

# Darstellung des Horopters.

Von

MARCEL GROSSMANN (Zürich).

Mit 3 Textfiguren.

(Als Manuskript eingegangen am 1. Januar 1925.)

1. Wenn die Augen die primäre Stellung einnehmen, d. h. wenn der Blick bei aufrechter Körperhaltung nach „vorn“ gerichtet ist, die beiden Blickrichtungen horizontal und parallel verlaufen, so bestimmen die Strahlenbündel durch die beiden Knotenpunkte korrespondierende Stellen auf den beiden Netzhäuten. Die beiden Strahlenbündel sind kongruent und entsprechende Strahlen gleichgerichtet.

Wird nun ein beliebiger Raumpunkt fixiert, d. i. eine sekundäre Stellung der Augen hergestellt, so werden diese kongruenten Strahlenbündel um die Knotenpunkte verdreht, bleiben aber kongruent. Es werden nun, wenn ein bestimmter Raumpunkt fixiert wird, ausser ihm nur solche Raumpunkte einheitlich wahrgenommen, deren beide Bilder auf korrespondierende Netzhautstellen fallen.<sup>1)</sup>

Der geometrische Ort dieser Punkte ist die Raumkurve dritter Ordnung, welche das Erzeugnis der beiden kongruenten Bündel ist. Ihre Punkte entstehen als Schnittpunkte solcher entsprechender Strahlen beider Bündel, die sich schneiden, ihre Bisekanten sind die Schnittgeraden entsprechender Ebenen beider Bündel.

2. In Fig. 1 seien  $T_1, T_2$  die beiden Bündelscheitel, gegeben durch ihre kotierten Normalprojektionen.  $S$  sei der Spurpunkt der Geraden  $T_1 T_2$  mit der Projektionsebene, so dass die Koten der Bündelscheitel sich verhalten wie  $ST_1 : ST_2$ . Die Kongruenz der beiden Bündel sei bestimmt durch zwei ähnliche Systeme in der Projektionsebene, gegeben durch die ähnlichen Dreiecke  $A_1 B_1 C_1$  und  $A_2 B_2 C_2$ , wobei  $A_1$  mit  $T'_1$ ,  $A_2$  mit  $T'_2$  zusammenfallen möge. Der Umlaufsinn der beiden Dreiecke muss der gleiche oder der entgegengesetzte sein, je nachdem die Koten der Bündelscheitel  $T_1$  und  $T_2$  bez. der Projektionsebene gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben.

<sup>1)</sup> Siehe HELMHOLTZ, Wissenschaftliche Abhandlungen, II. Bd.

FRED. SCHUH, Die Horopterkurve. Zsch. f. Math. u. Phys., 47 (1902).

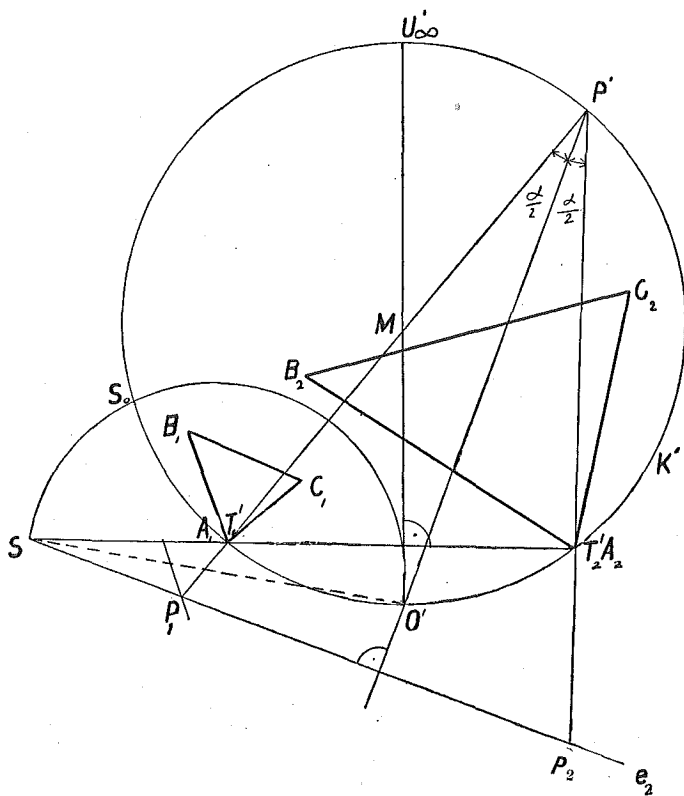


Fig. 1.

Die Angaben haben zur Folge, dass der Strahl  $T_1 A_1$  des ersten Bündels, der zur Projektionsebene normal steht, dem ebenso gerichteten Strahl  $T_2 A_2$  des andern Bündels entspricht. Diese Disposition der beiden kongruenten Bündel ist stets, und zwar in eindeutiger Weise, möglich, wie man erkennt, wenn man die beiden kongruenten ebenen Systeme betrachtet, die von den beiden Bündeln in der unendlich-fernen Ebene des Raumes bestimmt werden. Es ergibt sich, dass die beiden kongruenten Bündel stets ein reelles Paar paralleler entsprechender Strahlen haben. Die Normalebene zu diesen Strahlen in den beiden Bündeln sind auch entsprechend; ihre Stellung möge die Grundstellung der kongruenten Bündel heißen und dient in Fig. 1 als Projektionsebene.

3. Im Allgemeinen werden zwei entsprechende Strahlen der beiden kongruenten Bündel windschief zueinander liegen. Es gibt aber eine einfache unendliche Mannigfaltigkeit entsprechender Strahlen, die

sich schneiden und deren Schnittpunkte die Horopterkurve bilden. Die Schnittgeraden entsprechender Ebenen bilden die Bisekantenkongruenz des Horopters.

Die beiden Bündelscheitel sind Punkte des Horopters; denn, zählt man ihre Verbindungsgerade zum einen Bündel, so schneidet sie sich mit dem entsprechenden Strahl des andern Bündels in dessen Scheitel. Da die Horopterkurve — als Erzeugnis kollinear er Bündel — von der dritten Ordnung ist, so liegt also in jeder Ebene durch die Verbindungsgerade der Bündelscheitel noch ein Kurvenpunkt, der nun konstruiert werden möge.

Dazu lege man eine Ebene durch  $T_1, T_2$ , die man z. B. zum zweiten Bündel zählt und mit  $E_2$  bezeichnet; ihre Spur sei  $e_2$ . Zu dieser Geraden kann man in der Aehnlichkeit der beiden ebenen Systeme die entsprechende Gerade  $e_1$  bestimmen.  $e_1$  und  $e_2$  mögen sich im Punkt  $P_1$  schneiden. Zu diesem Punkt ermittle man in der Aehnlichkeit den entsprechenden,  $P_2$ . Dann sind die beiden Bündelstrahlen  $T_1 P_1$  und  $T_2 P_2$  entsprechend und schneiden sich, da beide in der Ebene  $E_2$  liegen. Der Schnittpunkt  $P'$  ihrer Projektionen, ist somit ein Punkt der Projektion der Horopterkurve und man fände die zweite Projektion von  $P$ , wenn man die zweiten Projektionen der Scheitel  $T_1$  und  $T_2$  gäbe.

Die Normalprojektionen aller Punkte der Horopterkurve auf eine Projektionsebene in Grundstellung (auf eine „Grundebene“) bilden einen Kreis.

Denn da sich die zur Projektionsebene normalen Strahlen  $T_1 A_1$  und  $T_2 A_2$  entsprechen, so entsprechen sich die beiden Ebenenbüschel um diese Strahlen und da sie kongruenten Bündeln entnommen sind, so sind sie gleichsinnig gleichwinklig. Um  $T_1'$  und  $T_2'$  entstehen also gleichwinklige, gleichsinnige Strahlbüschel.

Die vorhin getroffene einfache Disposition der beiden Bündel hat ferner zur Folge, dass zwei entsprechende Strahlen beider gleich geneigt zur Projektionsebene sind. Daher müssen  $P' P_1$  und  $P' P_2$  gleich lang sein und die Spur  $e_2$  muss normal stehen auf der Halbierungslinie des Winkels  $P_1 P' P_2$ . Wenn  $O'$  der Mittelpunkt des Bogens  $T_1' T_2'$  der Projektion  $k'$  des Horopters ist, so ist  $P' O'$  diese Winkelhalbierende. Wendet man diesen Zusammenhang zwischen der Projektion  $P'$  eines Horopterpunktes und der Spur  $e_2$  der Ebene  $T_1 P T_2$  an auf die projizierende Ebene durch  $T_1 T_2$ , so erhält man die Normalprojektion des unendlich-fernen Punktes  $U$  des Horopters. Aus dem gleichen Grunde gibt der Kreis über dem Durchmesser  $SO'$  den Spürpunkt  $S_0$  der Horopterkurve mit der Projektionsebene.

4. In Fig. 2 gebe man nun, gestützt auf die bisherigen Betrachtungen, die Normalprojektionen  $T'_1, T'_2$  der beiden Bündelscheitel, den Spurpunkt  $S$  ihrer Verbindungsgeraden mit der Projektionsebene und einen Kreis  $k'$  durch  $T'_1, T'_2$  als Normalprojektion des Horopters auf die Grundebene durch  $S$ . Wählt man auf diesem Kreis den Grundriss  $P'$  eines Horopterpunktes, so ist die Normale aus  $S$  zur Halbierungslinie  $O'P'$  des Winkels  $T'_1P'T'_2$  die Spur  $e$  der Ebene  $T_1PT_2$  und bestimmt die Spurpunkte  $P_1$  und  $P_2$  der Bündelstrahlen  $T_1P$  und  $T_2P$ .

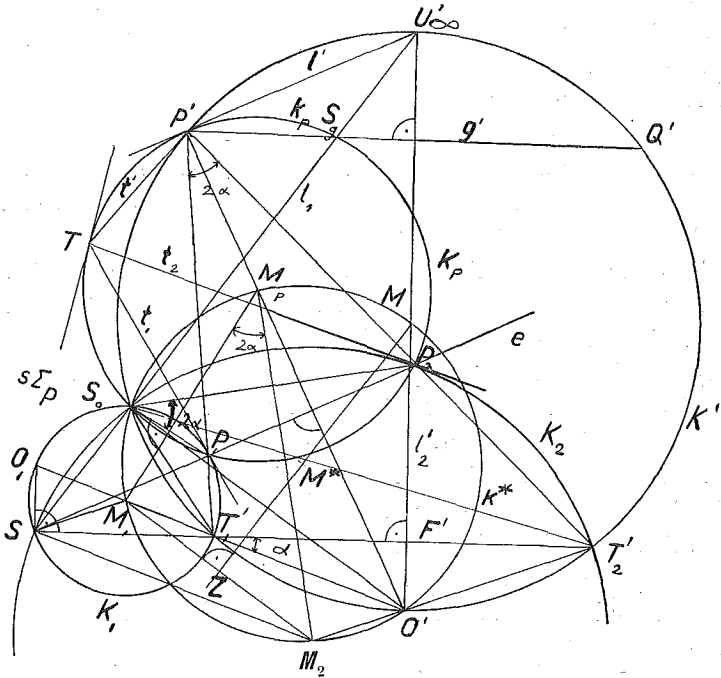


Fig. 2.

Die Horopterkurve werde nun von  $T_1$  und  $T_2$  aus auf die Grundebene projiziert. Durchläuft  $P$  die Raumkurve, so beschreibt die Projektion  $P'$  den Kreis  $k'$ , der Peripheriewinkel  $T'_1P'T'_2$  ist konstant, und sei mit  $2\alpha$  bezeichnet. Daher werden auch die Winkel  $SP_1T'_1$  und  $SP_2T'_2$  konstant bleiben, denn der erste ist  $90^\circ - \alpha$ , der zweite  $90^\circ + \alpha$ . Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  beschreiben somit (wenn  $P'$  auf dem Kreis  $k'$  variiert), Kreise  $k_1$  bzw.  $k_2$ , und diese sind die Zentralprojektionen der Horopterkurve von  $T_1$  bzw.  $T_2$  aus auf die Grundebene. Die Mittelpunkte  $M_1$  bzw.  $M_2$  dieser Kreise ergeben sich unmittelbar. Denn da der Peripheriewinkel  $SP_1T'_1$  gleich  $90^\circ - \alpha$

ist, so ist der zugehörige Zentriwinkel  $SM_1 T'_1$  gleich  $180^\circ - 2\alpha$ , somit der Winkel  $ST'_1 M'_1 = \alpha$ , so dass  $M_1$  auf der Verlängerung der Geraden  $O' T'_1$  liegt, da diese mit  $T'_1 T'_2$  den Winkel  $\alpha$  bildet. Ebenso liegt  $M_2$  auf der Verlängerung der Geraden  $O' T'_2$  und das Viereck  $O' M_1 S M_2$  ist ein Parallelogramm, so dass sich  $M_1$  und  $M_2$  ergeben, wenn man durch  $S$  die Parallelen zu  $O' T'_1$  bzw.  $O' T'_2$  zieht. Die beiden Bildkreise  $k_1$  und  $k_2$  treffen sich und die Normalprojektion  $k'$  des Horopters im Spurpunkte  $S_0$  der Raumkurve mit der Grundebene. Dieser Punkt  $S_0$  ist das Situationszentrum der beiden ähnlichen Systeme, von denen wir ausgingen, da sich die Bündelstrahlen  $T_1 S_0$  und  $T_2 S_0$  entsprechen.

5. Man kann nun weiter beweisen:

Die Zentralprojektion des Horopters von irgend einem seiner Punkte aus auf eine Grundebene ist ein Kreis.

Man kennt von der Zentralprojektion des Horopters von  $P$  aus auf die Grundebene die Punkte  $P_1, P_2, S_0, P'$  und  $T$ , wobei der letztere Punkt der Spurpunkt der Kurventangente in  $P$  mit der Grundebene sei, erhalten durch die Spuren  $t_1$  und  $t_2$  der beiden Tangentialebenen in  $P$  an die projizierenden Kegel von  $T_1$  und  $T_2$  aus.  $T$  liegt auch auf der Normalprojektion  $t'$  der Horoptertangente. Und da die Zentralprojektion einer Raumkurve dritter Ordnung von einem ihrer Punkte aus ein Kegelschnitt ist, so genügt es zu zeigen, dass diese 5 Punkte auf einem Kreis liegen. Verbindet man aber  $P', S_0$  und  $T$  mit  $P_1$  und  $P_2$ , so entstehen um diese beiden Punkte gleichwinklige gleichsinnige Strahlbüschel, da sich die Strahlen in der Ähnlichkeit entsprechen. Dabei sind  $t_1$  und  $t_2$  entsprechend, weil sich auch die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  entsprechen und auf denen sich entsprechenden Kreisen  $k_1$  bzw.  $k_2$  liegen.

Der Mittelpunkt  $M_P$  des Kreises  $k_P$  durch die 5 genannten Punkte liegt auf  $O' P'$ , d. i. der Mittelnormalen von  $P_1 P_2$ , und ferner auf den beiden (Mittel)-Normalen, die man von  $M_1$  und  $M_2$  auf  $S_0 P_1$  bzw.  $S_0 P_2$  fällen kann.

6. Man kann nun auch die Schmiegungeebene der Horopterkurve in einem ihrer Punkte  $P$  konstruieren. Denn wenn man die Raumkurve von  $P$  aus auf die Grundebene projiziert, so wird die Schmiegungeebene des Punktes  $P$  projizierend und ihre Spur  $s\Sigma_P$  wird die Tangente an den Kreis  $k_P$  im Spurpunkt  $T$  der Horoptertangente.

Weiter kann man zeigen:

Die Mittelpunkte der sämtlichen Kreisbilder des Horopters von seinen Punkten aus auf die Grundebene liegen auf einem Kreis.

Denn da der Winkel  $P_1 S_0 P_2 = 2\alpha$  ist, weil gleich dem Peripheriewinkel  $P_1 P' P_2$ , so wird auch der Winkel der beiden Mittelnormalen  $M_1 M_P$  und  $M_2 M_P$  gleich  $2\alpha$ , so dass alle  $M_P$  auf einem Kreise durch  $M_1$  und  $M_2$  liegen.

Von diesem Kreise  $k^*$  kennt man ausserdem die Punkte  $M$  und  $S_0$ , sein Mittelpunkt  $M^*$  liegt auf der Mittelnormalen von  $M_1 M_2$ , die auch durch  $M$  geht.

Der Kreis  $k^*$  geht, wie man leicht einsieht, auch durch  $O'$ .

Ein Punkt  $P'$  und der Mittelpunkt  $M_P$  des Bildkreises  $k_P$  von  $P$  aus liegen stets auf einem Strahle durch  $O'$ .

Die Sätze über die Kreisbilder des Horopters ergeben sich auch als eine Folge des Umstandes, dass die Horopterkurve durch die absoluten Kreispunkte der Grundstellung geht.

7. Zu jedem Punkt  $P'$  der kreisförmigen Normalprojektion auf die Grundebene gibt es einen symmetrischen Punkt  $Q'$  bez.  $O'U'$ . Die Punkte  $P$  und  $Q$  mögen korrespondierende Punkte des Horopters heissen. Da ihre Grundrisse  $P', Q'$  und  $T'_1, T'_2$  usw. eine Involution auf dem Kreis  $k'$  bilden, mit  $U'$  und  $O'$  als Doppelpunkten, so bilden auch auf der Raumkurve korrespondierende Punkte die Paare einer Punktinvolution, denn die Beziehung zwischen  $P$  und  $P'$  ist ein-eindeutig. Doppelpunkte dieser Involution sind der Kurvenscheitel  $O$  und der unendlich ferne Punkte  $U$  der Kurve.

Die Strahlenbündel von korrespondierenden Punkten des Horopters nach seinen übrigen Punkten sind kongruent.

Denn man erkennt unmittelbar die Kongruenz der Dreikante von  $P$  und  $Q$  nach  $U_\infty, T_1$  und  $T_2$ .

Die Scheitelpunkte  $T_1$  und  $T_2$  geniessen also keine Auszeichnung vor den andern Paaren korrespondierender Punkte; von jedem Paar korrespondierender Punkte aus lässt sich der Horopter als Erzeugnis kongruenter Strahlbündel auffassen.

Verbindet man korrespondierende Punktepaare, wie  $P$  und  $Q$ , durch Geraden  $g$ , so bilden diese eine Regelfläche. Nun bilden die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte einer Involution auf einer Raumkurve dritter Ordnung stets eine hyperboloidische Regelschar. Denn denkt man sich die Raumkurve von einem beliebigen ihrer Punkte aus auf eine Ebene projiziert, so geht die vorausgesetzte Involution über in eine Punktinvolution auf dem Kegelschnitt, der das Bild der Raumkurve ist. Diese Involution hat einen Pol  $J$ . Also tref-

fen die Verbindungsgeraden aller Paare entsprechender Punkte der Involution auf der Raumkurve den projizierenden Strahl nach  $J$ .

Im Falle der Involution korrespondierender Punkte auf dem Horopter ergibt sich nun:

Die Verbindungsgeraden korrespondierender Punkte des Horopters bilden ein hyperbolisches Paraboloid.

Denn diese Verbindungsgeraden  $PQ$  sind alle parallel zur Normalebene zu  $O'U'$ , so dass diese eine Richtungsebene ist. Eine weitere Leitgerade  $l_1$  ist die Gerade  $S_0U'$ , auf der die Spurpunkte  $S, Sg \dots$  aller erzeugenden  $T_1 T_2, PQ = g, \dots$  der Regelfläche liegen. Es genügt zu zeigen, dass der Spurpunkt  $S$  der Erzeugenden  $T_1 T_2$  auf  $S_0U'$  liegt, denn man kann  $T_1, T_2$  als beliebiges Paar korrespondierender Punkte auffassen.  $S_0, S$  und  $U'$  liegen aber in einer Geraden, weil  $O'S_0$  sowohl zu  $U'S_0$  wie zu  $SS_0$  normal steht. (Winkel  $O'S_0U'$  ist ein Rechter, als Peripheriewinkel über dem Durchmesser  $O'U'$  des Kreises  $k'$ , und  $SS_0$  teilt als Ecktransversale im Dreieck  $T_1'S_0T_2'$  die Gegenseite im Ähnlichkeitsverhältnis.) Endlich ist die Normale  $l_2$ , die man vom Kurvenscheitel  $O$  auf die Asymptote  $u$  fällen kann, eine dritte Leitgerade der Regelfläche. Denn nennt man  $F$  den Mittelpunkt der Strecke  $T_1 T_2$ , so ist  $O'F'$  parallel zur Spur  $O_1 S$  der Ebene  $T_1 O T_2$ , so dass  $OF$  eine Spurparallele dieser Ebene ist.

Da nun  $l_1$  und  $l_2$  zur Grundebene parallel sind, ist diese die zweite Richtungsebene des Paraboloides und da alle Erzeugenden der zweiten Regelschar die Asymptote, d. i. eine Verbindungsgerade (konsekutiver) korrespondierender Punkte schneiden müssen, so gehen die Normalprojektionen  $l'$  aller dieser Geraden durch  $U'$ .

8. Um nun die Eigenschaften der Horopterkurve möglichst unverzerrt zur Geltung zu bringen, werde in Fig. 3 angenommen, dass die erste Projektionsebene Grundstellung habe und durch den Kurvenscheitel  $O$  gehe. Die zweite Projektionsebene habe die Stellung der ersten Richtungsebene des Paraboloides der Verbindungsgeraden korrespondierender Punkte. Dadurch wird der Aufriss  $O''$  des Kurvenscheitels zum Symmetriezentrum des Aufrisses des Horopters und zu einem Wendepunkt des Aufrisses.

Die Horopterkurve ist dann bestimmt, wenn man ihre erste Projektion, den Kreis  $k'$  gibt und die beiden Projektionen eines Paares korrespondierender Punkte, z. B. die Horoptertangente in  $O$ , sie sei mit  $w$  bezeichnet.

Um dann zu einem beliebigen Punkt des Grundrisses  $k'$  den Aufriss zu finden, bedient man sich am besten der durch  $P$  gehenden Erzeugenden  $l$  des Paraboloides, deren Grundriss  $P'U'$  ist. Diese





Um die Tangente und die Schmiegungeebene des Punktes  $P$  zu bestimmen, zeichne man den Kreis  $k^*$ , den Ort der Mittelpunkte aller Kreisbilder des Horopters auf die Grundebene. Aus Fig. 2 folgt, dass für die spezielle Disposition der Fig. 3 der Mittelpunkt  $M^*$  dieses Kreises in der Mitte der Strecke  $O'M$  liegt und der Kreis  $k^*$  den Kreis  $k'$  in  $O'$  berührt. Nun kann man den Mittelpunkt  $M_P$  des Bildkreises  $k_P$  der Raumkurve von  $P$  aus bestimmen auf dem Kreis  $k^*$  und dem Strahl  $O'P'$ . Der Bildkreis  $k_P$  geht dann mit diesem Mittelpunkt durch  $O'$  und  $P'$ . Der Spurpunkt  $T$  der Horoptertangente  $t$  in  $P$  liegt dann auf diesem Kreis und die Spur der Schmiegungeebene ist die Tangente in  $T$  an den Kreis  $k_P$ .

9. Diese Spurkurve der Tangentenfläche des Horopters, von der man so Punkte und Tangenten konstruiert, wird eine Kurve dritter Klasse sein, denn die Tangentenfläche einer Raumkurve dritter Ordnung ist eine Developpable dritter Klasse. Die Natur dieser Kurve ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion ihrer Punkte:

Bezeichnet man den Winkel  $U'O'P'$  mit  $\frac{\omega}{2}$ , so wird auch der Winkel  $P'O'T$  gleich  $\frac{\omega}{2}$ , wie sich aus den rechtwinkligen Dreiecken ergibt, deren Ecken die Punkte sind, die diese Winkel bestimmen (der Winkel  $O'TP'$  ist ein Rechter, weil  $O'P'$  ein Durchmesser des Kreises  $k_P$  ist). Wenn man also den Punkt  $T_P^*$  der Spurkurve sucht, der mit  $T$  auf einem Strahl durch  $O'$  liegt, so ist er Spurpunkt der Horoptertangente in einem Punkte  $P^*$  des Horopters, so dass  $P'$  und  $P^*$  mit  $M$  in gerader Linie liegen. Das Viereck  $P'TT^*P^*$  ist also ein Rechteck und die Seite  $P'P^*$  ist gleich dem Durchmesser, er sei mit  $4a$  bezeichnet, des Grundrisskreises  $k'$ . Ist daher  $Z$  der Schnittpunkt der Geraden  $TT^*$  mit dem Kreis  $k^*$ , so sind die Strecken  $ZT$  und  $ZT^*$  gleich, und zwar  $2a$ . Man hat somit bewiesen:

Die Spurkurve der Tangentenfläche des Horopters mit der Grundebene des Kurvenscheitels ist eine Pascalsche Schnecke (mit Rückkehrpunkt).

Man erkennt auch sofort die Gleichung der Spurkurve. Es ist

$$O'P' = O'U' \cdot \cos \frac{\omega}{2}, \varrho = O'T_P = O'P' \cdot \cos \frac{\omega}{2}, \text{ also}$$

$$\varrho = 4a \cdot \cos \frac{2\omega}{2} \text{ oder}$$

$$\varrho = 2a \cdot (1 + \cos \omega).$$

Die Spurkurve ist also vierter Ordnung; sie hat in den absoluten Kreispunkten Spitzen, da diese Punkte dem Horopter angehören.

10. Die Tangentenfläche des Horopters hat, als abwickelbare Fläche dritter Klasse, drei Tangentialebenen, die zur Aufrissebene normal stehen und die als projizierende Schmiegungebenen des Horopters Wendepunkte des Aufrisses ergeben.  $O''$  ist einer dieser Wendepunkte, die beiden anderen,  $O_1''$  und  $O_2''$ , müssen sich daher mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen.

Nun lässt sich leicht der Winkel  $\varphi$  berechnen, den die Spur  $s_{\Sigma_P}$  der Schmiegungebene des Punktes  $P$  mit der projizierenden Richtung  $O'U'$  bildet.

Bedient man sich bei der Bestimmung von Richtungsunterschieden der Vorstellungen und Bezeichnungen, die in der Geodäsie üblich sind, so wird man den Polygonzug betrachten, dessen Seiten  $O'P'$ ,  $P'T$  und die Spur  $s$  der Schmiegungebene  $\Sigma$  des Punktes  $P$  sind. Die erste Seite  $O'P'$  bildet mit der Geraden  $O'U'$  den Richtungswinkel  $\frac{\omega}{2}$ , der Brechungswinkel bei  $P'$  ist  $270^\circ + \frac{\omega}{2}$ , derjenige bei  $T$   $180^\circ + \frac{\omega}{2}$ . Also ist der Richtungsunterschied der Spur mit der Richtung  $O'U'$

$$\varphi = \frac{\omega}{2} + 270^\circ + \frac{\omega}{2} + 180^\circ + \frac{\omega}{2} = 450^\circ + \frac{3\omega}{2} = 90^\circ + \frac{3\omega}{2}.$$

Setzt man daher 
$$\frac{\omega}{2} = \mp 30^\circ$$

so wird  $\varphi$  zu  $0^\circ$  bzw.  $180^\circ$ , und die Spur  $s$  der Schmiegungebene wird projizierend. Es gibt also zwei korrespondierende Punkte  $O_1$  und  $O_2$  des Horopters, deren Schmiegungebenen projizierend sind, so dass die Aufrisse dieser Punkte Wendepunkte der zweiten Projektion des Horopters sind. Ausserdem gibt natürlich  $\frac{\omega}{2} = 90^\circ$  die projizierende Schmiegungebene des Scheitels  $O$ . Die Aufrisse der drei Punkte  $O$ ,  $O_1$  und  $O_2$  liegen offenkundig in einer Geraden, wie das bei den Wendepunkten einer ebenen Kurve dritter Ordnung der Fall ist.

Soll dagegen die Spur der Schmiegungebene normal stehen zur Symmetrieachse  $O'U'$  der Spurkurve, so muss

$$\varphi = 90^\circ \text{ oder } 270^\circ \text{ sein, daher wird}$$

entweder  $\frac{\omega}{2} = 0$ , und man erhält den unendlich fernen Punkt  $U$ , oder

$\frac{\omega}{2} = \mp 60^\circ$  und man erhält zwei korrespondierende Punkte  $R_1$  und  $R_2$ , deren Schmiegungebenen Spuren haben, die zusammenfallen mit der zur Symmetrieachse normalen (Doppel)-Tangente der Spurkurve.

11. Aus der Fig. 3 erkennt man unmittelbar andere Erzeugungsarten der Pascalschen Schnecke mit Spitze:

a) Die Pascalsche Schnecke ist die Fusspunktkurve des Punktes  $O'$  in Bezug auf den Kreis  $k'$ .

Denn der Winkel  $O'TP'$  hat sich als ein Rechter ergeben.

b) Zieht man durch einen Punkt  $O'$  eines Kreises  $k'$  Sehnen  $O'P'$  und errichtet über diesen als Durchmessern Kreise, so werden diese Kreise von einer Pascalschen Schnecke umhüllt, die in  $O'$  eine Spitze hat.

Zum Schluss möchte ich betonen, dass mein Assistent, Herr Ingenieur P. PASTERNAK, Privatdozent an der E. T. H., im Anschluss an Konstruktionsübungen, für die ich diese zweckmässige Anordnung des Horopters vorgeschlagen hatte, sich mit Eifer und Erfolg mit der Untersuchung der Kurve beschäftigte.

Zürich, den 31. Dezember 1924.