Der unstetige Vorgang beim Ausströmen der Gase.

Von

A. Fliegner.

(Als Manuskript eingegangen am 6. Oktober 1920.)

Wenn ein vollkommenes Gas vom Zustand p_i, v_i, T_i aus einem Gefäss in einen Raum strömt, wo der Druck auf einer Höhe $p_a < p_i$ erhalten wird, und wenn es während der Bewegung aus dem Innern des Gefässes bis in die Ausflussmündung seinen Zustand nach der Adiabate $pv^\varkappa = const$ ändert, so kann der Druck in der Mündungsebene nicht unter den Betrag

$$p_m = p_i \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

sinken, und man nimmt auch allgemein an, dass er diesen Grenzwert wirklich erreicht, so lange

$$p_a \leqq p_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

bleibt. Dann gelangt das Gas in die Mündungsebene mit dem spezifischen Volumen

$$v_m = v_i \left(\frac{\varkappa + 1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\varkappa-1}\right)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

mit der absoluten Temperatur

$$T_m = \frac{2}{\varkappa + 1} T_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und mit der Geschwindigkeit

$$w_m = \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} R T_i} = \sqrt{\varkappa g R T_m}, \quad . \quad . \quad (5)$$

also mit der Schallgeschwindigkeit für seine dortige Temperatur T_m.

Ausser im Grenzfalle $p_a = p_m$ trifft dann ein solcher Strahl unmittelbar ausserhalb der Mündungsebene einen Druck p_a an, der um einen endlichen Betrag kleiner ist, als sein eigener Druck p_m, und daher muss dort ein unstetiger, nicht umkehrbarer Vorgang auftreten, bei dem das Gas seinen Zustand nicht mehr nach der vorigen Adiabate $pv^\varkappa = const$ ändert. Man kann nun einen solchen nicht umkehrbaren Vorgang ebenfalls rechnerisch verfolgen, wenn auch nicht bis in alle

Einzelheiten, man muss sich nur auf eine gut abgerundete Mündung beschränken, damit die Gasteilchen auf gegenseitig parallelen Bahnen in der Mündungsebene ankommen. Ausserdem will ich die Entwicklungen dadurch vereinfachen, dass ich ihnen eine kreisförmige Mündung vom Halbmesser r zugrunde lege.

Um für eine derartige, nicht umkehrbare Zustandsänderung Formeln herleiten zu können, muss man die Vorgänge, die während einer unendlich kurzen Zeit dt in Wirklichkeit gleichzeitig miteinander ablaufen, in zwei verschiedene, aufeinander folgende Teilvorgänge zerlegen, wovon aber jeder zu seiner Ausbildung dieselbe Zeit dt zur Verfügung haben muss, die der wirkliche Vorgang im ganzen beansprucht.

Als ersten Teilvorgang muss man annehmen, dass das Gas während der Zeit dt zwar ausströmt, dass es aber den Zustand p_m, v_m, T_m, w_m, den es in der Mündungsebene erreicht hatte, noch ungeändert beibehält. Und da es sich dann mit der Geschwindigkeit w_m bewegt, so gelangt der Strahlquerschnitt, der sich am Anfang der Zeit dt in der Mündungsebene befunden hatte, am Ende von dt in einen Abstand

$$w_m\, dt = dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

vor diese Ebene. Es tritt also beim ersten Teilvorgang nur ein Gaszylinder aus, dessen Querschnitt dem Mündungsquerschnitt gleich ist und der die axiale Länge dx erhält. Wenn aber dabei der Druck im ganzen Zylinder dem Mündungsdrucke p_m gleich bleiben soll, so muss man noch voraussetzen, dass der Zylinder ringsum von einer starren, gewichtlosen Hülle umgeben sei.

Um den zweiten Teilvorgang einzuleiten, muss man am Ende des ersten Zeitteilchens dt die Bewegung unterbrochen denken, die Hülle plötzlich entfernen und den äussern Druck p_a während eines zweiten, gleich langen Zeitteilchens dt auf den herausgetretenen, jetzt ruhenden Gaszylinder einwirken lassen. Dadurch sinkt der Druck an der Mantelfläche des Zylinders plötzlich vom Werte p_m auf den endlich kleinern Wert p_a. Diese Druckabnahme dringt dann sofort auch radial in den Gaszylinder ein, und sie gelangt in der Zeit dt vom Umfang aus bis in die unendlich kleine Tiefe dr. Derselbe Vorgang wiederholt sich nun an jedem solchen Gaszylinder, sobald er aus der Mündungsebene ausgetreten ist: der umgebende Druck p_a dringt in der Zeit dt immer vom Umfang aus bis in dieselbe Tiefe dr ein, so dass jedesmal am Ende der Zeit dt ein Ring von anfänglich dem äussern Halbmesser r, von der radialen Breite dr und von der axialen Länge dx unter den Druck p_a gelangt ist. Das gilt also auch für den Gaszylinder, der unmittelbar vor dem jetzt betrachteten ausgeströmt war, und daher kommt vom jetzt untersuchten Zylinder am Anfang des zweiten Teilvorganges nicht nur die ganze äussere Mantelfläche plötzlich unter den Druck p_a, sondern auch von seiner vordern Begrenzungsebene ein äusserer, ringförmiger Streifen von der Breite dr; „vorn" verstanden im Sinne der Bewegung, „hinten" der Bewegung entgegen.

Man muss sich jetzt aus dem ausgetretenen Gaszylinder vom äussern Umfang aus ein Stück herausgeschnitten denken, das dort einen Bogen $rd\varphi$ umspannt und das axial die Länge dx des Zylinders besitzt, sowie radial die Breite dr. Da am Anfang des zweiten Teilvorganges im ganzen Gaszylinder noch der Mündungszustand herrscht, so geht die Masse dieses herausgeschnittenen Stückes durch $rd\varphi\ dx\ dr/g\ v_m$ auszudrücken.

Eine solche unendlich kleine Gasmasse hat nun dem Umfang nach auf beiden Seiten andere Gasteilchen neben sich, die sich im gleichen Zustand befinden, wie sie selbst. Daher herrscht an jeder ihrer Seitenflächen ein Druck, der anfänglich p_m beträgt, der aber während der Zeit dt bis auf den Betrag p_a abnimmt. Und da die beiden Seitenflächen unter dem Winkel $d\varphi$ gegeneinander geneigt sind, so setzen sich die beidseitigen Druckkräfte zu einer radial nach auswärts gerichteten, veränderlichen Kraft $p\ dx\ dr\ d\varphi$ zusammen. Dagegen steht die äussere Mantelfläche der betrachteten Gasmasse, sowie ihre vordere Begrenzungsebene während der ganzen Zeit dt ungeändert unter dem umgebenden Drucke p_a, die innere Mantelfläche und die hintere Begrenzungsebene ebenso unter dem Drucke p_m der Mündungsebene, so dass auf die Gasmasse noch wirken: in axialer Richtung nach vorwärts die Kraft $(p_m - p_a)\ rd\varphi\ dr$, in radialer Richtung nach auswärts die Kraft $(p_m - p_a)\ rd\varphi\ dx$. Gegenüber diesen Kräften ist aber die von den Nachbarteilchen herrührende Kraft $p\ dx\ dr\ d\varphi$ unendlich klein höherer Ordnung. Sie fällt folglich ausser Betracht, und es müssen bloss die beiden andern Kräfte berücksichtigt werden. Diese Kräfte sind nun von der Grössenordnung d^2, während die Gasmasse in die Grössenordnung d^3 gehört. Daher erteilen die Kräfte der Gasmasse unendlich grosse Beschleunigungen, und sie ändern ihre Geschwindigkeiten in der unendlich kurzen Zeit dt um endliche Beträge: sie bringen die axiale Strömungsgeschwindigkeit aus dem Werte w_m auf einen grössern Wert, $= w_x$, und sie fügen eine radial nach auswärts gerichtete Seitengeschwindigkeit, $= w_r$, neu hinzu. Für diesen zweiten Teilvorgang gelten daher nach dem Satze vom Antrieb folgende Beziehungen: in axialer Richtung

$$(p_m - p_a)\, r d\varphi\, dr\, dt = \frac{r d\varphi\, dx\, dr}{g\, v_m}\, (w_x - w_m) \quad . \quad . \quad (7)$$

und in radialer Richtung

$$(p_m - p_a)\, r d\varphi\, dx\, dt = \frac{r\, d\varphi\, dx\, dr}{g\, v_m}\, w_r \, . \quad . \quad . \quad (8)$$

Beachtet man (6), und setzt man noch kurz

$$\frac{dr}{dt} = c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

so kann man (7) und (8) umformen in:

$$g\, (p_m - p_a)\, v_m = w_m\, (w_x - w_m) \text{ und } \quad . \quad . \quad (10)$$
$$g\, (p_m - p_a)\, v_m = c w_r . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Dabei bedeutet die in (9) eingeführte Grösse c die Geschwindigkeit, womit die Druckabnahme radial in den Gasstrahl eindringt. Es ist das also eine Grösse, die wesentlich jener gleicht, die bei den Luftsammelbremsen der Eisenbahnen „Durchschlagsgeschwindigkeit" genannt wird und die dort eine wichtige Rolle spielt.

Die Geschwindigkeiten w_x und w_r stellen sich allerdings in Wirklichkeit nicht an allen Stellen der ganzen unendlich kleinen Gasmasse plötzlich ein, sondern am Anfang des Zeitteilchens dt nur in der äussersten und in der vordersten Schicht. Die übrigen Schichten folgen diesen dagegen erst nacheinander, aber doch so, dass am Ende der Zeit dt die ganze Gasmasse die Seitengeschwindigkeiten w_x und w_r angenommen hat. Daher bewegt sie sich schliesslich mit der Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{w^2_x + w^2_r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und unter einem Winkel δ mit der Strahlachse, der sich berechnet aus

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{w_r}{w_x} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Beim unstetigen Vorgang nimmt auch das spezifische Volumen der unendlich kleinen Gasmasse zu. Denn ihre vordere Endfläche legt während der Zeit dt im ganzen von der Mündungsebene aus den Weg $w_x\, dt$ zurück. Die hintere Endfläche gelangt dagegen gleichzeitig mit der Geschwindigkeit w_m von weiter innen her nur bis in die Mündungsebene. Daher wächst die axiale Länge der Gasmasse von dx auf $w_x\, dt$. Und in radialer Richtung bewegt sich die äussere Mantelfläche um $w_r\, dt$ nach auswärts, während die innere ihren Abstand dr von der Mündungskante ungeändert beibehält, so dass die radiale Breite der Gasmasse von dr auf $dr + w_r dt$ zunimmt. Hiernach ergibt sich für das

Verhältnis des Endvolumens v gegenüber dem Anfangsvolumen v_m unmittelbar der Ausdruck:

$$\frac{v}{v_m}=\frac{rd\varphi\, w_x\, dt\,(dr+w_r\, dt)}{r\, d\varphi\, dx\, dr} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Darin hebt sich $rd\varphi$ weg. Nimmt man ferner das dx aus dem Nenner zu dem Faktor dt, der im Zähler vor der Klammer steht, dividiert man noch mit dr in diese Klammer, und führt man endlich die kürzern Bezeichnungen aus (6) und (9) ein, so kann man das Volumenverhältnis einfacher darstellen durch:

$$\frac{v}{v_m}=\frac{w_x}{w_m}\left(1+\frac{w_r}{c}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Zwischen den verschiedenen Grössen besteht nun noch eine Beziehung, die man aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik herleiten muss. Da der betrachtete Vorgang wirklich plötzlich abläuft, so ist keine Zeit für einen Wärmeaustausch mit der Umgebung vorhanden, und man muss folglich $\int dQ=0$ setzen. Dagegen ändert sich beim unstetigen Vorgang: die Molekularenergie aus dem Anfangswerte $p_m\, v_m/(\varkappa-1)$ in den endlich davon verschiedenen Endwert $p_a\, v/(\varkappa-1)$, die Strömungsenergie ebenso aus $w^2_m/2g$ in $w^2/2g$, und da sich das Gas hier fortschreitend bewegt, so muss man die äussere Arbeit als $\int d\,(pv)$ einführen, also $=p_a v-p_m v_m$. Andere Einwirkungen sind nicht vorhanden, oder sie gehen, wie die Schwerkraft, zu vernachlässigen, und daher nimmt die integrierte erste Hauptgleichung die Gestalt an:

$$\int dQ=\frac{p_a\, v-p_m\, v_m}{\varkappa-1}+\frac{w^2-w^2_m}{2g}+p_a v-p_m v_m=0 \quad . \quad . \quad (16)$$

Ist nun der Zustand des Gases im Innern des Ausflussgefässes mit p_i, v_i, T_i und $w_i=0$ gegeben, so sind durch die Gleichungen (1) und (3) bis (5) die Zustandsgrössen in der Mündungsebene mit bestimmt, also namentlich die Werte von p_m, v_m und w_m. Ebenso muss der äussere Druck p_a bekannt sein. Dann bleiben als Unbekannte die sechs Grössen w_x, w_r, w, δ, c und v übrig, und da man dafür die sechs voneinander unabhängigen Gleichungen (10) bis (13), (15) und (16) aufstellen konnte, so ist man imstande, alle Unbekannten zu berechnen.

Am einfachsten findet man aus (10):

$$w_x=w_m+\frac{p_m-p_a}{w_m}\, g v_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Um die übrigen Grössen zu erhalten, muss man aus (11) und (12) c und w durch w_r ausdrücken, diese Werte in (15), sowie daraus $v=f(w_x, w_r)$ in (16) einsetzen und schliesslich noch umformen. Dann kann man die Gleichung (16) in die Gestalt bringen:

$$\left[1+\frac{2\varkappa\, w_x\, p_a}{(\varkappa-1)\, w_m\, (p_m-p_a)}\right] w^2_r = 2g\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(p_m-\frac{w_x}{w_m}p_a\right)v_m+w^2_m-w^2_x. \quad (18)$$

Und da man w_x aus (17) kennt, so erhält man aus (18) w_r, damit aus (11) c, aus (12) w, aus (13) δ und endlich aus (15) v.

Die Ausdrücke für w_r, c und v sind nun so gebaut, dass sie nicht unmittelbar erkennen lassen, wie diese Grössen verlaufen. Man muss daher ein Zahlenbeispiel durchrechnen. Dazu habe ich im Innern des Ausflussgefässes immer denselben Zustand beibehalten und zwar $p_i = 10\, kg/cm^2$, $T_i = 18^0$ C. Dann gelten auch für die Mündungsebene immer dieselben Werte, nämlich $p_m = 5{,}2828\, kg/cm^2$, $v_m = 0{,}13436\, m^3/kg$ und $w_m = 312{,}22\, m/Skd$. Dagegen musste ich dem äussern Drucke p_a nacheinander verschiedene Werte geben, nur immer kleinere, als p_m, damit überhaupt ein unstetiger, nicht umkehrbarer Vorgang auftrat. Um aber dabei die gebrochenen Potenzen leichter berechnen zu können, habe ich $\varkappa \backsim 1{,}4$ angenommen. Die Ergebnisse der Rechnung sind in der Zahlentafel auf Seite 77 zusammengestellt.

Diese Zahlentafel bestätigt zunächst das, was sich schon unmittelbar aus der einfacher gebauten Gleichung (17) erkennen lässt, dass nämlich die axiale Seitengeschwindigkeit w_x mit abnehmendem Drucke p_a linear zunimmt. Die radiale Seitengeschwindigkeit w_r bleibt dagegen bei geringen Druckunterschieden p_m-p_a sehr klein, später wächst sie aber immer rascher, und bei ganz kleinen Aussenpressungen wird sie sogar etwas grösser, als w_x. Das hat dann zur Folge, dass die ganze Geschwindigkeit w anfänglich ziemlich gleichförmig zunimmt, wie w_x, später dagegen immer rascher, wie w_r. Mit w_r bleibt auch der Winkel δ anfänglich sehr klein, er wächst aber ebenfalls immer rascher, und schliesslich überschreitet er den Wert von 45^0, wenn auch nur wenig.

Das letzte Ergebnis geht nun mit Beobachtungen zu vergleichen. Dazu will ich zwei der Versuche heranziehen, die Robert Emden in seiner Habilitationsschrift über „Die Ausströmungserscheinungen permanenter Gase" veröffentlicht hat. Als Mündung diente ihm ein Ansatzrohr, bei dem die Gasteilchen genügend genau mit gegenseitig parallelen Bahnen durch die Mündungsebene geströmt sind. Er hat dann auf seiner Taf. I die Schlierenbilder von einigen dieser Strahlen beigefügt, allerdings in ziemlich kleinem Maßstab, ich konnte aber daran doch den Winkel δ, wenigstens angenähert, nachmessen. Dabei habe ich gefunden für den Strahl der dortigen

Fig. 8 mit $p_i = 6$ und $p_a = 1 : \delta \backsim 19^0$
Fig. 15 mit $p_i = 6{,}6$ und $p_a \backsim 0{,}41 : \delta \backsim 30^0$ bis 35^0.

Zahlentafel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_a	w_x	w_r	w	δ	c	v	$p_a v^{\varkappa}$	v_a	w_a
p_m	312,22	0	312,22	0	(∞)	0,13436	3180,0	0,13436	312,22
5,27	312,76	0,03	312,76	17″	6635,17	0,13459	3180,0	0,13459	312,76
5,2	315,71	0,41	315,71	4′ 26″	2688,32	0,13588	3180,0	0,13588	315,71
5,1	319,94	1,33	319,94	14′ 19″	1807,59	0,13778	3180,0	0,13778	319,94
5,0	324,16	2,57	324,17	27′ 15″	1450,36	0,13974	3179,9	0,13974	324,16
4,5	345,26	12,00	345,47	59′ 27″	859,77	0,15065	3179,6	0,15066	345,41
4,0	366,37	25,71	367,27	4° 0′ 53″	657,55	0,16382	3178,3	0,16389	367,04
3,5	387,48	43,45	389,91	6° 23′ 53″	540,81	0,18014	3176,3	0,18029	389,32
3,0	408,59	65,37	413,78	9° 5′ 24″	460,25	0,20080	3169,5	0,20127	412,60
2,5	429,69	92,61	439,56	12° 9′ 45″	396,05	0,22814	3158,2	0,22927	437,36
2,0	450,80	126,88	468,32	15° 43′ 12″	341,01	0,26675	3134,6	0,26888	464,32
1,5	471,91	171,61	502,14	19° 59′ 2″	290,53	0,32303	3083,4	0,33022	494,71
1,0	493,02	234,03	545,74	25° 23′ 36″	241,20	0,41801	2948,9	0,44115	530,98
0,8	501,46	267,17	568,19	28° 2′ 54″	221,15	0,47649	2833,8	0,51738	548,32
0,6	509,90	308,43	595,93	31° 10′ 9″	200,11	0,55762	2648,7	0,63540	568,40
0,4	518,35	361,38	631,89	34° 53′ 1″	178,08	0,67570	2310,6	0,84885	593,05
0,3	522,57	394,55	654,79	37° 3′ 13″	166,45	0,75790	2035,1	1,0425	608,37
0,2	526,79	434,28	682,72	39° 30′ 0″	154,26	0,86486	1632,1	1,3927	627,38
0,1	531,01	483,29	718,01	42° 18′ 22″	141,35	1,04663	1665,9	2,2849	654,20
0,01	534,81	539,14	759,40	45° 13′ 51″	128,90	1,12971	128,0	11,8347	709,66
0	535,23	546,27	764,776	45° 35′ 5″	127,46	1,27142	0	∞	764,774

Berechnet man die Werte von δ aus den hier entwickelten Gleichungen, aber auch mit $\varkappa = 1{,}4$, so erhält man für den Strahl der Fig. 8: $\delta = 18^0\ 27'\ 50''$, für den Strahl der Fig. 15: $\delta = 30^0\ 13'\ 30''$, also Werte, die mit den beobachteten ganz befriedigend übereinstimmen.

Einen eigentümlichen Verlauf zeigt in der Zahlentafel die radiale Durchschlagsgeschwindigkeit c. Für die Luftsammelbremsen der Eisenbahnen haben Beobachtungen und Rechnungen übereinstimmend ergeben, dass die Durchschlagsgeschwindigkeit bei Überdruckbremsen immer kleiner bleibt, als die Schallgeschwindigkeit, dass sie diese dagegen bei Saugbremsen gewöhnlich überschreitet[1]). Dabei gilt die Schallgeschwindigkeit für den Zustand, worin sich die Luft in der Bremsleitung vor dem Beginne der Bremsung befunden hatte. Beim Ausströmen dringt nun eine Druckabnahme in eine Gasmasse von höherm Drucke ein, und man sollte hiernach eigentlich erwarten, dass das mit einer Geschwindigkeit geschehe, die kleiner bleibt, als die für den Mündungszustand geltende Schallgeschwindigkeit. Diese Erwartung bestätigt sich jedoch nicht. Denn der unstetige Vorgang beginnt ununterbrochen unmittelbar ausserhalb der Mündungsebene, und das beweist zunächst, dass sich die Druckabnahme in der Bewegungsrichtung des Gasstromes diesem entgegen genau mit dessen Austrittsgeschwindigkeit w_m, also genau mit der Schallgeschwindigkeit, nach rückwärts zu fortpflanzt. Ausserdem dringt aber die Druckabnahme mit der Geschwindigkeit c radial nach einwärts in den Strahl ein, so dass die ganze, schräg nach rückwärts und einwärts gerichtete Durchschlagsgeschwindigkeit, nämlich $\sqrt{w^2_m + c^2}$, für alle Pressungen grösser ist, als die Schallgeschwindigkeit. Dabei deutet die Zahlentafel darauf hin, dass c, und daher auch $\sqrt{w^2_m + c^2}$, für den Grenzfall $p_a = p_m$ unendlich gross werden. Und das liess sich auch von vornherein erwarten. Denn dann kommt der ganze Strahlquerschnitt schon mit dem Drucke $p_m = p_a$ in der Mündungsebene an, was so aufzufassen geht, dass sich der Druck mit dem umgebenden Druck im ganzen Strahlquerschnitt in der Zeit Null ausgleicht, also mit unendlich grosser Geschwindigkeit. Wächst der Überdruck $p_m - p_a$ vom Nullwerte aus, so nimmt die radiale Durchschlagsgeschwindigkeit ununterbrochen ab, anfangs sehr rasch, später immer langsamer, und sie sinkt schliesslich im andern Grenzfalle, für $p_a = 0$, unter die Hälfte der Schallgeschwindigkeit. Hiernach folgt die Durchschlagsgeschwindigkeit in einem mit der Schallgeschwindigkeit strömenden Gase ganz

---

[1]) S. z. B. Schweiz. Bauztg., Bd. 59, 1912, S. 160 und Fortstzgn., wo sich auch noch andere Quellen angegeben finden.

andern Gesetzen, als in der vorher ruhenden Luft der Bremsleitungen.

Die Zahlentafel zeigt ferner, dass das spezifische Volumen v des Gases mit abnehmendem Werte von p_a immer rascher wächst, dass es aber auch für $p_a = 0$ doch nur den endlichen Grenzwert $lim\ v = 1{,}27142\ m^3/kg$ erreicht. Der für den unstetigen Vorgang verfügbare Überdruck $p_m - p_a$ bleibt eben auch im Grenzfalle $p_a = 0$ endlich, und er kann daher dem Gase auch nur endliche Geschwindigkeiten erteilen, so dass sich die Gasteilchen in der unendlich kurzen Zeit dt auch nur unendlich wenig von der Mündungsebene entfernen können. Wesentlich ebenso verhält sich das spezifische Volumen bei den Luftsammelbremsen. Gilt der Zeiger $_i$ für den Zustand, worin sich die ruhende Luft in der Leitung befindet, ehe die Bremsung beginnt, so hatte sich dort für das Volumverhältnis der Ausdruck

$$\frac{v}{v_i} = \frac{(\varkappa+1)p_i + (\varkappa-1)p_a}{(\varkappa-1)p_i + (\varkappa+1)p_a} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

ergeben, der für $p_a = 0$ auf den ebenfalls endlichen Grenzwert

$$lim\ \frac{v}{v_i} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \backsim 6 \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

führt. Aus der Zahlentafel folgt dagegen $lim\,(v/v_m) \backsim 9{,}4$. Das strömende Gas dehnt sich also verhältnismässig stärker aus, als das vorher ruhende.

Wenn schliesslich beim Ausströmen v immer und p_a im allgemeinen ebenfalls endlich bleiben, so ist das auch mit der Temperatur der Fall. Nur an der untern Grenze $p_a = 0$ sinkt diese auf den absoluten Nullpunkt.

Berücksichtigt man den unstetigen Vorgang nicht, und nimmt man an, das Gas ändere seinen Zustand vom Innern des Ausflussgefässes bis beliebig weit ausserhalb der Mündungsebene stetig nach derselben Adiabate $pv^\varkappa = const$, so erhält man an jenen Stellen des Strahles, wo der Druck auf einen Wert p_a gesunken ist, für die übrigen Zustandsgrössen die Ausdrücke

$$v_a = v_i \left(\frac{p_i}{p_a}\right)^{\left(\frac{1}{\varkappa}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$T_a = T_i \left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\right)} \quad \text{und} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$w_a = \sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa-1}RT_i\left[1-\left(\frac{p_a}{p_i}\right)^{\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\right)}\right]} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Um diese Grössen mit den vorigen vergleichen zu können, habe ich sie ebenfalls mit $\varkappa = 1{,}4$ berechnet und die Werte von v_a und w_a in den beiden letzten Spalten der Zahlentafel hinzugefügt. Die beiden Spalten 7 und 9 zeigen nun zunächst, dass immer $v_a > v$ ist, nur bleibt der Unterschied für die grössern Werte von p_a so klein, dass er in den ersten fünf geltenden Stellen noch nicht zur Erscheinung kommt. Nimmt aber p_a weiter ab, so wächst der Unterschied immer rascher, und an der untern Grenze, also für $p_a = 0$, wird sogar $v_a = \infty$, während v dort einen ziemlich kleinen, endlichen Wert beibehält. Allerdings könnte v_a erst nach unendlich langer Zeit und in unendlich grosser Entfernung von der Mündung unendlich gross werden. v erreicht dagegen seinen endlichen Grenzwert sofort und unmittelbar vor der Mündungsebene.

Da ferner für beide Werte des spezifischen Volumens der Druck jedesmal dieselbe Grösse besitzt, so folgt aus diesem Verhalten von v_a gegenüber v, dass auch ununterbrochen von den beiden Temperaturen $T_a > T$ bleibt. Nur im Grenzfalle $p_a = 0$ sinken beide Temperaturen übereinstimmend auf den absoluten Nullpunkt.

Wenn hiernach von der Energie, die das Gas im Innern des Ausflussgefässes enthielt, beim stetigen, adiabatischen Ausströmen ein grösserer Teil in Form von kinetischer Molekularenergie im Gase zurückbleibt, als beim unstetigen, nicht umkehrbaren Vorgang, so kann die Strömungsenergie im ersten Falle nicht so hoch ansteigen, wie im zweiten. Und das bestätigt die Zahlentafel auch: es bleibt immer $w_a < w$, nur zeigt sich der Unterschied bei den grössern Werten von p_a ebenfalls noch nicht in den fünf ersten geltenden Stellen. An der Grenze $p_a = 0$ muss dagegen genau $w_a = w$ werden, weil dort $T_a = T = 0$ ist. Diese beiden Werte unterscheiden sich in der Zahlentafel allerdings um zwei Einheiten der sechsten geltenden Stelle. Da ich aber die Rechnung nur mit siebenstelligen Logarithmen durchgeführt habe, so ist die sechste Stelle schon an sich nicht mehr ganz sicher, und sie wird bei w noch dadurch unsicherer, dass w nur auf einem ziemlichen Umwege zu bestimmen geht.

Sollte man eingehender untersuchen, wie sich das ausgeströmte Gas im weitern Verlaufe seiner Bewegung verhält, so folgt aus den letzten Ergebnissen, dass es höchstens bei ganz geringen Druckunterschieden zulässig wäre, anzunehmen, sein Zustand ändere sich vom Innern des Ausflussgefässes bis beliebig weit über die Mündungsebene hinaus stetig nach derselben Adiabate $pv^{\varkappa} = const.$ Ist dagegen der Druckunterschied grösser, so sollte man unbedingt den unstetigen Vorgang berücksichtigen und v nach der Gleichung

(15) berechnen. Sobald aber der unstetige Vorgang abgelaufen ist, ändert sich der Zustand des Gases gegenüber seiner fortschreitenden Bewegung jedenfalls wieder angenähert nach einer Adiabate $pv^\varkappa = const$, nur muss die Konstante jetzt einen andern Zahlenwert erhalten, als sie vorher, vom Innern des Gefässes bis zur Mündungsebene, besessen hatte. Und da für dasselbe p_a immer $v < v_a$ bleibt, so wird die neue Konstante kleiner, als die vorige war. Die 8. Spalte der Zahlentafel zeigt auch, dass der Wert von $p_a v^\varkappa$ zwar bei den grössern Werten von p_a noch nicht merkbar abnimmt, dass er aber später immer rascher sinkt und dass er schliesslich sogar mit p_a den Wert Null erreicht. Bei dem hier untersuchten unstetigen Vorgang springt also der Zustandspunkt auf eine andere, weiter innen liegende Adiabate über. Daher nimmt die Entropie dabei ab, während sie bei einer stetig verlaufenden Zustandsänderung ungeändert bliebe.

Den unstetigen Vorgang habe ich zwar unmittelbar nur an einer nach drei Richtungen unendlich kleinen Gasmasse untersucht. Weil aber alle Randteilchen des ganzen, in der Zeit dt ausgeströmten Gaszylinders unter denselben Krafteinwirkungen stehen, wie das betrachtete Teilchen, so gelten die gefundenen Ergebnisse ohne weiteres auch für den ganzen Gasring, der die axiale Länge dx besitzt und vom Umfang aus nach einwärts zu die radiale Dicke dr. Alle Teilchen dieses Ringes bewegen sich unmittelbar nach dem unstetigen Vorgang mit derselben Geschwindigkeit w und unter demselben Winkel δ mit der Strahlachse, sie bleiben also anfänglich auf einer geraden Kreiskegelfläche, die durch die Mündungskante geht und die an der Spitze einen Winkel 2δ besitzt.

Von diesem äussersten Ringe aus dringt dann die Druckabnahme sofort weiter in das Innere des Strahles ein, nur ist noch nicht bekannt, nach welchem Gesetze das geschieht. Doch lassen sich für dieses Gesetz zwei Grenzen angeben. Der eine Grenzfall wäre der, dass am Ende des unstetigen Vorganges der Druck wirklich im ganzen äussersten Ringe genau auf den umgebenden Druck p_a gesunken wäre. Dann lägen für den nächstbenachbarten innern, unendlich dünnen Gasring wieder genau dieselben Verhältnisse vor, wie für den äussersten, und daher müsste sich am zweiten Ringe der ganze vorige Vorgang genau wiederholen, nur begönne er nicht mehr in der Mündungsebene, sondern im Abstande dx davor. Das ginge dann so weiter, bis der Druck p_a schliesslich in einem endlichen Abstand vor der Mündungsebene an der Strahlachse angelangt wäre. In diesem Grenzfalle hätte der Druckunterschied an allen Ringen denselben Wert $p_m - p_a$, und daher erhielte auch die radiale Durchschlagsgeschwindigkeit überall dieselbe Grösse c. Dann müsste also die Unstetigkeit gleichförmig in den Strahl eindringen und an seiner Achse nach einer endlichen Zeit t ankommen, die aus $r = ct$ zu berechnen ginge. Und weil sich die innersten Gasteilchen bis zu diesem Treffpunkte noch ungeändert mit der in der Mündungsebene erreichten Geschwindigkeit w_m bewegten, so läge der Treffpunkt in einem Abstand e vor dieser Ebene, der gleich wäre $w_m t$, oder

$$e = \frac{w_m}{c} r. \qquad (24)$$

Wie die Zahlentafel erkennen lässt, bliebe dieser Abstand bei den grössern Werten von p_a ziemlich klein. Er würde aber immer grösser, je kleiner p_a wäre, und weil schliesslich c unter die Hälfte von w_m sinkt, so erreichte e eine Länge, die etwas grösser wäre, als der Durchmesser der Mündung. Dabei ergäbe sich als Unstetigkeitsfläche, d. h. als die Fläche, worauf sich der unstetige Vorgang abspielt, eine gerade Kreiskegelfläche, die durch die Mündungskante ginge und deren Spitze auf der Strahlachse im Abstand e vor der Mündungsebene läge.

Wenn der äussere Druck wirklich in dieser Weise in den Strahl eindränge, so erhielten die Gasteilchen durch den unstetigen Vorgang im ganzen Strahlquerschnitt überall dieselbe Geschwindigkeit w und ihre Bahnen dieselbe Neigung δ gegen die Strahlachse. Dann müssten sich alle jene Gasteilchen, die vorher demselben Ringe angehört hatten, anfänglich je auf geraden Kreiskegelflächen weiter bewegen, die sämtlich die Strahlachse zur Achse hätten und die an der Spitze den Winkel 2δ besässen, die also unter sich kongruent wären, und wovon jede folgende ganz innerhalb der vorhergehenden läge. Dabei behielten in jedem Meridianschnitt die Gasteilchen je zweier benachbarten Kegelflächen ihren gegenseitigen Abstand ungeändert bei. Dagegen entfernten sich die je auf derselben Kegelfläche strömenden Gasteilchen immer weiter voneinander, so dass der Druck im weitern Verlaufe der Bewegung doch abnähme. Nun ist es in Wirklichkeit unmöglich, genau $p_a = 0$ herzustellen. Daher müsste der Druck im Strahle bald unter den umgebenden Druck p_a sinken, und das hätte zur Folge, dass die Gasteilchen wieder nach einwärts zu abgelenkt würden, dass sie sich einander wieder näherten, und dass daher der Druck wieder anstiege, die Geschwindigkeit dagegen abnähme: im Strahle müssten sich folglich die bekannten Wellen ausbilden. Dazu käme aber noch, dass sich auch die Gasteilchen des innersten Ringes, der die Strahlachse unmittelbar umgibt, anfänglich auf einer Kreiskegelfläche von ebenfalls dem Winkel 2δ an der Spitze weiter bewegten, so dass im Strahle vor der Spitze der Unstetigkeitsfläche ein Hohlraum entstände. Dadurch könnte vielleicht ein neuer unstetiger Vorgang eingeleitet werden, nur pflanzte er sich von innen nach aussen zu fort. Jedenfalls müsste aber ein solcher Hohlraum die Ausbildung der ersten Welle beschleunigen. Könnte dagegen der Strahl in einen unendlich grossen Raum ausströmen, worin genau der Druck $p_a = 0$ herrschte, so wären keine Kräfte vorhanden, die die Gasteilchen einander wieder näherten. Dann sollte man erwarten, dass keine Wellen entständen, dass sich vielmehr das ausgeströmte Gas kegelförmig immer weiter ausbreitete, bis etwa Gravitationskräfte dem ein Ziel setzten.

Es erscheint aber doch fraglich, ob der äussere Druck p_a wirklich unmittelbar durch den unstetigen Vorgang bis an die Strahlachse fortgepflanzt wird. Denn da sich jeder Bewegung sofort auch Bewegungswiderstände entgegenstellen, so sinkt wahrscheinlich der Druck schon an der innern Mantelfläche des äussersten Ringes in der Zeit dt nicht genau auf p_a, sondern er bleibt dort noch etwas grösser, wenn auch nur um unendlich wenig. Ein solcher unendlich kleiner Unterschied verschwände allerdings neben dem doch endlichen Werte von p_a, so dass die ganze vorige Formelentwicklung auch unter dieser Voraussetzung ihre Geltung ungeändert beibehielte. Dagegen begönne dann der unstetige Vorgang am nächstbenachbarten innern Ringe unter einem Überdrucke, der unendlich wenig kleiner wäre, als $p_m - p_a$, und man müsste folgerichtig erwarten, dass dieser Überdruck immer weiter abnähme, je mehr sich die Unstetigkeit der Strahlachse näherte. Wird aber der Überdruck kleiner, so wächst die radiale Durchschlagsgeschwindigkeit c. Daher müsste sich der unstetige Vorgang jetzt beschleunigt nach innen zu fortpflanzen und die Strahlachse schon in einem Abstand e' vor der Mündungsebene erreichen, der kleiner wäre, als e aus (24). Dann ginge die Unstetigkeitsfläche bei fortgesetzter Annäherung an die Strahlachse in einen immer stumpfer werdenden, geraden Kreiskegel über. Hinter dieser Fläche herrschte wieder überall noch der Mündungsdruck p_m, vor ihr wäre dagegen der Druck an der Mündungskante auf den Wert p_a gesunken, von dort wüchse er aber nach dem Strahlinnern zu stetig, und er erreichte in der Spitze der Fläche einen grössten Wert, der der Natur der Sache nach zwischen p_a und p_m liegen müsste. Dabei bewegten sich die Gasteilchen der einzelnen Ringe ausserhalb der Unstetigkeitsfläche anfänglich mit verschiedenen Geschwindigkeiten w und auf Kegelflächen von verschiedenen Winkeln 2δ an der Spitze, doch so, dass w und δ nach innen zu stetig abnähmen. Daher entfernten sich jetzt auch die Gasteilchen je zweier benachbarten Ringe weiterhin immer mehr voneinander, so dass der Druck im Strahle wieder schliesslich unter

p_a sinken, der Strahl folglich auch in diesem Falle Wellen zeigen müsste. Und weil der Winkel δ an der Strahlachse im allgemeinsten Falle immer noch endlich bliebe, so müsste sich dort ebenfalls ein Hohlraum ausbilden.

Dränge jedoch die Druckabnahme so in den Strahl ein, dass die Unstetigkeit gerade ohne Überdruck an der Strahlachse ankäme, so träte dort kein unstetiger Vorgang mehr auf. Dann krümmte sich die Unstetigkeitsfläche überall vollkommen stetig, ähnlich einem Rotationsparaboloid, und die längs der Strahlachse hinströmenden Gasteilchen änderten anfänglich weder ihre Richtung noch ihre Geschwindigkeit w_m. Endlich wäre vielleicht noch denkbar, und das ergäbe dann den andern Grenzfall, dass der Druckunterschied schon in einem endlichen Abstand von der Strahlachse auf Null gesunken wäre, so dass die Unstetigkeit gar nicht bis an die Strahlachse gelangte. Dann nähme die Unstetigkeitsfläche die Gestalt einer im Scheitel offenen Kuppel an, und der Strahl erhielte einen Kern von endlichem Querschnitt, worin sich alle Gasteilchen anfänglich unter dem Drucke p_m und mit der Geschwindigkeit w_m parallel zur Strahlachse weiter bewegten. In den beiden letzten Fällen könnte sich im Innern des Strahles kein Hohlraum bilden. Daher entfernten sich die Gasteilchen im ganzen Strahle nur allmählich voneinander, und der Druck änderte sich weiterhin überall durchaus stetig. Er sänke aber doch wieder schliesslich einmal unter den umgebenden Druck, so dass sich auch jetzt im Strahle Wellen ausbilden müssten.

Ausser im ersten, weniger wahrscheinlichen Grenzfalle befänden sich die Gasteilchen der verschiedenen Ringe nach dem unstetigen Vorgang in gegenseitig verschiedenen Zuständen. Liesse man dann für den weitern Verlauf der Bewegung wieder die Annahme zu, dass sich der Zustand des Gases adiabatisch ändert, so müsste man für jeden Ring eine besondere Adiabate einführen, die sich um so weniger von der im Innern des Ausflussgefässes geltenden entfernte, unter einem je kleinern Überdruck der unstetige Vorgang abgelaufen wäre, je näher sich also der Ring an der Strahlachse befunden hätte.

Welche Gestalt aber die Unstetigkeitsfläche wirklich besitzt, und wie sich der Druck und die übrigen Zustandsgrössen nach dem unstetigen Vorgang darüber verteilen, ist noch nicht bekannt, und daher ist es auch noch nicht möglich, auf diesem Wege genauer festzustellen, wie sich der Strahl weiterhin verhält.

Die vorhin entwickelten Formeln gelten auch angenähert für Dämpfe, man muss nur dem Exponenten $\varkappa$ einen andern Zahlenwert geben und RT durch pv ersetzen. Wenn daher ein Dampf unter einem genügend grossen Überdrucke aus einer gut abgerundeten Mündung ausströmt, so tritt ebenfalls ein unstetiger Vorgang auf, der zur Folge hat, dass sich im Strahle Wellen ausbilden, mit grössern Geschwindigkeiten in den Bäuchen, mit kleinern in den Knoten. Und das veranlasst mich noch zu einer Bemerkung über die divergenten Düsen, mit denen man nach Laval gewissen Turbinen den Dampf zugeleitet hat. Diese Düsen sollten die Austrittsgeschwindigkeit des Dampfes weit über die Geschwindigkeit w_m steigern, die in einer gut abgerundeten Mündung erreicht wird, und die sich auch im engsten Querschnitt einer divergenten Düse einstellt.

Damit eine solche Düse überhaupt wirkt, muss ihr Divergenzwinkel kleiner bleiben, als der Winkel, womit der Strahl beim selben Aussendrucke aus einer gut abgerundeten Mündung austräte. Ob man dabei die Wandungen der Düse so allmählich aus der engsten, zylindrischen Stelle in den divergenten Teil überführen kann, dass sich der Zustand des Dampfes dort vollkommen stetig ändert, erscheint mir nach meinen frühern Versuchen mit allerdings bedeutend längern Düsen fraglich. Wenn es aber doch möglich wäre, so erreichten die spätern Geschwindigkeiten im Strahle nur die kleinern Werte der Gleichung (23). Wahrscheinlich tritt aber am Anfang der Düse ebenfalls ein unstetiger Vorgang auf, der die Geschwindigkeiten etwas vergrössert. Weil sich jedoch die Dampfteilchen in der Düse nicht so stark divergent bewegen können, wie in einem freien Strahle, so muss sich an der Düsenwand ein Druck ausbilden, der entsprechend grösser ist, als der äussere Druck p_a. Dann verläuft der unstetige Vorgang am Anfang der Düse unter einem kleinern Druckunterschiede, als an einem freien Strahle, und daher müssen die Geschwindigkeiten hier doch kleiner bleiben als dort.

Dazu kommt noch, dass die erste Welle durch die Düse verhindert wird, sich in natürlicher Weise auszubilden. Jede Störung eines natürlichen Vorganges verursacht aber Widerstände, und man muss daher erwarten, dass von der im ganzen verfügbaren Energie ein grösserer Teil in kinetische Molekularenergie übergeht, so dass die Strömungsenergie nur entsprechend weniger ansteigen kann. Aus diesen Gründen müssen die Geschwindigkeiten in einer Lavalschen Düse unbedingt kleiner bleiben, als im ersten Bauche eines Strahles, der aus einer gut abgerundeten Mündung ausgeströmt ist, wenn es auch vielleicht schwierig sein dürfte, den Betrag des Unterschiedes durch Versuche sicher nachzuweisen.

Hiernach sollte man aber doch meinen, dass es richtiger wäre, solchen Turbinen den Dampf durch eine gut abgerundete Mündung zuzuführen, dagegen nicht durch eine Lavalsche Düse. Ich weiss nun nicht, ob überhaupt Versuche mit gut abgerundeten Mündungen durchgeführt worden sind, oder ob man nur zur Düse gegriffen hat, weil es damals noch nicht bekannt war, dass sich bei einer gut abgerundeten Mündung im Strahle Wellen bilden, in deren Bäuchen die Geschwindigkeiten weit über die Ausströmungsgeschwindigkeit w_m ansteigen. Sind aber gut abgerundete Mündungen wirklich untersucht worden, und haben sie nicht befriedigt, so kann der Grund davon vielleicht darin liegen, dass sie der Turbine zu nahe gestanden haben, so dass die Unstetigkeitsfläche in die Turbine hineingeragt hat, dass also der Dampfstrahl schon an der Turbine angelangt war, ehe sich im ersten Bauche die grossen Geschwindigkeiten richtig hatten ausbilden können. Es wäre aber auch möglich, dass man eine gut abgerundete Mündung zwar weiter weggelegt hat, dass jedoch beim benutzten Drucke die Wellen noch zu kurz waren, und da der Strahl immer unter einem ziemlich spitzen Winkel an der Turbine ankommt, dass gleichzeitig mehrere Wellen die Schaufeln getroffen haben, so dass die grössern Geschwindigkeiten nicht ungestört allein wirken konnten. Endlich wäre es auch möglich, dass ein Dampfstrahl stärker zersplittert, wenn er auf einer längern Strecke durchs Freie strömen muss. Darauf deuten wenigstens Schlierenbilder von Dampfstrahlen, die Paul Emden in seiner Inaugural-Dissertation über „Die Ausströmungserscheinungen des Wasserdampfes" veröffentlicht hat: der eigentliche Strahl ist oft mit einer Dunsthülle umgeben, die sich kegelförmig ziemlich stark erweitert.

Dem gegenüber zwingt eine divergente Düse den Dampfstrahl, die Turbine mit einer richtigen Stelle seiner Ausbildung zu treffen, nämlich mit seinem ersten Bauche. Und da die erste Welle, verglichen mit einem freien Strahle, durch die Düse nicht unbedeutend verlängert wird, so erstreckt sich wahrscheinlich auch das Gebiet der grössern Geschwindigkeiten über ein längeres Stück des Strahles, so dass nur grössere Geschwindigkeiten auf die Turbine einwirken, trotzdem, dass der Strahl sehr schräg auftrifft. Endlich hält eine Düse den Strahl jedenfalls besser zusammen.

Sind also gut abgerundete Mündungen überhaupt untersucht worden, und haben sie schlechtere Ergebnisse geliefert, als die Lavalschen Düsen, so wäre der Grund davon in den zuletzt erörterten Verhältnissen zu suchen, dagegen keinesfalls darin, dass die Düsen imstande sein sollten, die Geschwindigkeiten im Dampfstrahle irgendwie zu vergrössern.