Über positive Darstellung von Polynomen.

Von

G. Pólya.

(Als Manuskript eingegangen am 2. Dezember 1927.)

Eine Form in n Variabeln, die für alle nichtnegativen Wertsysteme der Variabeln, mit Ausnahme des identisch verschwindenden Wertsystems, positive Werte annimmt, lässt sich als Quotient zweier Formen mit lauter positiven Koeffizienten darstellen.

Die behauptete Darstellung bringt die als Voraussetzung auftretende Eigenschaft der Form zur Evidenz. Der Fall $n = 1$ ist trivial. Für $n = 2$ wurde der Satz zuerst von H. Poincaré [1]), für $n = 3$ von E. Meissner [2]) bewiesen; letzterer Beweis ergibt auch einen prinzipiellen Ansatz für $n > 3$. Diese Autoren behandeln übrigens nicht Formen, d. h. homogene ganze rationale Funktionen von n Variabeln, sondern Polynome, d. h. inhomogene ganze rationale Funktionen von $n—1$ Variablen; dies kommt auf dasselbe hinaus, nur bringt für $n > 2$ die Einführung von Formen eine Vereinfachung der Aussage mit sich. Für $n = 2$ ergibt sich der Satz auch als Spezialfall eines allgemeineren [3]) und wurde wiederholt behandelt [4]). Eine für den Fall $n = 2$ von E. Bálint [4]) gegebener Beweis, der zu einer Darstellung mit besonders einfachem Nenner führt, lässt sich für beliebiges n verallgemeinern, und die Verallgemeinerung fällt bei Betrachtung von Formen (anstatt von Polynomen) besonders einfach aus, wie das folgende zeigt.

Es sei von der homogenen ganzen rationalen Funktion $F(x_1, x_2, \dots x_n)$ angenommen, dass

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) > 0$$

ausfällt, wenn

$$(1) \qquad x_1 \geqq 0\,,\ x_2 \geqq 0\,, \dots x_n \geqq 0\,, \qquad x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

ist. (Wegen der Homogeneität kann die letzte Bedingung unter (1) die Bedingung $x_1 + x_2 + \dots + x_n > 0$ ersetzen.) Durch die Bedingungen (1) wird im n-dimensionalen, auf rechtwinklige Koordinaten $x_1, x_2, \dots x_n$ bezogenen Raum eine beschränkte und abgeschlossene $(n—1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit abgegrenzt (eine Strecke, ein Dreieck, ein

Tetraëder, ... für $n = 2, 3, 4, \ldots$); es erreicht darin $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein positives Minimum μ.

Es sei

$$(2) \qquad F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{(\alpha)}^{m} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_n!}$$

gesetzt; die A sind reelle Zahlenkoeffizienten, und die Summation $\sum\limits_{(\alpha)}^{m}$ soll auf alle Wertsysteme der n Indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ erstreckt werden, für welche

$$(3) \qquad \alpha_1 \geqq 0, \quad \alpha_2 \geqq 0, \ldots \alpha_n \geqq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = m$$

gilt; m ist also der Grad von F. In analoger Bezeichnung ist

$$(4) \quad (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{k-m} = (k-m)! \sum_{(\beta)}^{k-m} \frac{x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}}{\beta_1! \, \beta_2! \ldots \beta_n!},$$

wenn k eine m übersteigende ganze Zahl bedeutet.

Neben F soll noch die Funktion

$$(5) \quad \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n; y) = y^m \sum_{(\alpha)}^{m} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \binom{x_1 y^{-1}}{\alpha_1} \binom{x_2 y^{-1}}{\alpha_2} \cdots \binom{x_n y^{-1}}{\alpha_n}$$

betrachtet werden. Der Binomialkoeffizient $\binom{x}{\alpha}$ ist für beliebiges x und nichtnegatives ganzzahliges α auf die übliche Art definiert, so dass, falls $y \neq 0$,

$$\binom{x y^{-1}}{0} = 1,$$

$$y^{\alpha} \binom{x y^{-1}}{\alpha} = \frac{x(x-y)(x-2y) \ldots (x-(\alpha-1)y)}{1 \; . \; 2 \; . \; 3 \quad \ldots \quad \alpha} \qquad \text{für } \alpha > 0$$

ist. Wird

$$(6) \qquad \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n; 0) = F(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

gesetzt, so ist Φ für alle Wertsysteme definiert und eine homogene ganze rationale Funktion m-ten Grades der $n+1$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n, y$. Φ ist insbesondere stetig; wegen (6) gibt es somit ein positives η, so dass für alle den Bedingungen (1) unterworfenen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ und für $0 < y < \eta$

$$(7) \qquad \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n; y) > \tfrac{1}{2} \mu > 0$$

gilt.

Wir erhalten aus (2) und (4)

$$F(x_1, x_2, \dots x_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{k-m} =$$

$$= (k-m)! \sum_{(\alpha)}^{m} \sum_{(\beta)}^{k-m} A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \frac{x_1^{\alpha_1+\beta_1} x_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}}{\alpha_1! \beta_1! \alpha_2! \beta_2! \dots \alpha_n! \beta_n!}$$

$$= (k-m)! \sum_{(\gamma)}^{k} \frac{x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots x_n^{\gamma_n}}{\gamma_1! \gamma_2! \dots \gamma_n!} \sum_{(\alpha)}' A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \binom{\gamma_1}{\alpha_1}\binom{\gamma_2}{\alpha_2} \dots \binom{\gamma_n}{\alpha_n}.$$

Die äussere Summation $\sum\limits_{(\gamma)}^{k}$ ist so verstanden, dass $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ die Wertsysteme durchläuft, für welche

(8) $$\gamma_1 \geqq 0, \ \gamma_2 \geqq 0, \dots \gamma_n \geqq 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = k$$

gilt. Die innere Summation $\sum\limits_{(\alpha)}'$ ist auf solche Wertsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ erstreckt, für welche

$$0 \leqq \alpha_1 \leqq \gamma_1, \ 0 \leqq \alpha_2 \leqq \gamma_2, \dots 0 \leqq \alpha_n \leqq \gamma_n, \ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$$

gilt. Wenn man diese Summation etwas weiter erstreckt, nämlich auf alle Wertsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, die den weniger beengenden Bedingungen (3) genügen, bleibt der Wert der Summe ungeändert: Die hinzukommenden Glieder sind $= 0$, da $\binom{\gamma}{\alpha} = 0$ ist, wenn α die nichtnegative ganze Zahl γ übersteigt.

Somit ist

$$F(x_1, x_2, \dots x_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{k-m} =$$

$$(k-m)! \sum_{(\gamma)}^{k} \frac{x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots x_n^{\gamma_n}}{\gamma_1! \gamma_2! \dots \gamma_n!} \sum_{(\alpha)}^{m} A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \binom{\gamma_1}{\alpha_1}\binom{\gamma_2}{\alpha_2} \dots \binom{\gamma_n}{\alpha_n},$$

welche Gleichung, gemäss (5), auch so geschrieben werden kann:

(9) $$F(x_1, x_2, \dots x_n) =$$

$$= \frac{(k-m)!\, k^m \sum\limits_{(\gamma)}^{k} \Phi\left(\frac{\gamma_1}{k}, \frac{\gamma_2}{k}, \dots \frac{\gamma_n}{k}; \frac{1}{k}\right) \frac{x_1^{\gamma_1} x_1^{\gamma_2} \dots x_n^{\gamma_n}}{\gamma_1! \gamma_2! \dots \gamma_n!}}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{k-m}}$$

Im Zähler der rechten Seite von (9) treten, gemäss (8), nur solche Werte $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n; y)$ auf, die für einen Punkt $x_1, x_2, \dots x_n$ der Mannigfaltigkeit (1) gebildet sind. Sobald $k > \eta^{-1}$ gewählt ist, sind, gemäss (7), alle Koeffizienten der im Zähler stehenden Form k-ten Grades positiv, w. z. b. w.

Die Darstellung (9) gibt uns einen bestimmten Algorithmus, um zu entscheiden, ob eine Form F in der Mannigfaltigkeit (1) stets positive Werte annimmt oder nicht: Wenn ja, muss aus F bei wiederholter Multiplikation mit $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ schliesslich eine Form mit lauter positiven Koeffizienten hervorgehen.

Die Darstellung (9) hat den Vorteil, dass die Koeffizienten des Zählers dem durch die Koeffizienten von F bestimmten Zahlkörper angehören; die Koeffizienten des Nenners sind rational.

Denjenigen auf (inhomogene) Polynome bezüglichen Satz, der mit dem am Anfang dieser Arbeit ausgesprochenen äquivalent ist, kann man der Darstellung (9) dadurch entnehmen, dass man darin $x_n = 1$ setzt; ich verzichte auf die etwas umständliche Formulierung. Setzt man in (9)

$$x_n = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1},$$

so ergibt sich folgende Verallgemeinerung eines auf $n = 2$ bezüglichen Resultates von F. HAUSDORFF[5]):

Wenn das Polynom $f(x_1\, x_2, \ldots x_{n-1})$ in dem Bereich

$$x_1 \geqq 0, \; x_2 \geqq 0, \ldots \; x_{n-1} \geqq 0, \; x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leqq 1$$

stets positive Werte annimmt, kann sie als Summe von Polynomen von der Form

$$p\, x_1^{\gamma_1}\, x_2^{\gamma_2} \ldots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1})^{\gamma_n}$$

dargestellt werden, wobei $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ nichtnegative ganze Zahlen sind und die Konstante p positiv ist.

Auch hier wird die als Voraussetzung auftretende Eigenschaft des Polynoms f durch die behauptete Darstellung zur Evidenz gebracht.

Es kann schliesslich bemerkt werden, dass die Darstellung (9) einigermassen in Zusammenhang mit einer Fragestellung von HILBERT steht, die kürzlich durch E. ARTIN mit tiefgehenden Mitteln gelöst wurde.[6]) Die Fragestellung betrifft die Zerlegung definiter Formen in Quadrate, und eine solche Zerlegung kann, allerdings in einem sehr speziellen Falle, der Darstellung (9) unmittelbar entnommen werden. Man nehme, was gestattet ist, $k - m$ in (9) als gerade Zahl an und ersetze $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezw. durch $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$. Es erscheint dann $F(x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2)$ als Summe von Quadraten rationaler homogener Funktionen von der Gestalt

$$\frac{c\, x_1^{\gamma_1}\, x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n}}{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{k-m}{2}}};$$

c ist hierbei eine reelle Zahl. Wenn die Koeffizienten von F rational sind, sind die des Zählers von (9) rational und positiv, und können als solche in Summen von Quadraten rationaler Zahlen zerlegt werden. Wenn p und q positiv ganz sind, ist

$$\frac{p}{q}=\frac{pq}{q^2}=\left(\frac{1}{q}\right)^2+\left(\frac{1}{q}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{q}\right)^2 \quad (pq \text{ Summanden}).$$

So gelangt man zur Aussage:

Eine Form in n Variabeln, die eine gerade Funktion von jeder der Variabeln ist und für alle reellen Wertsysteme, das identisch verschwindende Wertsystem ausgenommen, positiv ausfällt, lässt sich als Summe von Quadraten rationaler gebrochener homogener reeller Funktionen darstellen. U. zw. lassen sich diese rationalen gebrochenen Funktionen als rationalzahlig wählen, wenn die vorgelegte Form rationalzahlig ist.

[1]) H. POINCARÉ, Sur les équations algébriques, Comptes Rendus, *97* (1888), S. 1418 bis 1419.

[2]) E. MEISSNER, Über positive Darstellung von Polynomen, Math. Annalen *70* (1911), S. 223–235.

[3]) Schon bei POINCARÉ a. a. O. [1]).

[4]) E. BÁLINT, Rendiconti del Circ. Math. di Palermo *34* (1912), S. 120 (in einer Arbeit von M. FEKETE und G. PÓLYA) und Dissertation (Budapest, 1916), D. R. CURTISS, Math. Annalen *73* (1913), S. 424—435 und Annals of Math. (2) 19 (1918), S. 251—278, C. SIEGEL Math. Zeitschrift *11* (1921), S. 265—267, Hilfssatz 6 (unabhängig von den übrigen, nach anderer Richtung und tiefer gehenden Entwicklungen der SIEGELschen Arbeit).

[5]) F. HAUSDORFF, Math. Zeitschrift *16* (1926), S. 224.

[6]) E. ARTIN, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, Abhandl. aus d. Math. Seminar Hamburg, *5* (1926), S. 100—115.