rung der Bildung der Corpora lutea wurden schon bei dieser Gelegenheit vorgezeigt.

In Folge dieser Vorweisung spricht Hr. Prof. Kölliker sein ungetheiltes Lob über die Schönheit und Brauchbarkeit der von Hrn. Prof. Meyer angefertigten Modelle aus, und macht zugleich die Anzeige, dass er als Director der physiologischen Sammlung im Falle sei, Suiten solcher Modelle, theils gegen Bezahlung, theils im Tausche, abzulassen.

Prof. W. Deschwanden, über die Bewegung von Flüssigkeiten.

Vorgetragen den 15. Februar 1847.

Die Veranlassung zu folgenden Untersuchungen waren theoretische Arbeiten über einige hydraulische Maschinen, wesshalb durchaus nur diejenigen Fälle berücksichtigt wurden, bei welchen die Bewegung der Flüssigkeit in irgend einem Punkte des von ihr durchströmten Raumes immer gleich bleibt. Diess ist namentlich dann der Fall, wenn die Flüssigkeit eine Röhre oder irgend ein anderes Gefäss mit immer gleicher Geschwindigkeit durchströmt, ausserdem aber auch bei freien Wasserstrahlen. Im Folgenden sollen nun theils die Grundsätze angegeben werden, nach welchen diese Untersuchungen geführt wurden, theils einige von den erhaltenen Ergebnissen.

Bei der vorausgesetzten Art der Bewegung beschreibt irgend ein unendlich kleines Flüssigkeitstheilchen einen kanalförmigen Raum mit unendlich kleinem und veränderlichem Querschnitte und verschiedenen Krümmungen. Jedem in diesem Kanale befindlichen Flüssigkeitstheilchen folgt unmittelbar ein anderes genau auf demselben Wege, diesem ein drittes u. s. w., so dass ein solches Kanälchen als feststehend betrachtet werden kann. Es ergiebt sich nun sogleich, dass die ganze bewegte flüssige Masse in solche unveränderlich bleibende Elementarkanäle zerlegt werden kann.

Da nun die Bewegung der Flüssigkeit in irgend einem Punkte eines solchen Elementarkanals berechnet werden kann, wenn man den Druck, den sie in diesem Punkte erleidet, sowie den Druck und die Bewegung in irgend einem andern Punkte des Kanals kennt, der um eine bekannte Grösse über oder unter jenem ersten liegt, so ist vor Allem nöthig zu untersuchen, wie der Druck bestimmt werden könne, welchen irgend ein Punkt eines Elementarkanales auszuhalten habe. Da ferner dieser Druck jedenfalls in hohem Grade von dem Drucke der benachbarten Flüssigkeitstheilchen abhängig ist, so muss zunächst untersucht werden, nach welcher Richtung sich in der bewegten Flüssigkeit der Druck irgend eines Punktes fortpflanze, und dann, wie sich die Intensität dieses Druckes verändere.

Bedenkt man nun, dass sämmtliche Kräfte, die in irgend einem Zeitpunkte auf ein in einem Elementarkanale befindliches Flüssigkeitstheilchen wirken, der Grösse und Richtung nach so beschaffen sein müssen, dass die Bewegung des Theilchens in diesem Zeitpunkte nach der Tangente gerichtet ist, die man durch dasselbe an den Elementarkanal ziehen kann, in welchem es sich befindet, so überzeugt man sich leicht, dass in einem Elementarkanale nur der Druck derjenigen Flüssigkeitstheilchen auf einander gleich gross sein kann, die im gleichen normalen Querschnitte liegen, während schief durch den Kanal geführte Querschnitte im Allgemeinen verschiedenen Druck darbieten. Da nun je zwei sich berührende Elementarkanäle an den Berührungspunkten gleichen Druck erleiden, so folgt, dass sich der Druck im Innern einer bewegten Flüssigkeit stets normal auf die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen fortpflanzt. Alle Punkte, nach welchen sich der Druck irgend eines Punktes der Flüssigkeit fortpflanzt, liegen mithin in einer Fläche, die überall normal auf den von den Flüssigkeitstheilchen beschriebenen Curven steht; sie mag Normalfläche genannt werden. — Die Grösse des in der Normalfläche fortgepflanzten Druckes wird theils durch die Schwere, theils durch die Fliehkraft der einzelnen Flüssigkeitstheilchen verändert. Der von der Schwere herkommende Druck ist in jenen Punkten der gleichen Normalfläche am grössten, die am tiefsten liegen, zu solchen aber, auf welche die Fliehkraft stärker wirkt, gelangt man, wenn man von irgend einem Punkte der Normalfläche auf derselben so fortschreitet, dass man alle Elementarkanäle zuerst auf ihrer hohlen Seite trifft. Es ist nun bekannt, dass in zwei verschiedenen Querschnitten eines geschlossenen Kanals die Geschwindigkeit gleich ist, wenn in dem tiefer liegenden der Druck auf die Flächeneinheit der Flüssigkeit um das Gewicht einer Flüssigkeitssäule grösser ist, deren Höhe gleich dem Höhenunterschiede beider Punkte und deren Querschnitt eine Flächeneinheit ist. Nimmt man nun an, alle Elementarkanäle der flüssigen Masse gingen vom gleichen Flüssigkeitsspiegel aus, so hat daher jene Veränderung des inneren Druckes durch die Schwere keinen Einfluss auf die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, denn die Verschiedenheit des daher kommenden Druckes in der gleichen Normalfläche ist immer gleich dem Gewichte jener Flüssigkeitssäule. Dagegen ist die Geschwindigkeit an denjenigen Punkten einer Normalfläche am kleinsten, in welchen der von der Fliehkraft ausgeübte Druck am grössten ist, indem dieser gegen die Bewegung wirkende Druck durch keinen andern aufgehoben wird. Es folgt daraus: dass man immer *kleinere* Geschwindigkeiten antrifft, wenn man auf einer Normalfläche gegen die *hohlen* Seiten der Elementarkanäle fortschreitet, immer *grössere* dagegen, wenn man gegen die *erhabenen* fortgeht. Ist die Gestalt der Elementarkanäle genau oder angenähert bekannt, so kann auch die Grösse jener Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit auf einer und derselben Normalfläche genau oder angenähert angegeben werden.

Hieraus ergeben sich nun folgende Folgerungen. Sind die Elementarkanäle geradlinig, so ist die Fliehkraft der Flüssigkeitstheilchen gleich Null, und die Geschwindigkeit, sofern alle Elementarkanäle vom gleichen Flüssigkeitsspiegel herkommen, ist in allen Punkten einer und derselben Normalfläche gleich gross. Diess lässt sich auf die Bewegung des Wassers in Kanälen und Gerinnen u. dgl. anwenden (natürlich überall ohne Berücksichtigung der Reibung der Theilchen an einander und an den Kanalwänden); hier mag nur folgender Fall näher berührt werden. Bekanntlich entsteht mitten in dem Spiegel der durch einen Trichter fliessenden Flüssigkeit eine Vertiefung, wenn derselbe bis zur Nähe der Ausflussöffnung hinuntergesunken ist, in welchem sich die Flüssigkeit in wirbelnder Bewegung herumdreht. Verzeichnet man sich nun die Elementarkanäle im Trichter, was sehr angenähert geschehen kann, und ebenso mehrere Normalflächen in der Nähe des Flüssigkeitsspiegels, so wird man sich sogleich überzeugen, dass die Mitte des Spiegels einer andern Normalfläche angehört als die Ränder, und zwar einer solchen, die näher bei der Ausflussöffnung gelegen ist. Nun wird aber der Querschnitt der Elementarkanäle um so kleiner und die Geschwindigkeit der Flüssigkeit um so grösser, je näher man zur Ausflussöffnung kommt. Daher senkt sich die Mitte des Flüssigkeitsspiegels schneller als die Ränder und bildet eine kleine Vertiefung. Wegen der leichten Beweglichkeit strömen nun die auf der Oberfläche und zugleich an den Rändern gelegenen Flüssigkeitstheilchen nach der Mitte hinunter, und erzeugen, sobald sich ihre von allen Seiten her gerichteten Bewegungen nicht ganz genau aufheben, eine wirbelnde Bewegung, in welche alle nachfolgenden Theilchen ebenfalls hineingerissen werden, und sie, wenn sie einmal begonnen, fortwährend erhalten.

Ueber die Anwendung der oben ausgesprochenen Gesetze auf krummlinige Bewegung mag Folgendes angeführt werden.

Lässt man einen Flüssigkeitsstrahl mit rechteckigem Querschnitte durch einen Kanal gehen, der aus zwei geraden, durch eine Curve mit einander verbundenen Stücken besteht, und dessen hohle Wand man sich der freieren Bewegung der Flüssigkeit wegen einstweilen wegdenken mag, so müssen sich, jenen Sätzen zufolge, an der krummen Stelle folgende Erscheinungen zeigen. Auf der innern, freien, hohlen Fläche des Strahles bleibt die Geschwindigkeit überall gleich gross; durchschneidet man aber von da aus die Elementarkanäle gegen die erhabene Fläche hin, so trifft man auf immer kleinere Geschwindigkeiten, weil der durch die Centrifugalkraft hervorgebrachte Druck immer mehr zunimmt; auf der erhabenen Fläche des Strahles selbst ist die Geschwindigkeit am kleinsten. Eine unmittelbare Folge dieser Abnahme der Geschwindigkeit ist ferner eine Zunahme des durch den

Strahl geführten Querschnittes, so dass dieser in Krümmungen grösser ist als an geraden Stellen des Kanals. Diess lässt sich auch auf den Fall anwenden, da die erhabene Seite des Kanals nicht allmälig gebogen, sondern in einem Winkel plötzlich gebrochen wird. Den Rechnungen zufolge rundet sich alsdann die hohle Seite mit einem angenähert bestimmbaren Krümmungshalbmesser ab, die Geschwindigkeit verkleinert sich in der Nähe der Ecke ziemlich rasch, und wird in dieser selbst sogar gleich Null. Die hohle Seite des Strahles kommt ihrer Gestalt nach einer Hyperbel am nächsten, deren Assymptoten parallel mit den beiden geradlinigen Theilen der Kanalwand und von denselben um diejenige Dicke des Strahles entfernt sind, die er an den noch vollkommen geradlinigen Stellen besitzt. — Wendet man die Ergebnisse der Betrachtungen über einen krummen Strahl auf die Bewegung der Flüssigkeiten in krummen Röhren an, so folgt, dass jene dickste Stelle des Strahles auf die Mitte des Krümmungsbogens fällt, und dass der Strahl in diesem Punkte die Röhre ganz ausfüllt, sowohl vor als hinter demselben aber eine Contraktion erleidet. In etwas weiterer Entfernung von diesen contrahirten Stellen wird sodann der Strahl die Röhre wieder anfüllen, sowohl vor als hinter der Krümmung. Zwischen dem contrahirten Strahle und der hohlen Röhrenwand müssten demnach auf beiden Seiten der Krümmung kleine Räume entstehen, die nur mit stillstehender oder wirbelnder Flüssigkeit angefüllt wären. An der Stelle aber, wo der contrahirte Strahl nach durchlaufener Krümmung durch die Reibungen und den Luftdruck genöthigt wird, die Röhre wieder auszufüllen, müsste ein Verlust an lebendiger Kraft oder Gefällshöhe eintreten, die nach dem Carnot'schen Satze berechnet werden kann, sobald die Geschwindigkeit und das Verhältniss des contrahirten zum vollen Querschnitte bekannt ist. Vergleicht man die auf diese Weise berechneten Gefällsverluste mit den durch die Versuche von Dubuat bestimmten, so sind jene im Mittel etwa um $^1/_5$ ihrer eigenen Grösse kleiner als diese; die grössten und kleinsten Abweichungen von dieser Mittelzahl betragen nicht mehr als etwa $^1/_{10}$ oder höchstens $^1/_8$ der Grösse, mit einer einzigen, bei einem sehr kleinen Biegungswinkel vorkommenden Ausnahme. Da sich jenes regelmässige Zurückbleiben der berechneten Werthe unter den wirklichen leicht durch die Unregelmässigkeiten in der Bewegung und die Reibungen erklärt, welche nicht in Rechnung gezogen wurden, so scheinen mir die erhaltenen Zahlen die Wahrscheinlichkeit zu vergrössern, dass die hier zu Grunde gelegten Grundsätze und die angewendete Rechnungsart keine bedeutenden Fehler enthalten.

Die Anwendung derselben auf den Ausfluss der Flüssigkeit aus dünner Wand konnte bis zu einem gewissen Punkte, für einzelne Fälle ziemlich vollständig durchgeführt werden. Bei runder Oeffnung und ringsum gleichmässiger Contraktion bildet ein geradliniger Elementarkanal die Axe des Strahles; die übrigen Elementarkanäle krümmen sich um so mehr, je mehr sie von der Axe entfernt sind. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen ist daher an der Oberfläche am grössten und nimmt gegen die Axe zu ab, welche erst da die gleiche Geschwindigkeit erhält, wo der Strahl die cylindrische Gestalt vollständig angenommen hat. In Bezug auf die Gestalt des contrahirten Strahles folgt aus den Rechnungen, dass der äussere Umriss desselben (wenn man ihn senkrecht auf seine Axe anschaut) immer ein Stück der gleichen krummen Linie sei, möge nun der Ausfluss durch eine ebene Wand, eine conische Ansatzröhre oder eine einspringende Röhre geschehen, dass diese Linie, wenn man auf ihr gegen die Bewegung hingeht, sich immer mehr von der Axe abbiegt, und endlich zu einem Punkte gelangt, dessen Tangente senkrecht auf der Axe steht und wo der Strahl zugleich seinen grössten Querschnitt hat. Beim Ausflusse durch conische Röhren entspricht nun die Stelle an der Ausflussöffnung einem Punkte jener Linie der weit von dem grössten Querschnitte entfernt ist, beim Ausflusse aus ebener Wand rückt jene Stelle diesem Punkte schon näher, beim Ausflusse durch eine einspringende Röhre fällt sie endlich ganz mit ihm zusammen, so dass in diesem Falle die ganze besprochene Linie ausgebildet zum Vorschein kommt. Wie weit nun aber der Ausflusspunkt in den beiden ersten Fällen von dem grössten Querschnitte entfernt sei, liess sich bis jetzt nur mit weiter Annäherung bestimmen; aus der Theorie ergibt sich nur, dass bei conischen Röhren und der ebenen Wand der Ausflusspunkt jedenfalls um ein gewisses Stück vom grössten Querschnitte entfernt sein muss, indem sie nachweist, dass die Oberfläche des Flüssigkeitsstrahles bei der Ausflussöffnung die Gefässwand nicht tangirt, sondern dieselbe unter einem Winkel schneidet. Daraus würde dann namentlich auch folgen, dass keine Flüssigkeitstheilchen in dem Gefäss bis zu ihrem Ausflusse immer mit der Gefässwand in Berührung bleiben könnten, sondern dass diejenigen, die in einiger Entfernung über diese Wand gegen die Oeffnung hingleiten, in der Nähe der letztern sich von derselben entfernen müssten, um einen Bogen zu beschreiben, der beim Austritt aus der Oeffnung die Wand unter dem besprochenen Winkel schneidet. Zwischen diesem Bogen und der

Wand müsste sich dann eine ringförmig um die Oeffnung gelagerte, stillstehende oder wirbelnde Flüssigkeitsmasse befinden, welche sich nicht wesentlich mehr mit der übrigen Flüssigkeit vermischte, sondern fast ganz abgeschlossen für sich wäre.

Zur Vergleichung mit der Erfahrung konnten bisher nur die bekannten Contraktionscoeffizienten benutzt werden. Nimmt man beim Ausflusse aus ebener Wand für die Entfernung des Ausflusspunktes von dem (eingebildeten) grössten Querschnitte verschiedene nicht unwahrscheinliche Grössen an, so erhält man für das Verhältniss des contrahirten Querschnittes zur Ausflussöffnung die Zahlen 0,549 bis 0,694, was allerdings mit den Contraktionscoeffizienten ziemlich gut stimmt. Das Verhältniss des contrahirten Querschnittes zum grössten Querschnitte ist 0,463, eine Zahl, die dem Contraktionscoeffizienten 0,5 für eine einspringende cylindrische Röhre gleich kommen sollte. Hier erhält man also mit Sicherheit eine ganz gute Annäherung. — Was die Gestalt des Strahles betrifft, so würde sein Durchmesser der Rechnung zufolge zwar erst in unendlicher Entfernung von der Ausflussöffnung den kleinsten Werth erreichen, weicht aber in einer Entfernung von etwa $1/4$ des kleinsten Durchmessers schon nur noch um etwa $1/10$, in einer Entfernung von $1/2$ des kleinsten Durchmessers noch um $1/50$ von diesem kleinsten Durchmesser selbst ab.