Tangente λ zugehört, so bestehen folgende zwei Bestimmungsgleichungen:

$$((\text{Arc tang. } \lambda)) = r\pi + \text{Arc tang. } \lambda ,$$

$$((\text{Arc tang. } \lambda)) = r\pi - \text{Arc tang. } [-\lambda] ;$$

die erste besteht für alle positive Werthe und die zweite für alle negative Werthe von λ, und in beiden stellt r eine beliebig ganze und positive Zahl, Null mitbegriffen, dar.

2) Wenn γ eine innerhalb a und b fallende Zahl ist, so hat man:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^\gamma \varphi(x)\, dx + \int_\gamma^b \varphi(x)\, dx .$$

3) Die im ersten Bande meiner Differenzial- und Integralrechnung in den Nrn. 132—134 begründeten Sätze.

4) Wenn endlich α_g einen der oben gebrauchten Zahlenwerthe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$ vorstellt, so besteht unter den getroffenen Prämissen folgende Gleichung:

$$f(\alpha_g - \omega) + f(\alpha_g + \omega) = 0,$$

die man auch als Grenzgleichung beim unendlichen Abnehmen von ω ansehen kann.

Verzeichniss der Geschenke für die Bibliothek der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.

Januar — März 1847.

1) *Raabe, J. L.* Die Differential- und Integralrechnung. Theil II. 8. Zürich, 1847. — Geschenkt von Hrn. Prof. Raabe.
2) Revue zoologique. 1845 et 1846. 8. Paris. — Von Hrn. Prof. Schinz.
3) Bulletin des séances de la Société vaudoise des sciences naturelles. No. 13. 8. Lausanne, 1847. — De la Société vaudoise des sciences naturelles.
4) Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. No. 87. 88. 8. Bern, 1847. — Von der naturforsch. Gesellschaft in Bern.
5) *Blanchet, R.* Catalogue des plantes vasculaires du Canton de Vaud. 8. Vevey, 1836. — Von Hrn. Rud. Wolf in Bern.
6) — — — Le mécanisme des sensations. 2de éd. 8. Lausanne, 1843. Von Demselben.
7) — — — Terrain erratique alluvien du bassin du Léman. 8. Lausanne, 1844. — Von Demselben.
8) — — — Influence de l'ammoniaque sur la végétation. 8. Lausanne, 1843. — Von Demselben.
9) *Trog, J. G.* Tabula analytica fungorum. 8. Bern, 1846. — Von Demselben.
