Über periodische Transformationen von Flächen.

Von

Willy Scherrer (Winterthur).

(Als Manuskript eingegangen am 6. Oktober 1925.)

Es soll hier gezeigt werden, wie man einen Überblick über sämtliche n-periodischen, umkehrbar eindeutigen und stetigen und die Indikatrix erhaltenden Transformationen der zweiseitigen geschlossenen Flächen erhalten kann. Die dazu erforderlichen Aussagen wurden ursprünglich auf Grund einer schon an anderer Stelle[1]) auseinandergesetzten Quadratpolygonmethode gewonnen. Ein ungleich kürzeres Verfahren ergibt sich aber, wenn man die Brouwerschen Involutionssätze[2]) zum Ausgangspunkt nimmt.

Wir schlagen deshalb den letzteren Weg ein und betrachten vorerst eine endliche Gruppe G von topologischen und die Indikatrix erhaltenden Abbildungen einer zweiseitigen geschlossenen Fläche F in sich. Sei p das Geschlecht von F und n die Ordnung von G. Nach Brouwer stellt eine derartige Gruppe eine spezielle Involution $n$ter Ordnung dar und es existiert eine Modulfläche Φ, in bezug auf welche F eine n-blätterige Überlagerungsfläche ist. Hierbei besitzen alle aus einem beliebigen Punkte von F auf Grund der Gruppe erzeugten Punkte ein und denselben Spurpunkt auf Φ.

Nun gilt

Satz 1: *Wird eine topologische Involution einer zweiseitigen geschlossenen Fläche F durch eine endliche Gruppe von topologischen und indikatrixerhaltenden Abbildungen von F in sich erzeugt, so ist F eine reguläre Überlagerungsfläche der zur Involution gehörigen Modulfläche und umgekehrt.*

Beweis. Die Gruppe G stellt für die Fläche F als Überlagerungsfläche eine n-gliedrige Gruppe von Decktransformationen dar. Es braucht also nur gezeigt zu werden, dass eine n-blättrige Über-

[1]) Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. Zürich. LXX (1925), S. 77—84.

[2]) L. E. J. Brouwer. Über topologische Involutionen, Proc. Akad. Amsterd. XXI, S. 1143—1145.

lagerungsfläche, welche eine n-gliedrige Gruppe von Decktransformationen gestattet, notwendig regulär ist. Sei P_0 ein beliebiger Punkt der Grundfläche, über welchem n verschiedene Punkte P_1, P_2, ... P_n liegen. Dann ist eine Decktransformation T_i eindeutig festgelegt durch die Angabe desjenigen Punktes P_i, in welchen der Punkt P_1 übergeführt wird. Seien nun γ_1, γ_2, ... γ_n stetige Kurven auf F, welche resp. durch die Punkte P_1, P_2, ... P_n führen und die überdies ein und dieselbe geschlossene Spur γ_0 auf Φ besitzen. Dann geht bei T_i die Kurve γ_1 in γ_i über. Daraus folgt, dass die Kurven γ_1, γ_2, ... γ_n alle gleichzeitig entweder geschlossen oder ungeschlossen sind. F ist somit eine reguläre Überlagerungsfläche von Φ.

Die Umkehrung folgt ohne weiteres, da jede reguläre Überlagerungsfläche eine n-gliedrige Gruppe von Decktransformationen besitzt, welche auf F evidentermassen eine die Involution erzeugende Gruppe darstellt.

Wir betrachten nun die Gruppe H der Verzweigungssubstitutionen, welche für beliebige (also nicht notwendig reguläre) Überlagerungsflächen folgendermassen erklärt ist: Der Punkt P_0 durchlaufe eine beliebige geschlossene und keinen Verzweigungspunkt treffende Kurve γ_0 auf Φ. Dann durchlaufen die Punkte P_1, P_2, ... P_n über P_0 resp. die Kurven γ_1, γ_2 ... γ_n auf F, welche die gemeinsame Spur γ_0 besitzen. Kehrt P_0 wieder in seine Ausgangslage zurück, so haben die Punkte P_1, P_2 ... P_n eine Permutation erfahren. Sämtliche derartigen Permutationen bilden zusammen eine Gruppe, die Gruppe der Verzweigungssubstitutionen. Das Hilfsmittel für die Ermittlung der periodischen Transformationen bildet nun folgende Aussage.

Satz 2. *Bilden die Decktransformationen einer regulären n-blättrigen Überlagerungsfläche eine zyklische Gruppe, so ist auch die Verzweigungsgruppe zyklisch und vom Grade n.*

Sei T eine Erzeugende der Gruppe der Decktransformationen und P_2, P_3, ... P_n diejenigen Punkte über P_0, welche aus P_1 sukzessive durch die Transformationen T, T^2, ... T^{n-1} erzeugt werden. Sei weiter S_i eine Verzweigungssubstitution, welche P_1 in P_i überführt. Ein solches S_i erhält man, indem man P_1 mit P_i durch eine Kurve γ auf F verbindet. Die Spur von γ ist eine geschlossene Kurve γ_0 auf Φ und die zu γ_0 gehörige Substitution stellt ein derartiges S_i dar. Es kann aber kein zweites von S_i verschiedenes $\overline{S_i}$ geben, da durch $S_i^{-1}\,\overline{S_i}$ eine von der Identität verschiedene Substitution gegeben wäre, welche P_1 in sich überführt. Diese Annahme widerspricht dem Begriff der regulären Überlagerungsfläche. Daraus folgt, dass die Verzweigungsgruppe genau n-Elemente $S_1, S_2 \ldots S_n$ besitzt. Wir bezeichnen nun S_2 mit S. Die Substitution S führt also den Punkt P_1 über in sein der Transformation T entsprechendes Bild P_2. Gemäss dem Begriff der Decktransformation führt also dieselbe Substitution den Punkt P_2 über in das zum selben T gehörige Bild P_3 von P_2 usf. Allgemein führt also die Substitution S^{i-1} den Punkt P_1 über in sein der Transformation T^{i-1} entsprechendes Bild P_i. Die n-gliedrige Verzweigungsgruppe wird also durch den zum Element S gehörigen Zyklus erschöpft. Durch einen analogen Schluss ergibt sich die Umkehrung. Satz 2. ist somit bewiesen.

Auf Grund der erhaltenen Resultate kann man die n-periodischen Transformationen aufzählen, indem man die n-blättrigen regulären Überlagerungsflächen konstruiert, deren Verzweigungssubstitutionen eine zyklische Gruppe vom Grade n bilden.

Wir bezeichnen mit π das Geschlecht der Grundfläche (Modulfläche) Φ, mit S eine Erzeugende der Verzweigungsgruppe mit F_{λ_i} einen Verzweigungspunkt, welcher aus $\frac{n}{\lambda_i}$ Zykeln der Ordnung $\lambda_i - 1$ besteht. Zu einem Verzweigungspunkt F_{λ_i} gehört dann eine Substitution $S^{\frac{\sigma_i n}{\lambda_i}}$, wo σ_i relativ prim zu λ_i ist.

Falls $\pi > 0$ ist, ziehe man auf Φ ein vollständiges kanonisches Schnittsystem, welches keinen Verzweigungspunkt trifft. Die Verzweigungsgruppe ist dann vollständig bestimmt, wenn noch für jeden Rückkehrschnitt des kanonischen Schnittsystems die zugehörige Substitution angegeben ist.

Es ergeben sich folgende Bedingungen:

1. Die HURWITZsche Relation. Die Anzahl der Verzweigungspunkte sei r.

$$\frac{n}{\lambda_1}(\lambda_1-1)+\frac{n}{\lambda_2}(\lambda_2-1)+\ldots+\frac{n}{\lambda_r}(\lambda_r-1)=(2p-2)-n(2\pi-2) \quad \text{I.}$$

2. Die schon erwähnte Einschränkung für die Faktoren σ_i

$$(\sigma_1, \lambda_1)=(\sigma_2, \lambda_2)=\ldots=(\sigma_r, \lambda_r)=1 \qquad \text{II.}$$

3. Einer Durchlaufung des kanonischen Schnittsystems entspricht als Substitution, wie man leicht sieht, die Identität. Anderseits kann diese Durchlaufung stetig in eine einmalige Umlaufung sämtlicher Verzweigungspunkte übergeführt werden. Daraus folgt:

$$\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}+\frac{\sigma_2 n}{\lambda_2}+\ldots+\frac{\sigma_r n}{\lambda_r} \equiv 0 \pmod{n} \qquad \text{III}$$

4. Falls $\pi = 0$ ist, müssen die zu den einzelnen F_{λ_i} gehörigen Substitutionen zusammen die Gruppe erschöpfen. Also gilt

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \frac{\sigma_2 n}{\lambda_2}, \ldots \frac{\sigma_r n}{\lambda_r}, n\right) = 1 \qquad \text{IV.}$$

Falls $\pi > 0$ ist, fällt IV. weg, indem der fehlende Teil der Gruppe immer durch passende Substitutionen längs der Rückkehrschnitte des kanonischen Systems ergänzt werden kann. Auf Grund der angegebenen Bedingungen erhält man sämtliche periodischen Transformationen.[1]) Notwendig für die topologische Äquivalenz zweier n-periodischer Transformationen einer Fläche F vom Geschlecht p ist die Übereinstimmung im Geschlecht π der Modulfläche und in der Verzweigungsart. Hinreichend sind diese Bedingungen für Kugel, Torus und Doppelringfläche. Hingegen bleibt für höhere Geschlechter noch zu untersuchen, ob ausserdem die Grössen σ_i oder Substitutionen längs nicht zerlegender Rückkehrschnitte von Einfluss sein können.

---

[1]) Vergleiche hiezu BROUWER: Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus. Daselbst sind auch die indikatrixumkehrenden Transformationen angegeben. Proc. Akad. Amsterd. XXI. (1919), S. 1352—1356.