Einige Aufgaben über extreme Werte.

Von

A. Kiefer (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 5. August 1926.)

I.

Gesucht auf einer Regelfläche zweiten Grades von der einen Regelschar diejenigen Erzeugenden, auf denen zwei fest gewählte Erzeugende der anderen Schar Strecken von extremer Länge begrenzen.

Die beiden festen Erzeugenden seien mit a, b bezeichnet, ihr kürzester Abstand sei $A\,B$, wobei A auf a und B auf b liege. Durch A ziehe man die Parallele b' zu b und durch B die Parallele a' zu a. Die Erzeugenden der Schar, der a, b nicht angehören, erzeugen auf a, b zwei projektivische Punktreihen. Sind P, Q zwei entsprechende Punkte, so handelt es sich darum, P, Q so zu bestimmen, dass die Strecke $P\,Q$ eine extreme Länge hat. Das Lot von Q auf die Ebene (a, b') möge den Fusspunkt R haben; dann ist

$$\overline{P\,Q}^2 = \overline{Q\,R}^2 + \overline{R\,P}^2 .$$

Ändern sich die Punkte P, Q, so bleibt $Q\,R$ von konstanter Länge; damit also die Strecke $P\,Q$ einen extremen Wert annimmt, muss $R\,P$ einen extremen Wert haben. Aber die Punkte R, P beschreiben zwei projektivische Punktreihen auf b', beziehungsweise a; das Erzeugnis der zwei Reihen ist ein Kegelschnitt mit a, b' als Tangenten und es handelt sich nun darum, diejenigen Tangenten dieses Kegelschnittes zu finden, auf denen die Tangenten a, b' Strecken von extremer Länge begrenzen. Errichtet man in P, R die Lote auf a und b' und ist N der Schnittpunkt der zwei Lote, so ist das Viereck $A\,P\,N\,R$ ein Kreisviereck mit dem Durchmesser $A\,N$. Für den Fall, wo $P\,R$ die Lage einer Strecke von extremer Länge darstellt, so muss die benachbarte Strecke $P'\,R'$ dieselbe Länge haben und daher muss der Kreis durch P', R', A einen ebenso grossen Durchmesser haben, wie der Kreis durch P, R, A; der Durchmesser ist bestimmt durch die Sehne $P\,R$ und den zugehörigen Peripheriewinkel $P\,A\,R$. Bezeichnet N' den Schnittpunkt der Lote in P', R' auf a, beziehungsweise b', so muss $AN = AN'$ sein, d. h. AN ist Normale der Kurve, die N beschreibt, wenn PR als Tangente des Kegelschnittes sich bewegt und in jeder Lage die Lote PN, RN errichtet werden. Die Geraden PN, RN beschreiben zwei projektivische Parallelstrahlenbüschel; ihr Erzeugnis ist eine Hyperbel, deren Asymptoten auf a, b' senkrecht stehen. Die vier Normalen durch A nach der Hyperbel liefern vier Lagen für den Fusspunkt N. Zu jedem Fusspunkt gehört eine Lage von PR, indem NP und NR auf a, b' senkrecht stehen und zu jeder Lage von PR gehört eine Lage der gesuchten Strecke PQ im Raum, indem RQ und auch NQ auf b senkrecht stehen. D. h.:

> Auf einer Regelfläche zweiten Grades gibt es unter den Erzeugenden der einen Schar vier Erzeugende, auf denen zwei feste Erzeugende a, b der andern Schar Strecken von extremer Länge begrenzen. Projiziert man die Erzeugenden der ersten Schar orthogonal auf die Parallelebene (a, b') durch a zu b, so entstehen auf a und auf der Projektion b' von b zwei projektivische Punktreihen. Die durch sie laufenden zwei Parallelstrahlenbüschel, deren Richtungen beziehungsweise auf a und b' senkrecht stehen, erzeugen eine Hyperbel. Durch den Schnittpunkt A von a, b' gehen vier Normalen nach der Hyperbel. Fällt man vom Fusspunkt einer jeden die Lote auf die Geraden a, b und verbindet die Fusspunkte, so erhält man die vier Strecken von extremer Länge.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, wo die Regelfläche zweiten Grades ein Paraboloid ist. In diesem Falle beschreiben die Punkte P, Q, R auf a, b, b' projektivisch ähnliche Punktreihen. Die Reihen P, R auf a, b' erzeugen eine Parabel und die zwei Parallelstrahlenbüschel durch die Reihen der Punkte P, R und beziehungsweise senkrecht zu a, b' haben die unendlich ferne Gerade gemeinsam und erzeugen daher eine gerade Linie. Diese Gerade geht, gemäss ihrer Erzeugung, durch die zwei Schnittpunkte von a, b' mit den auf a, b' senkrecht stehenden Parabeltangenten; die zwei Fusspunkte auf a, b' liegen auf der Leitlinie und aus dem Vierseit der vier Tangenten folgt, dass der Pol der Geraden in bezug auf die Parabel auf der Leitlinie liegt, ferner dass die Gerade durch den Brennpunkt geht und auf seiner Verbindungsgeraden mit A senkrecht steht. Der Brennpunkt ist der Normalenfusspunkt N von A auf die degenerierte Hyperbel; die zu N gehörende Parabeltangente ist die Scheiteltangente.

> Bei einem Paraboloid gibt es unter den Erzeugenden der einen Schar eine einzige Erzeugende, auf welcher zwei feste Erzeugende der andern Schar eine Strecke extremer Länge begrenzen. Ihre Endpunkte sind auf a, b die Fusspunkte der Lote vom Brennpunkt der durch a, b' und zwei Lagen von PR bestimmten Parabel. [1])

Die in der Ebene (a, b') aufgetretenen Beziehungen geben noch zu folgenden Aussagen Anlass:

> Bei einem Kegelschnitt gibt es vier Tangenten, auf denen zwei fest gewählte Tangenten Stücke von extremer Länge begrenzen. Bei einer Parabel gibt es eine einzige Tangente, nämlich die Scheiteltangente, auf der zwei fest gewählte Tangenten ein Stück extremer Länge begrenzen.

Das letztere folgt auch so: Wenn man das Stück einer beweglichen Parabeltangente zwischen zwei festen Tangenten orthogonal auf die Scheiteltangente projiziert, so hat bekanntlich die Projektion konstante Länge. Folglich wird jenes Stück auf der beweglichen Tangente ein Minimum, wenn sie mit der Scheiteltangente zusammenfällt.

II.

Gesucht von einem Kegelschnitt diejenigen Tangenten, auf denen zwei fest gegebene Geraden a, b Strecken von extremer Länge begrenzen.

Zur Lösung der Aufgabe kann man ohne weiteres das in Abschnitt I für die Ebene (a, b') gefundene Verfahren anwenden. Man bewegt längs des Kegelschnittes eine Tangente, schneidet sie in jeder Lage mit den gegebenen Geraden a, b, errichtet in den Schnittpunkten die Senkrechten zu a, b und schneidet sie miteinander. Der Ort des Schnittpunktes ist eine gewisse Kurve. Legt man vom Schnittpunkt der zwei Geraden a, b die Normalen nach der Kurve, so gehört zum Fusspunkt einer jeden Normalen eine gesuchte Tangente des Kegelschnittes. Die bewegliche Tangente des Kegelschnittes erzeugt auf a, b zwei Punktreihen, die sich zwei/zweideutig entsprechen. Die zwei zugehörigen Parallelstrahlenbüschel, die beziehungsweise auf a, b senkrecht stehen, erzeugen eine Kurve vierter Ordnung; dieselbe besitzt im

[1]) Eine andere Konstruktion mit einem stereometrischen Beweis findet sich auf S. 2 der Vierteljahrsschrift 1926.

Schnittpunkt von a, b und in den zu a, b senkrechten Richtungen im Unendlichen je einen Doppelpunkt. Vom Schnittpunkt (a, b) gehen nämlich an den Kegelschnitt zwei Tangenten und jede liefert mit den benachbarten einen Kurvenzweig durch den Punkt; die zwei unendlich fernen Doppelpunkte entspringen dem zwei/zweideutigen Entsprechen der zwei Strahlenbüschel. Also ist die Klasse der Kurve $4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6$. Die Klassenzahl ihrer Evolute ist bekanntlich Gradzahl plus Klassenzahl, also $4 + 6 = 10$. Da der Schnittpunkt von a, b ein Doppelpunkt dieser Kurve ist, so haben zwei von ihm ausgehende Normalen den Fusspunkt in ihm selber. Also gibt es noch acht andere Normalen. D. h.:

> Unter den Tangenten eines Kegelschnittes gibt es acht Tangenten, auf denen zwei fest gegebene Geraden Strecken von extremer Länge begrenzen.

Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so sind die zwei Punktreihen auf a, b immer noch in zwei/zweideutiger Korrespondenz, aber die unendlich fernen Punkte von a, b sind entsprechende Punkte. Die zwei Parallelstrahlenbüschel erzeugen daher eine Kurve dritter Ordnung, die im Schnittpunkt von a, b einen Doppelpunkt hat. Ihre Klassenzahl ist $3 \cdot 2 - 2 = 4$. Folglich ist die Klassenzahl der Evolute $3 + 4 = 7$. Da der Schnittpunkt (a, b) ein Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung ist, so gehen von ihm noch $7 - 2 = 5$ Normalen nach der Kurve. Zu jeder Normalen gehört ein Fusspunkt und zu jedem Fusspunkt eine gesuchte Tangente der Parabel. D. h.:

> Unter den Tangenten der Parabel gibt es fünf Tangenten, auf denen zwei fest gegebene Geraden Strecken von extremer Länge begrenzen.

Wenn von den zwei Geraden die eine den Kegelschnitt berührt, so entsprechen sich die zwei Parallelstrahlenbüschel ein/zweideutig und das Erzeugnis ist eine Kurve dritter Ordnung, welche durch den Schnittpunkt der zwei Geraden hindurchgeht und im Unendlichen einen Doppelpunkt besitzt. Folglich ist ihre Klassenzahl $3 \cdot 2 - 2 = 4$ und die Klassenzahl ihrer Evolute ist $3 + 4 = 7$. Daher gehen vom Schnittpunkt der zwei Geraden, welcher der Kurve angehört, noch sechs Normalen nach der Kurve. D. h.:

> Wenn von den zwei Geraden die eine den Kegelschnitt berührt, so besitzt er sechs Tangenten, auf denen die zwei Geraden Strecken von extremer Länge begrenzen.

III.

Gesucht von einer Kurve mit der Klassenzahl k diejenigen Tangenten, auf denen zwei fest gewählte Geraden a, b Strecken von extremer Länge begrenzen.

Zur Lösung der Aufgabe führt das gleiche, in Abschnitt I und II benutzte Verfahren. Eine Tangente, die sich längs der Kurve bewegt, beschreibt auf a, b Punktreihen, die sich k/k deutig entsprechen. Die Parallelstrahlenbüschel durch die zwei Reihen, beziehungsweise senkrecht zu a, b, erzeugen eine Kurve von der Ordnung $2k$ mit je einem k fachen Punkt im Schnittpunkt von a, b und in den zwei Richtungen senkrecht zu a und b im Unendlichen. Vom Schnittpunkt (a, b) gehen nämlich an die Kurve k ter Klasse k Tangenten und jede liefert mit den benachbarten einen Kurvenzweig durch den Punkt; die zwei unendlichfernen k fachen Punkte entstehen wegen dem k/k deutigen Entsprechen der zwei Strahlenbüschel. Da jeder der drei k fachen Punkte als $\frac{k\,(k-1)}{2}$ Doppelpunkte aufgefasst werden kann, so ist die Klassenzahl der Kurve

$$2k\,(2k-1) - 3 \cdot 2\,\frac{k\,(k-1)}{2} = k^2 + k;$$

daher ist die Klassenzahl der Evolute

$$2k + k^2 + k = k^2 + 3k.$$

Von dem k fachen Schnittpunkt der Geraden a, b gehen k Normalen aus, deren Fusspunkte in dem Punkt selber liegen und daher gibt es noch

$$k^2 + 3k - k = k^2 + 2k = k\,(k+2)$$

andere Normalen. Zu jeder gehört in bekannter Weise eine gesuchte Tangente der gegebenen Kurve von der Klasse k. D. h.:

> Unter den Tangenten einer Kurve von der Klasse k gibt es $k\,(k+2)$ Tangenten, auf denen zwei fest gewählte Geraden Strecken extremer Länge begrenzen.

Für $k = 2$ liefert die Formel die Zahl acht, wie es sein muss.

Wenn von den zwei Geraden die eine mit einer Tangente der Kurve k ter Klasse zusammenfällt, so entsprechen sich die zwei Parallelstrahlenbüschel $k-1/k$ deutig; die erzeugte Kurve hat den Grad $2k-1$, besitzt den Schnittpunkt der zwei Geraden als $k-1$ fachen Punkt und hat ausserdem im Unendlichen einen $k-1$ fachen und einen k fachen Punkt. Daraus ergibt sich auf die schon auseinandergesetzte

Art, dass vom Schnittpunkt der zwei Geraden $k\,(k+2)-2$ Normalen nach der Kurve gehen. D. h.:

In dem Falle, wo eine der beiden Geraden eine Tangente der Kurve k ter Klasse ist, begrenzen die zwei Geraden auf $k(k+2)-2$ Tangenten Strecken von extremer Länge.

Wenn von den zwei Geraden jede mit einer Tangente der Kurve k ter Klasse zusammenfällt, so entsprechen sich die zwei Parallelstrahlenbüschel $k-1/k-1$ deutig. Die erzeugte Kurve besitzt im Schnittpunkt der zwei Geraden einen $k-2$ fachen Punkt und im Unendlichen zwei $k-1$ fache Punkte. Daraus ergibt sich nach dem schon auseinandergesetzten Verfahren, dass vom Schnittpunkt der zwei Geraden $k(k+2)-4$ Normalen nach der Kurve gehen. D. h.:

In dem Falle, wo jede der beiden Geraden eine Tangente der Kurve k ter Klasse ist, begrenzen die zwei Geraden auf $k\,(k+2)-4$ Tangenten Strecken von extremer Länge.

IV.

Gesucht ein der Kugel vom Radius R einbeschriebener gerader Kreiskegel, dessen Mantelfläche einen maximalen Wert hat.

Diese Aufgabe wird häufig in der obersten Klasse der Mittelschule als angewandtes Beispiel für das Ableiten einer Funktion verwendet und kann auch auf geometrische Art gelöst werden. Angenommen die Spitze des Kegels liege in A und die Achse falle auf den Kugeldurchmesser AB. Sind r und s Radius und Seitenlinie des gesuchten Kegels, so muss $\pi\, r\, s$ einen extremen Wert haben. Dann muss, wenn r_1, s_1 die benachbarten Werte von r, s bezeichnen, die Gleichung bestehen

$$r\,s = r_1\,s_1\,; \quad \text{also} \quad \frac{r}{r_1} = \frac{s_1}{s}.$$

Sind P, P_1 die Endpunkte von r, r_1 auf einem Grosskreis durch A, B und schneidet die Gerade PP_1 den verlängerten Kugeldurchmesser AB in Q und die Halbierungslinie des Nebenwinkels von $\sphericalangle\, PAP_1$ in R, so ist

$$\frac{r}{r_1} = \frac{P\,Q}{P_1\,Q},\ \frac{s_1}{s} = \frac{P_1\,R}{P\,R};\ \text{also}$$

$$\frac{P\,Q}{P_1\,Q} = \frac{P_1\,R}{P\,R} \text{ und somit } PQ = P_1\,R,\ P_1\,Q = PR.$$

Die Punkte Q, R haben nämlich gleiches Teilverhältnis in bezug auf $P P_1$ und $P_1 P$ und es liegen beide ausserhalb $P P_1$. Lässt man P_1 sich unbegrenzt gegen P hinbewegen, so wird im Grenzfalle $A R$ senkrecht zu $A P$ und parallel zu $B P$, das ebenfalls auf $A P$ senkrecht steht. Also ist $P Q = P R$ und auch $A B = B Q$.

Verlängert man den Kugeldurchmesser $A B$ um sich selber über B hinaus nach Q und legt die Tangente $Q P$ an die Kugel mit dem Berührungspunkt P, so ist $A P$ die Seitenlinie des gesuchten Kegels.

$$Q P = 2 R \sqrt{2}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{3 R} = \frac{1}{3},$$

wenn φ der Öffnungswinkel des Kegels ist.

Der Achsenschnitt des Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie $2r$, dem Schenkel s und dem Umkreisradius R. Bezeichnet man die Schenkelhöhe des Dreieckes mit h, so ist bekanntlich $2 R h = 2 r s$. Wenn also $r s$ einen maximalen Wert annimmt, so wird bei konstantem R auch h ein Maximum.

Die Konstruktion löst zugleich die Aufgabe, einem Kreis ein gleichschenkliges Dreieck von maximaler Schenkelhöhe einzubeschreiben.

Die direkte geometrische Lösung dieser Aufgabe führt zu folgender Konstruktion, aus der man auch die auseinandergesetzte finden kann:

Verlängert man den Kreisdurchmesser $B A$ über A hinaus um sich selber nach S, so geht der Halbkreis, der die Strecke zwischen S und dem Mittelpunkt des Kreises zum Durchmesser hat durch den Schnittpunkt der Kreistangente in A mit der Tangente in P, wodurch die letztere bestimmt ist.

Soll der Kugel ein Kegel von maximalem Volumen einbeschrieben werden, so muss, wenn h' die Kegelhöhe ist, $r^2 h'$ oder da $h' = \frac{s^2}{2 R}$ ist, $r^2 s^2$ einen extremen Wert annehmen. D. h.:

Der Kegel, den die obige Konstruktion liefert, hat zugleich die Eigenschaft, ein Maximum des Volumens zu besitzen.