Zwei spezielle Tetraeder.

Von

A. Kiefer (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 18. April 1925.)

Eine gerade Kreiszylinderfläche vom Radius null kann als das System der zwei Ebenen aufgefasst werden, welche durch die Zylinderachse gehen und den unendlich fernen imaginären Kugelkreis berühren. Zwei solche Nullzylinder, mit den Achsen a, b, bestimmen zwei Ebenenpaare. Die vier Ebenen derselben bilden die Seitenflächen eines speziellen imaginären Tetraeders, das durch die windschiefen Achsen der beiden Nullzylinder vollständig bestimmt ist.[1]) Die unendlich fernen Spuren der vier Seitenebenen des Tetraeders sind Tangenten des Kugelkreises; daher ist das Diagonaldreieck des von den vier Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits ein Tripel harmonischer Pole des Kugelkreises. Nimmt man also zu jedem der drei Paar Gegenkanten des Tetraeders die senkrechte Transversale, so steht jede der drei Transversalen auf der Stellung der zwei andern senkrecht und die Stellung von je zweien ist zum dritten Gegenkantenpaar parallel; diese Beziehungen werden sich später direkt ergeben, ferner wird sich zeigen, dass die drei Transversalen sich in dem Punkte schneiden, der den kürzesten Abstand der zwei Zylinderachsen halbiert. Im folgenden sollen die Kanten, die Seitenflächen, die Höhen, das Volumen, die Radien von Um- und Inkugel und die kürzesten Abstände und Richtungsunterschiede der nicht auf a, b fallenden Gegenkantenpaare des Tetraeders ermittelt werden.

---

[1]) Legt man in einer Ebene durch einen Punkt A die Strahlen nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten und schneidet die Strahlen mit einer beliebigen Geraden g, so ist bekanntlich die Mitte M der zwei Schnittpunkte der Fusspunkt des Lotes von A auf g; denn die Gerade AM und die Parallele durch A zu g sind zu den Strahlen harmonisch, und daher zueinander senkrecht. Ist X der eine Schnittpunkt, so ist $\overline{MX}^2 = -\overline{MA}^2$. — Hat man im Raum zwei windschiefe Geraden a, b und legt durch die eine, z. B. a, die Tangentialebenen nach dem unendlich fernen imaginären Kugelkreis und schneidet die Tangentialebenen mit b, so ist bekanntlich die Mitte M der zwei Schnittpunkte der eine Endpunkt des kürzesten Abstandes von a, b; denn die Ebene durch a nach M und die Parallelebene durch a zu b sind zu den Tangentialebenen harmonisch und daher zueinander senkrecht.

I.

Angenommen zuerst, die Achsen a, b der beiden Nullzylinder seien windschief normal und der kürzeste Abstand sei $d = AB$, wo A auf a und B auf b liege. Denkt man sich durch eine der beiden Achsen, z. B. durch a, die Tangentialebenen an den unendlich fernen imaginären Kugelkreis gelegt, so bildet jede mit AB einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich i ist. Die beiden Tangentialebenen begrenzen auf b die Kante RS, deren Mitte B ist. Also $\frac{BR}{d} = i$, $BR = BS = di$; die Tetraederkante auf b ist also $RS = 2di$; von derselben Grösse ist die auf a gelegene Kante PQ, deren Mitte A ist. Die vier andern Seitenkanten sind aus Symmetriegründen unter einander gleich. Man hat $\overline{AR}^2 = \overline{AS}^2 = d^2 + di^2 = d^2 - d^2 = 0$, $AR = AS = 0$, wie es sein muss, da diese Strecken auf den Geraden von A nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten der Ebene $A\,(RS)$ liegen. Somit $\overline{PR}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{AP}^2 = 0 + \overline{AP}^2 = di^2 = -d^2$, $PR = di$ und $PR = PS = QR = QS = di$, das ist die Länge jeder der vier andern Kanten. Es ist $AR = AS = BP = BQ = 0$, aber diese Strecken sind die Basishöhen der kongruenten gleichschenkligen Dreiecke PQR, PQS und PRS, QRS. Jede dieser vier Seitenflächen des Tetraeders hat also den Inhalt null. Eine Schenkelhöhe des gleichschenkligsn Dreieckes PQB, z. B. die von Q ausgehende, ist eine Höhe H des Tetraeders; es ist $H \cdot PB = PQ \cdot AB = -2d^2 i$. Hieraus folgt, da $PB = 0$ ist, dass $H = \infty$ ist. Dasselbe gilt für jede der vier Tetraederhöhen, die also alle gleich unendlich sind. Weil $AB = d$ der kürzeste Abstand der windschief normalen Kanten PQ, RS ist, so hat man für das Volumen des Tetraeders $\frac{AB}{6} \cdot PQ \cdot RS = \frac{d}{6} \cdot 2di \cdot 2di = -\frac{2}{3}d^3$, was man auch direkt erkennt, indem $\triangle RSA \cdot \frac{1}{3}PQ = \frac{1}{2} \cdot 2di \cdot d \cdot \frac{1}{3} \cdot 2di = -\frac{2}{3}d^3$ ist. Der Mittelpunkt von AB ist aus Symmetriegründen der gemeinsame Mittelpunkt von Um- und Inkugel des Tetraeders. Verbindet man die Mitte von AB mit irgendeiner Tetraederecke, z. B. mit P, so erhält man für den Radius der Umkugel $r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (di)^2 = \frac{d^2}{4} - d^2 = -\frac{3}{4}d^2$ und also $r = \frac{d}{2}i\sqrt{3}$. Das Lot von der Mitte von AB auf PB ist der Radius ϱ der Inkugel; daher aus ähnlichen Dreiecken $\varrho : \frac{d}{2} = AP : PB$ und weil $PB = 0$ ist, $\varrho = \infty$. Das muss so sein, weil ϱ das Lot auf die Gerade PB ist, die nach einem unendlich fernen imaginären

Kreispunkt der Ebene B (PQ) läuft, oder auch deswegen, weil die Oberfläche des Tetraeders gleich null ist. Projiziert man das Tetraeder orthogonal auf die Ebene, die durch die Mitte von AB geht und auf AB senkrecht steht, so ist die Projektion ein Quadrat, dessen Diagonalen $2di$ die Projektionen von PQ, RS und dessen Seiten $di\sqrt{2}$ die Projektionen der vier anderen Tetraederkanten sind. Aus dieser Darstellung erkennt man, dass die kürzesten Abstände der Gegenkantenpaare PS, QR und PR, QS die Länge der Quadratseite $2di\sqrt{\frac{1}{2}} = di\sqrt{2}$ haben; ferner sieht man, dass diese zwei kürzesten Abstände zu den Quadratseiten parallel laufen, durch die Mitte von AB gehen und dort halbiert werden. Jeder der drei kürzesten Abstände der drei Gegenkantenpaare steht auf der Ebene der beiden andern senkrecht und die Ebene ist zum dritten Gegenkantenpaar parallel. Der Neigungswinkel der Kante PS gegen die Ebene des Quadrates ist der halbe Richtungsunterschied der zwei Gegenkanten PS, QR. Bezeichnet man also den Richtungsunterschied mit α, so ist $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{di\sqrt{2}}{d} = i\sqrt{2}$; α ist auch der Richtungsunterschied von PR, QS. Die Seitenflächen des Tetraeders sind vier kongruente gleichschenklige Dreiecke und projizieren sich in die zwei Paare von Dreiecken, in welche das Quadrat durch je eine Diagonale geteilt wird. Diese letztern Dreiecke haben nicht etwa den Inhalt null, weil die Seitenflächen des Tetraeders den Inhalt null haben; der Grund liegt darin, dass der Neigungskosinus jeder Seitenfläche gleich unendlich ist. Die Inhalte der Diagonaldreiecke sind $\frac{1}{2} \cdot 2di \cdot di = -d^2$ Der Inhalt eines Dreieckes im Raum ist $\frac{1}{2} \cdot 2dih = dih$, wenn h die Höhe bezeichnet; der Neigungskosinus der Dreiecksebene ist $\frac{di}{h} = \infty$, da $h = 0$ ist. Somit ist der Inhalt der Dreiecksprojektion $dih \cdot \frac{di}{h} = -d^2$, wenn durch h gekürzt wird. Zusammengefasst:

Bei dem betrachteten Tetraeder hat jede der Kanten auf den zwei windschief normalen Zylinderachsen die Länge $2di$ und die Länge jeder der vier andern Kanten ist di. Die Höhen des Tetraeders sind unendlich gross. Der Inhalt jeder der vier Seitenflächen ist null. Das Volumen des Tetraeders beträgt $-\frac{2}{3}d^3$.

Der Radius der Umkugel ist $\frac{d}{2} i \sqrt{3}$ und der Radius der Inkugel ist unendlich. Der kürzeste Abstand des Kantenpaares auf den Zylinderachsen ist mit d bezeichnet; der kürzeste Abstand jedes der zwei andern Gegenkantenpaare ist $di\sqrt{2}$ und wenn α den Richtungsunterschied von zwei dieser Gegenkanten bedeutet, so ist $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = i\sqrt{2}$. Die kürzesten Abstände der drei Gegenkantenpaare gehen durch einen Punkt, der alle drei halbiert, nämlich durch die Mitte von AB; jeder der Abstände steht auf der Ebene der zwei andern senkrecht und jede dieser drei Ebenen ist zum dritten Paar von Gegenkanten parallel.

II.

Angenommen nun die Achsen a, b der beiden Nullzylinder seien windschief, ihr Richtungsunterschied sei φ und ihr kürzester Abstand d. Man lege durch d, dessen Endpunkte auf a, b beziehungsweise A, B sind, die senkrechte Ebene zu a und projiziere b auf diese Ebene; die Projektion b' ist senkrecht zu d. Die Ebenen, die durch a gehen, und den unendlich fernen imaginären Kugelkreis berühren, schneiden die zu a windschief normale Gerade b' in zwei Punkten C, D, so dass $BC = BD = di$ ist. Die senkrechten Geraden durch C, D zu b liegen in den durch a gehenden Tangentialebenen des Kugelkreises und daher begrenzen die zwei senkrechten Geraden auf b eine Kante PQ des Tetraeders.[1]) Es ist $PQ = \frac{CD}{\sin\varphi} = \frac{2di}{\sin\varphi}$, weil der Winkel zwischen b und b' gleich $90° - \varphi$ ist. Die Gegenkante RS auf a hat, weil dieselbe Betrachtung für b wiederholt werden kann, dieselbe Länge $RS = \frac{2di}{\sin\varphi}$. Dabei ist B die Mitte von PQ und A die Mitte von RS. Die Strecken AC und AD liegen auf den Geraden von A nach den imaginären, unendlich fernen Kreispunkten der Ebene $A(b')$; daher ist $AC = AD = 0$. Liegt S auf der gleichen Seite von b' wie P, so ist also $SP = AS - CP = \frac{di}{\sin\varphi} - di \operatorname{cotg}\varphi = \frac{di}{\sin\varphi}(1 - \cos\varphi) = \frac{di}{\sin\varphi} \cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = di \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Aus Symmetriegründen ist auch $RQ = di \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Da R und P auf verschiedener Seite von b' liegen, so ist $RP = RA + CP = \frac{di}{\sin\varphi} + di \operatorname{cotg}\varphi = \frac{di}{\sin\varphi}(1 + \cos\varphi) = \frac{di}{\sin\varphi} \cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2} = di \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$.

---

[1]) Die Bezeichnung ist abweichend von derjenigen in Abschnitt I.

Diese Länge hat auch QS. Da SR zu QD und PC parallel ist, so sind die Höhen der zwei Dreiecke SRQ und SRP gleich AD und AC. Aber $AD = AC = 0$ und folglich sind die Inhalte der zwei Dreiecke gleich null. Auf dieselbe Weise folgt durch Vertauschung der Achsen, dass auch die Inhalte der Dreiecke SPQ und RPQ gleich null sind. Jede Seitenfläche des Tetraeders hat den Inhalt null. Da der kürzeste Abstand der zwei Gegenkanten PQ, RS, mit der Länge $\frac{2di}{\sin\varphi}$, gleich d ist und der Richtungsunterschied der zwei Kanten gleich φ ist, so beträgt das Volumen des Tetraeders $\frac{d}{6} \cdot \frac{2di}{\sin\varphi} \cdot \frac{2di}{\sin\varphi} \cdot \sin\varphi = -\frac{2}{3} \frac{d^3}{\sin\varphi}$. Man kann diesen Wert auch so finden, dass man die Ecke P nach C und die Ecke Q nach D verschiebt und dann das Tetraeder $SRCD$ berechnet, gleich $\triangle ACD \cdot \frac{1}{3} SR = \frac{2di \cdot d}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{2di}{\sin\varphi} = -\frac{2}{3} \frac{d^3}{\sin\varphi}$. Aus dem Umstand, dass das Volumen des Tetraeders endlich und der Inhalt jeder Seitenfläche gleich null ist, folgt, dass jede der vier Höhen des Tetraeders gleich unendlich ist und dass der Radius der Inkugel ebenfalls gleich unendlich ist. Beides lässt sich auch direkt nachweisen. Da PC parallel zur Ebene $RSQD$ ist, so ist die von P ausgehende Tetraederhöhe gleich dem Lot H von C auf AD; daher folgt aus dem Dreieck ACD, dass $H \cdot AD = CD \cdot AB = 2di \cdot d$ ist; aber AD ist gleich null und folglich $H = \infty$. Übrigens ist die Ebene $RSQD$ Tangentialebene des Kugelkreises und daher das Lot von P auf die Ebene gleich unendlich. Der Mittelpunkt der Inkugel ist aus Symmetriegründen die Mitte von AB; daher ist der Radius der Inkugel das Lot vom Mittelpunkt auf AC oder AD, also gleich unendlich, weil AC und AD nach den Kreispunkten der Ebene ACD laufen. Der Mittelpunkt der Umkugel liegt ebenfalls in der Mitte von AB; der Radius ist die Strecke vom Mittelpunkt nach einer der vier Ecken des Tetraeders, z. B. nach S. Das gibt $r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{di}{\sin\varphi}\right)^2 = -d^2\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{4}\right)$; also $r = di\sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{4}}$, was für $\varphi = 90^\circ$ gibt $\frac{di}{2}\sqrt{3}$, wie es sein muss. Projiziert man das Tetraeder orthogonal auf die Ebene, welche durch die Mitte von AB geht und auf AB senkrecht steht, so ist die Projektion ein Rechteck mit den Diagonalen $\frac{2di}{\sin\varphi}$ und dem eingeschlossenen Winkel φ. Auch aus dieser Darstellung kann man die bisher angegebenen Resultate finden. Ferner ist ersichtlich, dass die kürzesten Abstände der Gegenkantenpaare SP, QR und SQ, RP parallel zu den Seiten des Rechteckes laufen und ihnen an Länge beziehungsweise gleich sind. Diese Abstände betragen also $\frac{2\,di}{\sin\varphi}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{di}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ und $\frac{2\,di}{\sin\varphi}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{di}{\cos\frac{\varphi}{2}}\cdot$ Der Richtungsunterschied der zwei Gegenkanten SP, QR ist gleich dem doppelten Neigungswinkel von SP gegen die Bildebene. Bezeichnet man den Richtungsunterschied mit α, so ist $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\,di}{\sin\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}:d=\frac{i}{\cos\frac{\varphi}{2}}\cdot$ Ist β der Richtungsunterschied der zwei Gegenkanten SQ, PR, so ist $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}=\frac{2\,di}{\sin\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}:d=\frac{i}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot$ Diese Werte könnte man auch mit Benützung der kürzesten Abstände finden. Man erkennt ferner, dass die kürzesten Abstände der drei Gegenkantenpaare sich in der Mitte von AB schneiden, dort gegenseitig halbieren und dass jeder auf der Ebene der beiden andern senkrecht steht. Die Dreiecke, in welche das Rechteck durch je eine Diagonale geteilt wird, sind die Projektionen der Seitenflächen des Tetraeders, die kongruent sind. Aus dem Umstand, dass die Seitenflächen den Inhalt null haben, darf man nicht schliessen, dass die Rechteckshälften ebenfalls null sind; es gilt darüber das entsprechende zu dem in Abschnitt I gesagten. Zusammengefasst:

Bei dem betrachteten Tetraeder hat jede der Kanten auf den unter dem Winkel φ sich kreuzenden Zylinderachsen a, b die Länge $RS=PQ=\frac{2\,di}{\sin\varphi}\cdot$ Die andern zwei Paare von Kanten messen $SP=RQ=di\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ und $RP=QS=di\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\cdot$ Jede Seitenfläche des Tetraeders hat den Inhalt null. Das Volumen beträgt $-\frac{2}{3}\;\frac{d^3}{\sin\varphi}\cdot$ Jede der Höhen des Tetraeders ist unendlich gross und ebenso der Radius der Inkugel. Der Radius der Umkugel ist $di\sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{1}{4}}\cdot$ Der kürzeste Abstand der Gegenkanten SP, QR beträgt $\frac{di}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ und für ihren Richtungsunterschied α hat man $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{i}{\cos\frac{\varphi}{2}}$. Die Gegenkanten SQ, RP haben den kürzesten Abstand $\frac{di}{\cos\frac{\varphi}{2}}$ und für ihren Richtungsunterschied β hat man $\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{i}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. Die kürzesten Abstände der drei Gegenkantenpaare schneiden sich im Mittelpunkt von AB, der jeden halbiert; jeder der drei Abstände ist senkrecht zur Ebene der beiden andern und jede solche Ebene ist parallel zum dritten Paar von Gegenkanten.

Da in jeder Seitenfläche des Tetraeders diejenige Höhe, die auf a oder b senkrecht steht, gleich null ist, so ist in jeder Seitenfläche ein Winkel gleich 180° und jeder der beiden andern ist null. Das gleiche gilt für die drei Kantenwinkel irgend eines der vier Dreikante, die in den Ecken des Tetraeders liegen. Da irgend zwei Seitenebenen des Tetraeders ein Paar von Tangentialebenen an den unendlich fernen imaginären Kugelkreis bilden, so ist die trigonometrische Tangente der Hälfte eines jeden Flächenwinkels des Tetraeders gleich i; die Tangente des ganzen Winkels ist ebenfalls i und der Kosinus ist gleich unendlich. (Diese Beziehungen kann man auch trigonometrisch finden.)