der amerikanischen Pferdeencephalomyelitis beherbergen und so eine Gefahr auch für den Menschen darstellen (Übertragung durch Mücken).

Mit bakterienfrei filtriertem Darminhalt von Mäusen konnte man durch Injektion ins Gehirn bei Mäusen Encephalitis erzeugen und intracerebral passageweise von Maus zu Maus fortzüchten (M. THEILER). Möglicherweise gibt es noch andere durch das Experiment zu entdeckende Virusträger und Infektionskrankheiten, die sich in ihnen stumm erhalten und plötzlich, durch ein disponierendes Moment, als scheinbar neue auftreten.

Die ausserordentlich ausgedehnte Literatur über Virus und Viruskrankheiten ist mit ziemlicher Vollständigkeit in den folgenden neueren Sammelarbeiten zu finden:

R. BIELING, Die Viruskrankheiten des Menschen, Leipzig 1941.

K. BELLER und R. BIELING, Die Viruskrankheiten der Haus- und Laboratoriumstiere, Leipzig, 1942.

R. DOERR und C. HALLAUER, Handbuch der Virusforschung, Wien 1938/39.

W. FREI. Neuere Ergebnisse der physikalisch-chemischen Erforschung filtrabler Viren, Zeitschr. f. Infektionskr. d. Haustiere, *50*, 253, 1938.

E. GILDEMEISTER, E. HAAGEN und O. WALDMANN. Handbuch der Viruskrankheiten, Jena 1939.

Vgl. auch: S. EDLBACHER. Chemische Grundprinzipien des Lebens, Verh. d. Naturf. Gesellsch. Basel, *53*, 285, 1942.

Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe[1]

Von

H. HADWIGER (Bern)

(Mit 4 Abbildungen im Text)

Unter einem Streckenkomplex der Ordnung n verstehen wir ein System von n Punkten, von denen je zwei entweder durch eine (genau eine) Strecke verbunden sind oder nicht. Das so definierte Gebilde soll abstrakt aufgefasst und nach rein kombinatorisch-topologischen Gesichtspunkten studiert werden. Obschon grundsätzlich an dieser Auffassung festgehalten werden muss, kann doch empfohlen werden, mit dem Begriff Streckenkomplex die Vorstellung der naheliegenden geometrischen Realisierung in einem geeigneten Raum zu verbinden.

Punkte, die durch eine Strecke verbunden sind, heissen benachbart. Einen Komplex der Ordnung k, bei welchem je zwei Punkte benachbart

[1]) Vortrag, gehalten am 15. Dezember 1942 im mathematischen Kolloquium der E. T. H. und der Universität Zürich.

sind, nennen wir Simplex der Ordnung k und bezeichnen ihn mit S(k). Der Streckenkomplex U in den nachstehenden Abbildungen veranschaulicht einen S (5). Unter der chromatischen Zahl f des Komplexes A verstehen wir die kleinste Anzahl von Farben, welche ausreicht, um die Punkte von A so zu färben, dass benachbarte Punkte stets verschiedene Farben aufweisen. Einen Komplex, bei dem je zwei Punkte durch einen Streckenzug verbunden werden können, nennt man zusammenhängend. Unter einem Zusammenzug eines Komplexes A verstehen wir die folgende Operation: Eine Strecke von A wird gelöscht und die beiden Endpunkte identifiziert (A wird längs der bezeichneten Strecke zusammengezogen); von eventuell auftretenden Doppelstrecken, d. h. von zwei Strecken, die die gleichen Punkte von A verbinden, wird die eine gelöscht. Wir sagen, der Komplex A werde auf B zusammengezogen, wenn B aus A durch wiederholt ausgeführte Zusammenzüge erhalten werden kann.

Im folgenden sprechen wir von einer Möglichkeit der Klassifikation der Streckenkomplexe, die besonders im Hinblick auf das Problem der chromatischen Zahl von besonderem Interesse zu sein scheint. Wir kommen zu der folgenden entscheidenden Definition:

Ein Komplex A heisst ein K(k), wenn er sich auf einen S(k), aber nicht auf einen S(k+1) zusammenziehen lässt.

Ein K (k) ist notwendig ein zusammenhängender Komplex. Die Eigenschaft, ein K (k) zu sein, kennzeichnet eine Art des höheren Zusammenhangs, die durch die natürliche Zahl k gegeben ist[2]). Es gibt einen einzigen K (1), nämlich den Punkt. Die Klasse der K (2) ist identisch mit der Klasse der sog. Bäume[3]). Die Einteilung der zusammenhängenden Komplexe in die Klassen K (3), K (4), . . . kann als logische Fortsetzung nach dem Auswahlprinzip aufgefasst werden, nach dem die Auswahl der Bäume vorgenommen wurde. Im Zusammenhang mit dem oben erwähnten chromatischen Problem wurde die Einteilung der Streckenkomplexe nach dem Geschlecht vorgenommen. Unter dem Geschlecht p des Komplexes A versteht man die kleinste in Betracht fallende Geschlechtszahl einer geschlossenen zweiseitigen Fläche, auf der der geometrisch realisierte Komplex A schlicht, d. h. ohne Überschneidungen der Strecken, eingebettet werden kann. Da ein Zusammenzug eines Komplexes, der auf einer Fläche schlicht liegt, so vollzogen werden kann, dass der entstehende Komplex ebenfalls schlicht liegt, kann durch den Prozess des Zusammenziehens das Geschlecht eines Komplexes keine Erhöhung erfahren. Hieraus erfolgt, dass das Geschlecht eines Komplexes K (k) nicht kleiner sein kann als das Geschlecht p (k) des S (k). Für $k \geq 1$ gilt[4])

---

[2]) Die von K. Wagner (Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Math. Ann. *114* [1937], 570—590) studierte Klasse K* fällt mit unseren Bezeichnungen zusammen mit der Vereinigungsmenge K (1) + K (2) + K (3) + K (4). Vgl. auch K. Wagner, Zwei Bemerkungen über Komplexe, Math. Ann. *112* (1936) 316—321.

[3]) Vgl. D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936. S. 47 ff.

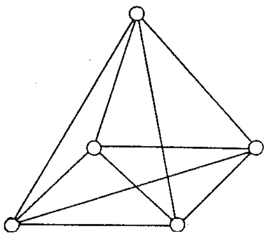
[4]) Vgl. L. Heffter, Über das Problem der Nachbargebiete. Mat. Ann. *38* (1891), 246—269.

$$k \leqq \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48\, p(k)}}{2} \right] \tag{1}$$

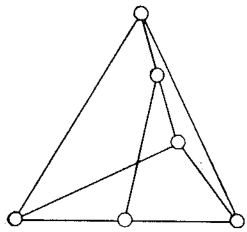
Für $k = 5$ folgt insbesondere der WEISKE'sche Satz, der besagt, dass der Simplex $S(5)$ nicht auf der Kugel (oder in der Ebene) schlicht gebettet werden kann. So schliesst man:

Jeder ebene Komplex (Komplex vom Geschlecht Null) ist höchstens ein $K(4)$.

Die Klasse der $K(4)$ ist jedoch umfassender als die Klasse der ebenen Komplexe. Der Komplex V der nachstehenden Abbildungen zeigt einen nicht ebenen $K(4)$. Die abgebildeten Komplexe U und V sind übrigens für die Theorie der Streckenkomplexe besonders bedeutungsvoll. Sie spielen bei der von KURATOWSKI[5]) gegebenen Charakterisierung der ebenen Komplexe eine Rolle. Nach diesem Satz ist ein Komplex dann und nur dann eben, wenn er sich nicht zu einem Komplex reduzieren lässt, der



U



V

zu U oder zu V homöomorph ist. Zwei Komplexe heissen homöomorph, wenn sie durch Teilung von Strecken durch neue Punkte ineinander übergeführt werden können. Unter einer Reduktion eines Komplexes A versteht man eine der folgenden Operationen: Eine Strecke von A wird gelöscht; ein Punkt von A wird mit allen anstossenden Strecken gelöscht. Ein Komplex A heisst auf den Komplex B reduziert, wenn sich B aus A durch wiederholt ausgeführte Reduktionen ergibt.

Aus dem Satz von KURATOWSKI folgt, dass jeder $K(k)$ für $k \leqq 3$ eben sein muss, da der Komplex V ein $K(4)$, der Komplex U ein $K(5)$ ist. Bei den unzähligen Versuchen, das bekannte Vierfarbenproblem zu lösen, d. h. die Vermutung zu beweisen, dass die chromatische Zahl eines ebenen Komplexes 4 ist, stiess man immer wieder auf die typischen Schwierigkeiten, die z. T. daher zu rühren scheinen, dass keine zu einem induktiven Beweis dienliche Deformation des Komplexes angegeben werden kann, welche gleichzeitig chromatische Zahl und Geschlecht unverändert lässt. Dadurch wird die Vermutung nahegelegt, dass das Geschlecht eines

[5]) C. KURATOWSKI, Sur le problème des courbes gauches en Topologie. Fundamenta Mathematicae *15* (1930), 271—283.

Komplexes nicht in dem Masse für die chromatische Zahl kennzeichnend ist, wie das im allgemeinen stillschweigend angenommen wird, indem man sich bei den Beweisversuchen nicht glaubt von der Ebenheit der Komplexe trennen zu dürfen. Die hier gegebene Klassifikation der Streckenkomplexe bietet eine Möglichkeit, das chromatische Problem grundsätzlich unabhängig vom Geschlechtsbegriff zu behandeln. Verschiedene Feststellungen stützen nämlich die Vermutung, dass die chromatische Zahl eines K (k) nicht grösser als k ausfällt. Sie kann indes tatsächlich kleiner als k sein. So ist die chromatische Zahl des V, der ein K (4) ist, nur 2. — Bedenken wir nun, dass ein ebener Komplex höchstens ein K (4) sein kann, so wäre durch den vermuteten Satz das Vierfarbenproblem in positivem Sinne entschieden.

Es kann weiter gezeigt werden[6]), dass die chromatische Zahl f (p) eines Komplexes vom Geschlecht $p > 0$ der Abschätzung

$$f(p) \leqq \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right] \tag{2}$$

unterworfen ist. Bezeichnet k (p) die maximale Ordnung des S (k) vom Geschlecht p, so gilt für geeignete Komplexe offenbar

$$k(p) \leqq f(p). \tag{3}$$

Nun wurde für verschiedene p gezeigt[7]), dass

$$k(p) = \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right] \tag{4}$$

ist. In Verbindung mit (2) und (3) ergibt sich für diese Geschlechtszahlen die Identität

$$k(p) = f(p), \tag{5}$$

deren Richtigkeit übrigens für alle p vermutet wird. Wie man sich leicht überlegt, würde aus dem Färbungssatz für die K (k) ohne weiteres die Richtigkeit dieser Vermutung für alle p folgen. — Beweisversuche dieses Färbungssatzes hatten bisher nur Erfolg für $k \leqq 3$, d. h. es gilt:

Satz 1 *Die chromatische Zahl eines K (k) ist nicht grösser als k, falls $k \leqq 3$ ist.*

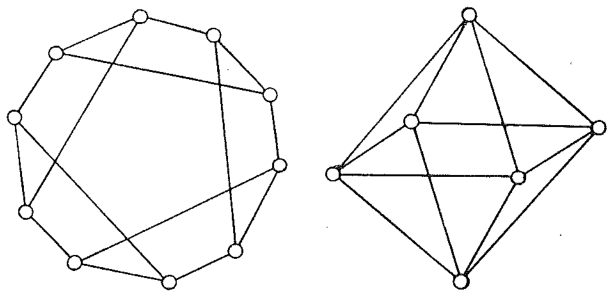
Es wird sich sogar eine Verschärfung dieses Färbungssatzes ergeben, die darauf beruht, dass die nachzuweisende k-Färbung des K (k) einer gewissen

[6]) Vgl. den kurzen Beweis bei D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN, Anschauliche Geometrie. Berlin 1932, S. 294–300.
Jedes Polyeder vom Zusammenhang $h > 3$ lässt eine $\left[\frac{7+\sqrt{24h-23}}{2}\right]$ - Färbung zu.

[7]) Vgl. L. HEFFTER (Fussnote 4). So ist $k(0) = 4$, $k(1) = 7$, $k(2) = 8$, $k(3) = 9$.

Nebenbedingung zu genügen vermag. Es wird damit Einblick in eine Möglichkeit geboten, einen induktiven Färbungsbeweis mit gleichzeitiger Berücksichtigung einer Färbungsnebenbedingung aufzubauen. Um diesen Färbungssatz bequemer aussprechen zu können, und auch um den Beweis formal zu vereinfachen, müssen zunächst einige Begriffe eingeführt werden.

A heisst echter Teilkomplex von B, geschrieben $A \subset B$, wenn die Punkte von A eine echte Teilmenge der Punkte von B sind, und wenn zwei Punkte in A dann und nur dann benachbart sind, wenn sie es auch in B sind. Gilt entweder $A \subset B$ oder $A = B$, so schreibe man $A \subseteq B$. Es muss besonders darauf hingewiesen werden, dass eine Reduktion einen Komplex nicht notwendig in einen Teilkomplex überführt. Wir erklären noch die Summe $A + B$ und das Produkt $A \cdot B$ von zwei Komplexen A und B. $A + B$ bzw. $A \cdot B$ bezeichne den Komplex, dessen Punkte die Vereinigungsmenge bzw. den Durchschnitt der Punkte der Komplexe A und B sind, wobei zwei Punkte dann und nur dann benachbart sein



X W

sollen, wenn sie entweder in A oder in B oder in A und in B benachbart sind. Es empfiehlt sich, an dieser Stelle den Verbindungskomplex $A \times B$ zweier Teile von C einzuführen. $A \times B$ bezeichne denjenigen Teilkomplex von C, dessen Punkte zu $A + B$ gehören, die in C, dagegen aber nicht in $A + B$ benachbart sind. Wenn A und B komplementäre Teile von C sind, so gilt offenbar $C = (A + B) + (A \times B)$. Komplexe der oben definierten Art brauchen natürlich nicht zu existieren. Für einen Komplex A, der nicht existiert, kann zweckmässig $A = 0$ geschrieben werden.

Ein K (k), der keinen K (k) als echten Teilkomplex enthält, heisst primitiv. Einen K (k), der bei jeder Reduktion in einen K (k—1) übergeht, nennen wir dagegen irreduzibel. Offenbar ist jeder irreduzible K (k) primitiv, aber nicht umgekehrt. Der Komplex V ist ein primitiver aber nicht irreduzibler K (4). Der Komplex X ist ein irreduzibler K (5). Es gelten nun die folgenden Färbungssätze:

Satz 1a Die chromatische Zahl eines primitiven K (k) ist nicht grösser als k, falls $k \leqq 3$ ist.

Satz 1b Ist $K(k)^*$ ein primitiver echter oder unechter Teilkomplex des $K(k)$ und ist in $K(k)^*$ eine k-Färbung vorgegeben, so gibt es eine k-Färbung des $K(k)$, so dass die k-Färbung des $K(k)^*$ unverändert bleibt, falls $k \leqq 3$ ist.

Da offenbar jeder $K(k)$ einen (nicht notwendig echten) primitiven Teilkomplex besitzt, so ist durch die Sätze 1a und 1b eine Verschärfung von Satz 1 gegeben. Bei Satz 1b handelt es sich um einen Färbungsfortsetzungssatz. Die Beweise der oben und nachfolgend formulierten Sätze werden am Schlusse im Zusammenhang gegeben.

Beim Versuch, den Satz 1 auf $k > 3$ auszudehnen, ergeben sich indessen bedeutende Schwierigkeiten. Es scheint auch hier eine eigentümliche Regellosigkeit wirksam zu werden, welche eine gesetzmässige Erfassung der kombinatorisch-topologischen Möglichkeiten stark behindert. Man kann von einer Unstetigkeit im Verhalten der $K(k)$ beim Übergang von $k = 3$ zu $k = 4$ sprechen, die z. B. auch in dem nachfolgenden Satz deutlich zutage tritt.

Satz 2 Stossen in jedem Punkt eines zusammenhängenden Streckenkomplexes mehr als $k-2$ Strecken zusammen, so ist er mindestens ein $K(k)$, falls $k \leqq 4$ ist.

Für $k = 5$ ist dieser Satz dagegen unrichtig. Der Komplex W der obenstehenden Abbildungen ist ein $K(4)$, und in jedem Punkt stossen mehr als 3 Strecken zusammen.

Die in Satz 2 beachtete Eigenschaft eines Komplexes hängt eng mit der Zusammenhangszahl von WHITNEY[8]) zusammen, auf die wir hier nicht weiter eintreten.

Ein zusammenhängender Komplex, der durch eine geeignete Reduktion um einen einzigen Punkt zerfällt, d. h. in zwei nicht triviale nicht zusammenhängende Teile zerlegt wird, heisst separabel.

Es gilt der für alle $k \geqq 1$ gültige Satz

Satz 3 Ist n die Ordnung und s die Anzahl der Strecken eines $K(k)$, so gilt

$$2s - 2n + 3k - k^2 \geqq 0$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann, und für nicht separable Komplexe nur dann, wenn $K(k)$ irreduzibel ist. Für $k = 2$ gilt das Gleichheitszeichen immer.[9])

Nachfolgend stellen wir noch kurz die noch ausstehenden Beweise zusammen:

Beweise der Sätze 1a und 1b:

---

[8]) H. WHITNEY, Non-separable and planar graphs. Transactions of the American Mathematical Society *34* (1932), 339—362.

[9]) Es handelt sich um die bekannte Relation der Bäume: $s - n + 1 = 0$. Vgl. D. KÖNIG (Fussnote 3) S. 53.

Für $k = 1$ und $k = 2$ sind die Sätze trivial. Der $S(k)$ ist für $k \leq 2$ der einzige primitive $K(k)$. Es sei also $k = 3$. Ein primitiver $K(3)$ ist ein einfach geschlossener Streckenzug, ein sog. Kreis. Ein primitiver $K(3)$ kann also immer mit 2 oder 3 Farben gefärbt werden, je nachdem seine Ordnung gerade oder ungerade ist. Damit ist Satz 1a bewiesen.

Es sei nun A ein $K(3)$ und $C \subseteq A$ ein primitiver $K(3)$. C weise eine 3-Färbung auf. Die Behauptung, dass A eine 3-Färbung zulässt, welche die gegebene Färbung von C unverändert lässt, sei bewiesen für alle A der Ordnungen $n = 3, 4 \ldots m-1$. Dies trifft gewiss zu für $m = 4$, wo $A = C = S(3)$ ist. Es sei also m die Ordnung von A und $m \geq 4$. Ist $C = A$, so ist die Behauptung mit der Voraussetzung identisch und also bewiesen. Es sei also $C \subset A$. Es gibt ein $B \subset A$, $B . C = 0$, $A = (C + B) + (B \times C)$.

1. Fall: B ist nicht zusammenhängend.

$B = B_1 + B_2$, $B_1 . B_2 = 0$, $B_1 \times B_2 = 0$, $A_1 = C + B_1$, $A_2 = C + B_2$. Offenbar gilt $A_1 \subset A$ und $A_2 \subset A$. Nach der induktiven Voraussetzung kann die Färbung über C auf A_1 und ebenso auf A_2 fortgesetzt werden, so dass im Hinblick auf $B_1 \times B_2 = 0$ eine Färbung von A erzielt ist, welche die gegebene Färbung von C unverändert lässt.

2. Fall: B ist zusammenhängend.

Die Ordnung q des Komplexes $Q = C . (C \times B)$ kann nicht grösser als 2 sein, da man sonst C auf ein $S(3)$ und B auf ein $S(1)$ so zusammenziehen könnte, dass damit ein Zusammenzug von B auf ein $S(4)$ erzielt würde. Dies ist nach Voraussetzung, wonach A ein $K(3)$ ist, unmöglich.

Es sei zunächst $q = 2$. Es gibt eine eindeutig durch Q bestimmte Zerlegung von C in zwei zusammenhängende Teile $C = C_1 + C_2$, $C_1 . C_2 = Q$. Nicht beide Teile können mit C identisch sein. Es sei etwa $C_1 \subset C$. C_1 ist dann ein einfacher Streckenzug, der die beiden Punkte Q_1 und Q_2 von Q verbindet. Da B zusammenhängend ist, gibt es im Komplex $A_1 = C_1 + B$ ausser C_1 noch einen einfachen Streckenzug C_3 als Teilkomplex, der die Punkte Q_1 und Q_2 verbindet. $C_1 + C_3 \subseteq A_1$ ist dann ein primitiver $K(3)$. Es gibt offensichtlich eine 3-Färbung des $C_1 + C_3$, welche die vorgegebene Färbung des C_1 unverändert lässt. Da $A_1 \subset A$ gilt, kann nach der induktiven Voraussetzung die Färbung von $C_1 + C_3$ auf A_1 fortgesetzt werden. Dadurch ist auch A in der gewünschten Weise gefärbt. Nun sei $q = 1$. Wir zerlegen $A = A_1 + C$, $A_1 . C = Q$, wo Q aus einem einzigen Punkt besteht. Da $A_1 \subset A$ gilt, kann eine 3-Färbung von A_1 vorgenommen werden, wobei die Farben so zu wählen sind, dass der Punkt Q die in der Färbung von C vorgeschriebene Farbe erhält. Damit ist wiederum die gewünschte Färbung von A vollzogen. Somit ist auch Satz 1b bewiesen.

Beweis von Satz 2:

Der Satz ist für $k = 2$ trivial. Ist $k = 3$, stossen also in jedem Punkt mindestens 2 Strecken zusammen, so schliesst man mühelos, dass der

Komplex einen Kreis, also einen primitiven K (3) enthalten, selbst also mindestens ein K (3) sein muss. Es sei also $k = 4$. Es handelt sich darum, zu zeigen, dass ein Komplex, bei welchem in jedem Punkt mindestens 3 Strecken zusammenstossen, eine Eigenschaft, die wir nachfolgend abkürzend als Eigenschaft E (3) bezeichnen, mindestens ein K (4) ist. Diese Aussage sei richtig für alle Komplexe der Eigenschaft E (3) und der Ordnungen $n = 4, 5, \ldots m-1$; offensichtlich trifft dies zu für $m = 5$, da ein solcher Komplex dann notwendig ein S (4), also ein K (4) sein muss. Vorgelegt sei nun ein zusammenhängender Komplex A der Ordnung m ($m > 5$) und der Eigenschaft E (3). Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

1. Fall: A enthält kein Dreieck als Teilkomplex. Ein Dreieck ist ein K (3). Wir ziehen A längs einer beliebigen Strecke zusammen auf den Komplex A' der Ordnung $m-1$. Da die Strecke nicht Seite eines Dreiecks in A ist, hat mit A auch A' die Eigenschaft E (3). Nach der induktiven Voraussetzung ist also A', und auch A, ein K (4).

2. Fall: A enthält ein Dreieck D, aber nicht ein Doppeldreieck $D + D'$ und auch nicht ein Tetraeder. Ein Doppeldreieck besteht aus zwei Dreiecken mit gemeinsamer Seite; ein Tetraeder ist ein S (4). Wir ziehen das Dreieck D auf einen Punkt zusammen. Dies erwirkt einen Zusammenzug von A auf einen Komplex A' der Ordnung $m-2$. Da keine Strecke des Dreiecks D Seite eines andern Dreiecks von A ist, hat mit A auch A' die Eigenschaft E (3), und nach der induktiven Voraussetzung ist A', also auch A, ein K (4).

3. Fall: A enthält ein Doppeldreieck $D + D'$, aber kein Tetraeder. Die Punkte von D bzw. von D' seien P, Q, R bzw. P, Q, R', also PQ sei die gemeinsame Seite des Doppeldreiecks. Da in R und R' mindestens 3 Strecken zusammenstossen sollen und die beiden Punkte R und R' nicht miteinander verbunden sind, gibt es einen mit $D + D'$ punktfremden Teilkomplex F von A, so dass $(F \times D) . D \supset R$ und $(F \times D') . D' \supset R'$ gilt. Ist F zusammenhängend, so lässt sich A offensichtlich auf ein S (4) zusammenziehen. A ist dann ein K (4). Es sei also $F = G + G'$, $G . G' = 0$, $G \times G' = 0$, $(G \times D) . D \supset R$, $(G' \times D') . D' \supset R'$. Es darf angenommen werden, dass G so wie auch G' zusammenhängend sind. Ist nämlich etwa $G = G_1 + G_2$, $G_1 . G_2 = 0$, $G_1 \times G_2 = 0$ und ist etwa $(G_1 \times D) . D \supset R$, so kann A durch Reduktion um den Teil G_2 in A' kleinerer Ordnung der Eigenschaft E (3) übergeführt werden, so dass wieder gefolgert wird, dass A ein K (4) ist.

Mit Unterdrückung gleichwertiger Fallunterscheidungen müssen die nachfolgend aufgeführten Unterfälle berücksichtigt werden:

(a) $(G \times D) . D = R$, $G' \times D') . D' = R'$, $G \times D$ bzw. $G' \times D'$ bestehen aus je einer Strecke RT bzw. $R'T'$, $T \subset G$, $T' \subset G'$. In diesem Unterfall ziehen wir das Doppeldreieck mit dem Nachbarpunkt T von R zu einem Punkt zusammen, so dass aus A ein Komplex A′ entsteht, der die Ordnung m-4 und auch die Eigenschaft E (3) aufweist. Wie weiter oben schliesst man, dass A ein K (4) ist.

(b) $(G \times D) . D = R$, $(G' \times D') . D' = R'$, $G \times D$ besteht aus mehr als einer Strecke. In diesem Unterfall wird das Doppeldreieck auf einen Punkt zusammengezogen. Es folgt wieder, dass A ein K (4) ist, wie weiter oben.

(c) $(G \times D) . D = RQ$. In diesem Unterfall zieht man A längs der Strecke PR zusammen und schliesst analog wie oben, dass A ein K (4) ist.

(d) $(G \times D) . D = PRQ$. Zieht man G auf den Punkt T zusammen, so entsteht ein Tetraeder TPRQ, woraus man schliessen kann, dass A ein K (4) ist. Wenn man von der Aufzählung gleichwertiger Fälle absieht, sind damit alle Möglichkeiten berücksichtigt, die sich beim 3. Fall bieten.

4. Fall: A enthält ein Tetraeder. A ist offenbar ein K (4).

Durch die aufgeführten 4 Fälle sind alle Möglichkeiten erschöpft. Stets konnte geschlossen werden, dass A ein K (4) ist. Damit ist der Beweis von Satz 2 abgeschlossen.

Beweis von Satz 3:

Da bei einem Zusammenzug des K (k) innerhalb seiner Klasse (k fest) die Ordnung n um 1, die Streckenzahl s aber um mindestens 1 abnimmt, kann der Ausdruck

$$\triangle = 2s - 2n + 3k - k^2$$

beim Zusammenziehen nur abnehmen. Beim S (k) ist aber $\triangle = 0$, und so ergibt sich der erste Teil der Behauptung von Satz 3, nach welchem stets $\triangle \geqq 0$ gilt.

(a) Der K (k) sei nun irreduzibel. Beim Zusammenziehen des K (k) innerhalb seiner Klasse auf den S (k) darf nie eine Doppelstrecke auftreten, welche nach Vorschrift gelöscht werden müsste, da sonst der Zusammenzug des K (k) auf den S (k), auch ohne diese Strecke zu benutzen, erfolgen könnte, d. h. der ursprüngliche K (k) liesse sich innerhalb seiner Klasse um diese Strecke reduzieren. Wenn aber beim Zusammenziehen nie eine Strecke gelöscht werden muss, bleibt der Ausdruck $\triangle$ konstant. So folgt $\triangle = 0$ für irreduzible K (k).

(b) Der K (k) sei nicht separabel, und es sei $\triangle = 0$. Offensichtlich ist der Komplex entweder ein S (2) oder er hat die Eigenschaft E (2), d. h. in jedem Punkt stossen mindestens 2 Strecken zusammen. Im ersten Fall ist der Komplex ein irreduzibler K (2). Im zweiten Fall folgt auch die Irreduzibilität. Andernfalls gäbe es eine Reduktion des K (k) innerhalb seiner Klasse. Bei einem Komplex der Eigenschaft E (2) wird aber $\triangle$ bei jeder Reduktion um mindestens 1 verkleinert, da die Ordnung um 1, die Streckenzahl um mindestens 2 oder aber die Streckenzahl allein um 1 abnimmt. Ist $\triangle'$ dem reduzierten Komplex zugeordnet, so wäre also wegen $\triangle = 0$ offenbar $\triangle' < 0$, im Widerspruch mit der bereits oben bewiesenen ersten Aussage von Satz 3, wonach auch $\triangle' \geqq 0$ sein müsste. In beiden Fällen von (b) ergab sich also die Irreduzibilität des K (k).

Anmerkung während der Korrektur:

Wie Verf. jetzt erfährt, hat R. L. BROOKS (On colouring the nodes of a network, Proc. Cambridge Philos. soc. *37* (1941), 194—197) für k>2 bewiesen, dass ein Komplex, der kein Simplex S (k+1) enthält und in dessen Punkten nicht mehr als k Strecken zusammenstossen, eine k-Färbung gestattet. Da ein K (k) sicher kein S (k+1) enthält, ist damit gezeigt, dass Satz 1 für diejenigen K (k) sicher richtig ist, welche noch der zweiten oben erwähnten Bedingung genügen.