Eine Aufgabe über die Normalen einer Fläche zweiten Grades.

Von

A. Kiefer (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 10. April 1923.)

Gesucht für eine Fläche zweiten Grades die Gesamtheit der Normalen, die eine beliebig gewählte feste Normale der Fläche schneiden.[1])

I.

Von einem Punkt aus gehen bekanntlich nach einer Fläche zweiten Grades sechs Normalen. Die Fusspunkte werden durch eine Raumkurve dritten Grades herausgeschnitten, die das Erzeugnis von zwei projektivischen Strahlenbündeln ist, deren Scheitelpunkte der gewählte Punkt und der Mittelpunkt der Fläche sind. Wählt man vom ersten Bündel einen beliebigen Strahl, so gibt es zu ihm eine senkrechte Diametralebene, und die konjugierte Gerade zu dieser Ebene in bezug auf die Fläche ist der entsprechende Strahl des zweiten Bündels. Angenommen, die gewählte Flächennormale sei g und ihr Fusspunkt F, so gehen durch jeden Punkt P von g ausser g noch fünf Normalen der Fläche. Die zu einem Punkte P gehörige Kurve dritten Grades, welche die Fläche in den Fusspunkten der von P ausgehenden Normalen schneidet, geht durch P, ferner durch den Mittelpunkt O der Fläche und die unendlich fernen Punkte ihrer drei Achsen. Die Strahlen von irgend einem Punkt der Kurve nach der Kurve bilden einen Kegel zweiten Grades. Wählt man den Fusspunkt F der gegebenen Normalen g als Spitze eines solchen Kegels, so sind die Geraden von F nach P (d. i. g), und von F nach dem Mittelpunkt der Fläche und den unendlich fernen Punkten ihrer drei Achsen fünf Erzeugende des Kegels. Aber da der Kegel zweiten Grades ist, so ist er durch die fünf Erzeugenden bestimmt. Er möge K heissen. Alle Kurven dritten Grades, die zu den verschiedenen Punkten P der Normalen g gehören, liegen also auf dem Kegel K. Seine Durchdringung mit der Fläche zweiten Grades ist daher der Ort der Fusspunkte aller Normalen,

[1]) Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. LXVI (1921). S. 196.

welche die feste Normale g schneiden. Der gesuchte Ort ist eine Raumkurve vierter Ordnung; sie hat die Kegelspitze F, die auf der Fläche zweiten Grades liegt, zum Doppelpunkt. Die Doppelpunktstangenten gehen von F nach den Fusspunkten von unendlich benachbarten Normalen, die g schneiden, und sind daher die aufeinander senkrecht stehenden konjugierten Tangenten in dem Punkte F der Fläche zweiten Grades. Umgekehrt liegen diese zwei Tangenten, ferner die Normale von F und die Parallelen durch F zu den drei Achsen der Fläche auf einem Kegel zweiten Grades, der auch die Gerade von F nach dem Mittelpunkt der Fläche zur Erzeugenden hat; zieht man durch F zu den Achsen die Parallelen und legt in den Schnittpunkten mit der Fläche die Normalen, so schneidet jede von ihnen die Normale des Punktes F. Ersetzt man die Fläche zweiten Grades durch irgend eine andere mit demselben, reellen oder imaginären, Asymptotenkegel, so gehört zu dem Punkte P in bezug auf die neue Fläche dieselbe Kurve dritten Grades wie für die erste Fläche; die Kurve geht nämlich, wie die frühere, durch P, durch den Mittelpunkt der Fläche, durch die unendlich fernen Punkte ihrer Achsen und, gemäss der Entstehung der Kurve, durch die Fusspunkte der Normalen von P auf den Asymptotenkegel. Bewegt man nun P auf der Geraden g, so gehört zu jeder Lage von P eine Raumkurve dritten Grades, welche jeweilen für alle Flächen des Büschels mit gemeinsamem Asymptotenkegel dieselbe ist. Alle diese Raumkurven gehen durch F, weil immer diejenige für die ursprüngliche Fläche durch F geht, und alle liegen auf dem früher gefundenen Kegel zweiten Grades K, der durch die fünf Erzeugenden nach P, nach dem Mittelpunkt der Fläche und nach den unendlich fernen Punkten seiner Achsen bestimmt ist. D. h.: Hat man ein Büschel von Flächen zweiten Grades mit demselben Asymptotenkegel und von irgend einer Fläche des Büschels eine Normale g mit dem Fusspunkt F, und lässt man auf g einen Punkt P sich bewegen, so gehört zu jeder Lage von P auf g für alle Flächen des Büschels dieselbe Kurve dritten Grades, und alle diese unendlich vielen Kurven liegen auf dem Kegel zweiten Grades K mit der Spitze F. Dieser Kegel durchdringt die einzelnen Flächen des Büschels und auch ihren gemeinsamen Asymptotenkegel in Raumkurven vierter Ordnung; jede dieser Raumkurven enthält für die zugehörige Fläche des Büschels diejenigen Punkte, deren Normalen die Gerade g schneiden.

II.

Die Normalen von einem Punkt nach einer Fläche zweiten Grades können noch auf andere Weise gefunden werden, als eingangs angegeben. Zu jedem Strahl g durch den Punkt gehört der konjugierte Strahl g' in der Polarebene des Punktes und ferner die normale Stellung g^* in der unendlich fernen Ebene. Die Geraden g' und g^* beschreiben zwei projektivische Strahlenebenen, deren Erzeugnis eine developpable Fläche dritter Klasse ist. Ihre gemeinsamen Tangentialebenen mit der Fläche zweiten Grades sind die sechs Tangentialebenen in den sechs Fusspunkten der Normalen von dem Punkt nach der Fläche. Die developpable Fläche dritter Klasse ist die Polarfläche der Kurve dritter Ordnung, welche die Fusspunkte der sechs Normalen enthält. Der Fläche dritter Klasse gehören ausser der unendlich fernen Ebene und der Polarebene des Punktes noch die drei Symmetrieebenen der Fläche zweiten Grades an. Angenommen nun, es sei für die Fläche zweiten Grades eine der durch den Punkt gehenden Normalen gewählt, mit g bezeichnet und die Tangentialebene in ihrem Fusspunkt heisse f, so gehört f der developpablen Fläche dritter Klasse an. Bewegt man jetzt P auf g, so dreht sich die Polarebene von P um eine feste Gerade der Tangentialebene f, nämlich um die konjugierte Gerade g' zu g in bezug auf die Fläche. Zu jedem Punkte P auf g gehört eine developpable Fläche dritter Klasse; ihre Ebenen schneiden die ebenfalls der Fläche angehörige Ebene f in den Tangenten eines Kegelschnittes. Zu diesen Tangenten gehören die konjugierte Gerade g' von g, ferner die Schnittlinien mit den Symmetrieebenen der Fläche zweiten Grades und die Schnittlinie mit der unendlich fernen Ebene. Aber durch diese fünf Tangenten ist der Kegelschnitt bestimmt; er ist eine Parabel k, deren Polarfigur in bezug auf die Fläche zweiten Grades der früher aufgetretene Kegel K ist. Die unendlich vielen Developpablen dritter Klasse, die zu den Punkten von g gehören, enthalten also eine gemeinsame Parabel k. Sie bestimmt mit der Fläche zweiten Grades eine gemeinsam umschriebene Developpable vierter Klasse, welche die Gesamtheit aller Gruppen von fünf Tangentialebenen enthält, so dass die Normalen der Berührungspunkte die gewählte Normale g schneiden. Die in der Tangentialebene f gelegene Parabel k berührt auch die Halbierungslinien der von den reellen oder imaginären Erzeugenden der Fläche zweiten Grades in F gebildeten Winkel.

Legt man von dem Punkt P nach der Fläche zweiten Grades den Tangentenkegel, so besitzt derselbe drei Achsen. Die konjugierte Gerade zu einer derselben in bezug auf die Fläche zweiten Grades liegt in der Ebene der beiden andern Achsen und in der Polarebene des Punktes P in bezug auf die Fläche. Die Stellung der zu einer Kegelachse senkrechten Ebene und die konjugierte Gerade zur Kegelachse in bezug auf die Fläche liegen in einer Ebene; also gehören die drei Symmetrieebenen des Kegels der developpablen Fläche dritter Klasse an, welche zu P gehört und die auch die Symmetrieebenen der Fläche zweiten Grades enthält. Ersetzt man die Fläche durch irgend eine zu ihr konfokale Fläche, so bleiben ihre drei Symmetrieebenen dieselben und auch die drei Symmetrieebenen des neuen Tangentenkegels mit der Spitze P ändern sich nicht; aber diese sechs Ebenen bestimmen die developpable Fläche dritter Klasse. Also gehört zu dem Punkte P dieselbe developpable Fläche dritter Klasse für alle konfokalen Flächen. Die sechs Fusspunkte der Normalen von P nach irgend einer der Flächen liegen jeweilen auf einer Kurve dritter Ordnung, welche durch P, den gemeinsamen Mittelpunkt und die gemeinsamen Achsenrichtungen der konfokalen Flächen hindurch geht; alle Gruppen von sechs Tangentialebenen in den jeweiligen Fusspunkten gehören derselben developpablen Fläche dritter Klasse an. Man wähle jetzt von irgend einer der konfokalen Flächen irgend eine Normale g mit dem Fusspunkt F und der Tangentialebene f, lege P auf g und lasse P auf g sich bewegen. Zu jedem Punkte von g gehört für alle Flächen der konfokalen Schar eine bestimmte developpable Fläche dritter Klasse; dieselbe enthält f und eine ihrer Ebenen geht durch die konjugierte Gerade von g in bezug auf die Fläche, von der g eine Normale ist. Die Ebenen der developpablen Fläche schneiden die Ebene f in den Tangenten einer Parabel; diese Parabel hat auch die eben erwähnte konjugierte Gerade von g und die Schnittlinie von f mit den drei gemeinsamen Symmetrieebenen der konfokalen Flächenschar zu Tangenten. Aber diese vier Tangenten bestimmen die Parabel, d. h. jede der einfach unendlich vielen developpablen Flächen dritter Klasse, die zu den Punkten von g in bezug auf die konfokale Flächenschar gehören, enthält die Parabel. Legt man jetzt zu dieser Parabel und jeder Fläche der konfokalen Schar die gemeinsam umschriebene developpable Fläche vierter Klasse, so haben die Normalen der einzelnen Flächen in den Berührungspunkten der Ebenen die Eigenschaft, die Gerade g zu schneiden.