Über Kreise und Kegelschnitte.

Von

A. KIEFER (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 30. Dezember 1919.)

Zwei Kreise mit den Mittelpunkten A, B mögen die Radien R, r und die Zentrale $AB = c$ haben. Dann sind die Lote von der Mitte M der Strecke AB auf eine äussere, beziehungsweise auf eine innere gemeinsame Tangente der zwei Kreise

$$1.\quad a = \frac{R+r}{2}, \qquad 2.\quad a' = \frac{R-r}{2}.$$

Die Stücke einer äussern, beziehungsweise innern gemeinsamen Tangente zwischen den Berührungspunkten messen

$$3.\quad t^2 = c^2 - (R-r)^2, \qquad 4.\quad t'^2 = c^2 - (R+r)^2.$$

Die Richtungssinus einer äussern, beziehungsweise innern gemeinsamen Tangente gegen die Zentrale betragen

$$5.\quad \sin\varphi = \frac{R-r}{c}, \qquad 6.\quad \sin\varphi' = \frac{R+r}{c}.$$

Für die auf die Potenzlinie der zwei Kreise fallende gemeinsame Sehne der Kreise hat man

$$7.\quad s^2 = \frac{[(R+c)^2 - r^2]\,[r^2 - (R-c)^2]}{c^2},$$

und für die Stücke der Potenzlinie, begrenzt von den zwei äussern, beziehungsweise den zwei innern gemeinsamen Tangenten der zwei Kreise

$$8.\quad u^2 = (R+r)^2\,\frac{c^2 - (R-r)^2}{c^2},$$

$$9.\quad u'^2 = (R-r)^2\,\frac{c^2 - (R+r)^2}{c^2}, \quad \text{daher}$$

$$10.\quad \frac{u^2}{s^2} = \frac{(R+r)^2}{(R+r)^2 - c^2}, \qquad 11.\quad \frac{u'^2}{s^2} = \frac{(R-r)^2}{(R-r)^2 - c^2}.$$

Die Halbierungslinien der Winkel zwischen einer äussern und einer innern gemeinsamen Tangente gehen durch A, B und stehen aufeinander senkrecht, d. h.

12. Die vier Schnittpunkte der zwei äussern gemeinsamen Tangenten mit den zwei innern liegen auf dem Kreis mit dem Mittelpunkte M und dem Radius $\frac{c}{2}$.

Für den Abstand der Berührungspunkte einer äussern gemeinsamen Tangente von M hat man

$$R_1^2 = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{c^2+4Rr}{4},$$

und für den Abstand der Berührungspunkte einer innern gemeinsamen Tangente von M

$$r_1^2 = \left(\frac{R-r}{2}\right)^2 + \left(\frac{t'}{2}\right)^2 = \frac{c^2-4Rr}{4},$$

d. h. die vier Berührungspunkte der zwei äussern, beziehungsweise der zwei innern gemeinsamen Tangenten liegen auf zwei Kreisen mit dem Mittelpunkt M und den bezüglichen Radien

$$13.\quad R_1^2 = \frac{c^2+4Rr}{4}, \qquad 14.\quad r_1^2 = \frac{c^2-4Rr}{4},$$

so dass also noch ist

$$15.\quad R_1^2 + r_1^2 = \frac{c^2}{2}, \qquad 16.\quad R_1^2 - r_1^2 = 2Rr.$$

Die numerierten Formeln enthalten mancherlei Sätze; 1, 4, 6, 10 sagen:

Beschreibt man um jeden Brennpunkt A, B einer Ellipse einen Kreis, derart, dass die zwei Kreise sich immer auf der Ellipse schneiden, so umhüllen ihre äussern gemeinsamen Tangenten den Kreis über der grossen Achse der Ellipse als Durchmesser. Die innern gemeinsamen Tangenten der jeweiligen zwei Kreise sind imaginär; sie verschieben sich parallel und das Stück zwischen den Berührungspunkten behält konstante Länge. Das Verhältnis $\frac{u}{s}$ des von den äussern gemeinsamen Tangenten begrenzten Stückes der Potenzlinie zur gemeinsamen Sehne der zwei Kreise bleibt konstant; das bedeutet, dass die Ellipse zum Kreis über ihrer grossen Achse als Durchmesser orthogonal affin ist. Nimmt man umgekehrt an, der Kreis mit dem Radius $a = \frac{R+r}{2}$ und das Verhältnis $\frac{u}{s}$ sei gegeben, d. h. nimmt man zum Kreis die orthogonal affine Figur in bezug auf einen Durchmesser, so ist nach

Gleichung 10 die Grösse c bestimmt; die orthogonal affine Figur ist die Ellipse mit den Brennpunkten A, B, wobei $AB = c$. Ist u gewählt, so kennt man auch s und aus Gleichung 8 ergibt sich $R - r$, so dass auch die zugehörigen R, r bestimmt sind.

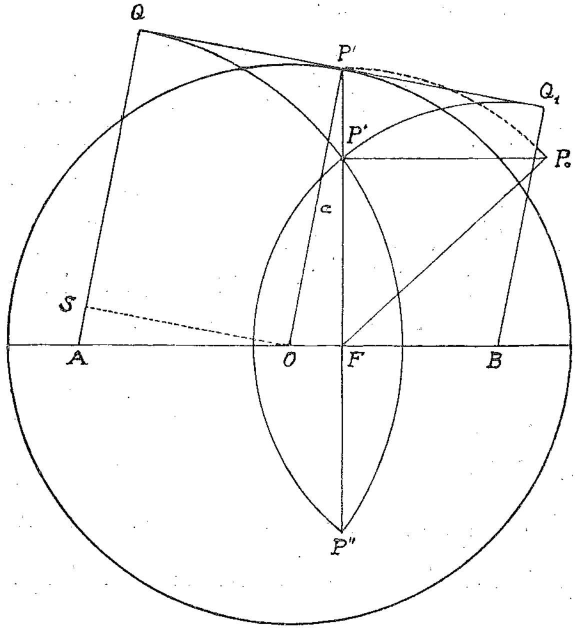

Fig. 1.' Dass die orthogonal affine Figur zu einem Kreis eine Ellipse ist, lässt sich auch direkt beweisen. P' sei der entsprechende Punkt zu P, also $\frac{FP'}{FP} = \frac{s}{2} : \frac{u}{2}$ konstant. Man mache $\sphericalangle\, FP'P_0 = 90°$, $FP_0 = FP$, so bleibt auch $\frac{P'P_0}{FP_0} = \frac{P'P_0}{FP}$ konstant; man mache ferner auf der Kreistangente $PQ = PQ_1 = P'P_0$ und ziehe QA, Q_1B senkrecht QQ_1, so ist $\Delta\; OAS \sim OFP$ und daher

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OS}{FP} = \frac{P'P_0}{FP_0} \text{ konstant.}$$

Also bleibt OA konstant, d. h. der Punkt A und damit auch der Punkt B bleibt fest. Aber die Kreise (A), Q und (B), Q_1 schneiden sich in P', weil $\overline{P'P_0}^2 = \overline{FP_0}^2 - \overline{P'F}^2$, oder $\overline{PQ_1}^2 = \overline{PQ}^2 = \overline{PF}^2 - \overline{P'F}^2 = (PF - P'F) \cdot (PF + P'F) = PP' \,.\, PP''$, und es ist $AP' + BP' = AQ + BQ_1 = 2\,OP = 2a$, d. h. der Ort der Punkte P', P'' ist eine Ellipse mit den Brennpunkten A, B. —

Die Formeln 2, 3, 5, 11 sagen:

Beschreibt man um jeden der zwei Brennpunkte A, B einer Hyperbel einen Kreis derart, dass die zwei Kreise sich immer auf der Hyperbel schneiden, so verschieben sich die äussern gemeinsamen Tangenten der zwei Kreise parallel (und senkrecht zu den Asymptoten) und die Strecke zwischen den Berührungspunkten behält konstante Länge. Die innern gemeinsamen Tangenten, die für Kreispaare, welche sich imaginär auf der Hyperbel schneiden, reell werden, umhüllen den Kreis über der Hauptachse der Hyperbel als Durchmesser. Das Verhältnis der von den innern gemeinsamen Tangenten auf der Potenzlinie der zwei Kreise begrenzten Strecke zur gemeinsamen Sehne der zwei Kreise bleibt konstant. Die Hyperbel ist orthogonal affin zum Kreis über der Hauptachse als Durchmesser, aber das konstante Verhältnis ist imaginär.

Ist $R - r$ und damit der Kreis über der Hauptachse und ist ferner $\frac{u'}{s}$ gegeben, so ist die Hyperbel bestimmt; die Gleichung 11 liefert c und wenn noch u' gewählt wird, so gibt die Gleichung 9 den Wert für $R + r$, womit dann auch R, r für den betreffenden Hyperbelpunkt sich ergeben. Nimmt man für das konstante imaginäre Verhältnis den Wert i oder $\frac{1}{i}$, so liefern die zum Achsendurchmesser senkrechten reellen Kreissehnen keine reellen Hyperbelpunkte, wohl aber die ausserhalb des Kreises liegenden imaginären Sehnen, indem sie mit i multipliziert werden. Die Konstruktion dieser reellen Punkte geschieht so, dass man vom Fusspunkt der Sehne auf der Achse die Tangenten an den Kreis legt und die Länge einer Tangente als reelle Ordinatenstrecke abträgt. Man erhält die gleichseitige Hyperbel. Ihre Punkte ergeben sich auch so, dass man die Berührungspunkte der zwei Tangenten mit den Durchmesserendpunkten auf der Achse verbindet und diese Linien bis zum Schnitt verlängert. Die projektivische Verallgemeinerung dieser Konstruktion auf einen Kegelschnitt und einen Durchmesser oder eine Sekante desselben wird Imaginärprojektion genannt.[1])

Ein Beispiel für die Entstehung eines Kegelschnittes durch das Imaginäre hindurch aus einem reellen Kegelschnitt bietet folgende

[1]) Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. Christian Wiener, Prof. an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe. (Leipzig, B. G. Teubner 1884). Erster Band S. 315.

Aufgabe: Gegeben im Raum ein Kegelschnitt und eine Ebene E; gesucht der geometrische Ort eines Punktes von dem aus die Zentralprojektion des Kegelschnittes auf die Ebene ein Kreis ist. Die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene E bestimmen, als Spitzen, mit dem gegebenen Kegelschnitt zwei Zylinder; die Restdurchdringung der zwei Zylinder ist der gesuchte Ort, also ein Kegelschnitt. Man findet ihn folgendermassen. Eine Parallelebene zur gegebenen Ebene schneidet den gegebenen Kegelschnitt in zwei Punkten A, B. Verbindet man sie mit den imaginären Kreispunkten, so sind die zweiten Schnittpunkte A', B' dieser Verbindungslinien zwei Punkte des gesuchten Ortes. Je nachdem die beiden Punkte A, B auf dem gegebenen Kegelschnitt reell oder imaginär sind, so werden die zwei Punkte A', B' des Ortes imaginär oder reell. Angenommen, die Punkte A, B seien imaginär, so multipliziere man die Strecke AB mit i, d. h. man führe eine Imaginärprojektion aus, so bilden die reell gewordenen Punkte A, B mit den Punkten A', B' in der Parallelebene die Ecken eines Quadrates. Man hat folgende Konstruktion: Zur Schnittlinie der Ebene E mit der Ebene des Kegelschnittes nimmt man den konjugiert gerichteten Durchmesser des Kegelschnittes. Wird er von irgend einer Parallelebene zu E in einem Punkte M geschnitten, so lege man von M Tangenten an den Kegelschnitt, verbinde die Berührungspunkte mit den Endpunkten des Durchmessers und verlängere die Linien bis zum Schnitt in A, B. Dann drehe man die Strecke AB um ihre Mitte M parallel zur Ebene E um einen Winkel von 90°; der Ort der Endpunkte dieser gedrehten Strecken ist der gesuchte Kegelschnitt.

Die Aufgabe kann dadurch erweitert werden, dass man die imaginären Kreispunkte durch zwei beliebige Punkte im Raum ersetzt und dann nach den Spitzen solcher Kegel frägt, die einen gegebenen Kegelschnitt enthalten und durch die zwei Punkte hindurchgehen. Dual kann man eine Kegelfläche zweiten Grades und zwei Ebenen im Raum geben und dann nach der Enveloppe einer dritten Ebene fragen, die aus der Kegelfläche einen Kegelschnitt herausschneidet, der die zwei Ebenen berührt. Die Enveloppe ist eine Kegelfläche zweiter Klasse, die mit der gegebenen Kegelfläche zwei Tangentialebenen gemein hat. —

Die mit 13 und 14 numerierten Formeln enthalten, projektivisch und auch dual gedeutet, die letzten Sätze von Abschnitt 1 und 2 des § 11, Seite 478 und 479 von Jakob Steiners Ges. Werken, zweiter Band.

Berücksichtigt man, dass die zwei Tangenten in einem Schnittpunkt von zwei Kreisen mit den Radien gleiche Winkel bilden, so berühren die zwei Tangenten einen Kegelschnitt, der die Kreismittelpunkte zu Brennpunkten hat. Projektivisch und auch dual gedeutet, entstehen daraus die ersten Sätze der beiden erwähnten Abschnitte. Die mittleren Sätze kann man aus Symmetriegründen der Figur der zwei Kreise entnehmen. Einen weiteren Satz gibt Nr. 12.

Wenn man in den Formeln 13 und 14 dem Produkt Rr einen konstanten Wert beilegt, so geben sie eine Eigenschaft der Lemniskate: Legt man bei einer Lemniskate um jeden der beiden Brennpunkte A, B, als Mittelpunkte, einen Kreis, so dass sie sich auf der Lemniskate schneiden, und zieht man die jeweiligen äussern und innern gemeinsamen Tangenten der zwei Kreise, so liegen die Berührungspunkte auf zwei festen konzentrischen Kreisen und die Tangenten selber umhüllen zwei Kegelschnitte mit den Brennpunkten A, B.

Wenn eine Gerade sich so bewegt, dass das Produkt ihrer senkrechten Abstände von zwei festen Punkten A, B, den Brennpunkten des umhüllten Kegelschnittes, konstant bleibt, so gibt es zwei andere feste Punkte, A', B', für welche die Summe der Quadrate der senkrechten Abstände von der beweglichen Geraden konstant bleibt. Diese ausgezeichneten Punkte A', B' bilden die Gegenecken eines Quadrates, für welches A, B die andern Gegenecken sind. Angenommen nämlich, die Lote von A, B auf die Gerade seien R, r und die Lote von A', B' auf die gleiche Gerade seien R', r', so bilden die Projektionen der zwei Diagonalen AB, $A'B'$ die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypothenuse c. Also

$(R-r)^2 + (R'-r')^2 = c^2$; aber wegen der gemeinsamen Mitte von A, B und A', B' $R + r = R' + r'$.

Indem man die zweite Gleichung quadriert und die erste von ihr subtrahiert, entsteht

$$4Rr = 2(R'^2 + r'^2) - c^2, \text{ d. h.:}$$

Wird eine Gerade so bewegt, dass die Summe der Quadrate ihrer senkrechten Abstände von zwei festen Punkten A', B' konstant bleibt, so umhüllt die Gerade einen Kegelschnitt mit den Brennpunkten A, B, so dass $A'B'$ und AB die Diagonalen eines Quadrates sind. Der Kegelschnitt ist Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $2(R'^2 + r'^2) \gtrless c^2$ ist.

Die eben angegebene Enveloppe tritt auf, wenn man um die Mitte M von $A' B'$ als Mittelpunkt einen Kreis legt und dann um A', B', als Mittelpunkte, Kreise wählt, die sich auf dem gewählten Kreis schneiden. Die gemeinsamen Tangenten der Kreispaare bilden die Enveloppe. Der Ort der Berührungspunkte sind die Fusspunktskurven der Punkte A', B' in bezug auf die Enveloppe, deren Brennpunkte A, B sind. Ist nämlich P der Schnittpunkt des festen Kreises mit den Kreisen eines Paares, deren Radien R', r' sind, so ist bekanntlich

$$R'^2 + r'^2 = 2\,\overline{MP}^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2, \text{ konstant.}$$

Ein anderes Beispiel für eine solche Enveloppe tritt auf, wenn zwei feste Kreise gegeben sind, und eine Gerade sich so bewegen soll, dass die Summe der Quadrate der aus den zwei Kreisen herausgeschnittenen Sehnen konstant sein soll. Ist die konstante Summe gleich null, so gehören die vier gemeinsamen Tangenten der zwei Kreise der entsprechenden Enveloppe an, ferner die zwei zur Zentralen senkrechten Sehnen, welche Durchmesser von Kreisen sind, die den andern Kreis orthogonal schneiden; die Brennpunkte der Enveloppe bilden mit den Kreismittelpunkten als Gegenecken ein Quadrat. Ist die konstante Summe k, und sind die Radien der zwei Kreise um A', B' gleich ϱ, ϱ', so hat man für die Lote R', r' von A', B' auf eine gesuchte Gerade

$$R'^2 + r'^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - \frac{k}{4};$$

ist umgekehrt die Ellipse und damit $R'^2 + r'^2$ gewählt, und ist auch $\varrho^2 + \varrho'^2$ gewählt, so ist k bestimmt, d. h.:

Legt man bei einer Ellipse um die Punkte A', B' irgend zwei Kreise, die sich aber auf einem zur Ellipse konzentrischen festen Kreise schneiden, so schneidet irgend eine Tangente der Ellipse die zwei Kreise in Sehnen, für welche die Summe der Quadrate konstant ist.

Hat man drei Punkte A', B', C', so kann nach der Enveloppe einer Geraden gefragt werden, so dass die Summe der Quadrate der senkrechten Abstände der Punkte A', B', C' von der beweglichen Geraden konstant ist, gleich k. Diese Enveloppe ist wieder ein Kegelschnitt; denn durch jeden der drei Punkte A', B', C' gehen zwei Lagen der Geraden, nämlich die Tangenten an den Kegelschnitt, den die zwei andern Punkte und die Konstante k bestimmen. Die Berührungspunkte dieser Geraden mit den Kegelschnitten müssen zugleich die Berührungspunkte mit dem

Ort sein. Daher gehen die Geraden von A', B', C' nach den Mitten der Berührungssehnen jener Tangentenpaare durch die Mitten der Seiten des Dreieckes $A' B' C'$. Also ist sein Schwerpunkt der Mittelpunkt des gesuchten Kegelschnittes und dieser Kegelschnitt berührt jeden der drei Kegelschnitte doppelt, die zu je zwei von den drei Punkten und k gehören. Analog für vier Punkte A', B', C', D' u. s. f. —

Nachdem von der Enveloppe einer Geraden die Rede war, für welche die Summe der Quadrate der Abstände von zwei festen Punkten konstant war, so kann nach der Enveloppe einer Geraden gefragt werden, für welche die Differenz der Quadrate der senkrechten Abstände von zwei festen Punkten konstant bleibt. Angenommen die letztern seien mit A, B bezeichnet und die Lote von ihnen auf eine gesuchte Gerade seien R, r, so dass $R^2 - r^2 = k$ konstant bleibt. Dann schneiden sich die Kreise mit den Mittelpunkten A, B und den bezüglichen Radien R, r in einem Punkt P so, dass $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = k$ ist. Der Ort von P ist daher eine Gerade, die auf AB senkrecht steht; sie ist die Potenzlinie der zwei Kreise und schneidet eine gemeinsame Tangente in der Mitte N der Berührungspunkte, woraus folgt, dass MN auf der Tangente senkrecht steht, d. h.:

Die Enveloppe einer Geraden, für welche die Differenz der Quadrate der senkrechten Abstände von zwei festen Punkten A, B konstant bleibt, ist eine Parabel, welche die Mitte M von AB zum Brennpunkt hat und deren Scheiteltangente auf AB in dem Punkte F senkrecht steht, für den $\overline{AF}^2 - \overline{BF}^2 = k$ ist.

Anders gesagt:

Hat man zwei feste Punkte A, B und eine auf AB senkrechte Gerade und legt man um A, B als Mittelpunkte je einen Kreis, derart, dass jene senkrechte Gerade die Potenzlinie jedes Kreispaares ist, so sind alle Gruppen der gemeinsamen Tangenten jedes Kreispaares zugleich Tangenten einer und derselben Parabel.[1]) Die Berührungspunkte jeder Tangentengruppe mit den Kreisen des zugehörigen Kreispaares bilden die Fusspunktskurven der Punkte A, B in bezug auf die Parabel und die 4, nicht auf AB gelegenen Schnittpunkte einer jeden Tangentengruppe, liegen, wie schon früher gesehen, auf dem Kreis über AB als Durchmesser. Wählt

[1]) Für ein Kreispaar projektivisch verallgemeinert, liegt hierin wieder einer der Steinerschen Sätze auf S. 478, Abschn. 2, zweiter Band Ges. Werke.

man auf der Achse einer Parabel zwei, zum Brennpunkt symmetrisch gelegene Punkte A, B und fällt von ihnen die Lote auf irgend eine Tangente der Parabel, so bleibt die Differenz der Quadrate der Lote konstant.

Man könnte die Sätze auch auf andere Art finden. —

Zu derselben Enveloppe führt folgende Aufgabe: Gegeben zwei Kreise; gesucht alle Geraden, die aus den zwei Kreisen gleich lange Sehnen herausschneiden. Sind wieder R, r die Lote von den Mittelpunkten der zwei Kreise auf eine gesuchte Gerade, und sind ϱ, ϱ' die Radien der zwei Kreise, so muss sein

$$R^2 - r^2 = \varrho^2 - \varrho'^2, \text{ d. h.:}$$

Irgend eine Tangente der oben aufgetretenen Parabel schneidet die beiden Kreise irgend eines der Kreispaare in gleich langen Sehnen.

Hat man drei Kreise, so bestimmt jede ihrer drei Potenzlinien als Scheiteltangente mit der Mitte der Zentralen als Brennpunkt eine Parabel, welche die vier gemeinsamen Tangenten der zugehörigen zwei Kreise berührt. Die Leitlinien der drei Parabeln gehen durch einen Punkt und die drei Parabeln haben drei gemeinsame Tangenten, von denen jede alle drei Kreise in gleichlangen Sehnen schneidet. —

Eine etwas allgemeinere Aufgabe ist die folgende:

Gegeben zwei Kreise; gesucht die Enveloppe einer Geraden, die aus den Kreisen zwei Sehnen herausschneidet, für welche die Differenz der Quadrate konstant ist. Sind wieder R, r die Abstände der Kreismittelpunkte A, B von einer gesuchten Geraden und sind die Radien der zwei Kreise ϱ, ϱ', so muss sein

$$R^2 - r^2 = \varrho^2 - \varrho'^2 - \frac{k}{4};$$

dabei bedeutet k die konstante Differenz der Sehnenquadrate, d. h.:

Die Enveloppe der Geraden ist die Parabel, deren Brennpunkt die Mitte von AB ist und deren Scheiteltangente auf AB in dem Punkte F senkrecht steht, für den $\overline{AF}^2 - \overline{BF}^2 = \varrho^2 - \varrho'^2 - \frac{k}{4}$ ist.

Denkt man sich umgekehrt die Parabel und auf ihrer Achse zwei zum Brennpunkt M symmetrische Punkte A, B gewählt, ferner $\varrho^2 - \varrho'^2$ ebenfalls gewählt, so ist k bestimmt, d. h.:

Legt man um A, B als Mittelpunkte irgend zwei Kreise, deren Potenzlinie eine feste Parallele zur

Scheiteltangente der Parabel ist, so schneidet irgend eine Tangente der Parabel die zwei Kreise in zwei Sehnen, für welche die Differenz der Quadrate konstant ist. —

Zum Schluss sollen noch einige Steinersche Sätze bewiesen werden, die sich auf die Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar beziehen. Angenommen, zwei Tangenten einer Parabel, mit dem Brennpunkt c, mögen die Berührungspunkte p, q haben und sich im Punkte a schneiden. Dann ist bekanntlich

$$ca = \sqrt{cp.\,cq}.$$

Haben zwei andere Tangenten die Berührungspunkte r, s und den Schnittpunkt α so ist ebenso

$$c\alpha = \sqrt{cr.\,cs}. \qquad \text{Also}$$

$$ca.\,c\alpha = \sqrt{cp.\,cq.\,cr.\,cs}.$$

Nun bilden die vier Tangenten ein vollständiges Vierseit, für welches a, α zwei Gegenecken sind; für die andern Gegeneckenpaare b, β und d, δ gilt dieselbe Relation

$$\sqrt{cp.\,cq.\,cr.\,cs} = ca.\,c\alpha = cb.\,c\beta = cd.\,c\delta.$$

Die vier Tangenten bestimmen eine Schar von Kegelschnitten. Über ihre Brennpunkte sei folgendes bemerkt: Dieselben treten, entsprechend den einzelnen Kegelschnitten, paarweise auf. Auch die Gegeneckenpaare a, α und b, β und d, δ sind Brennpunktspaare. Man findet weitere Paare, indem man irgend einen Kegelschnitt mit einem Paar als Brennpunkten legt und dann von einem andern Punktepaar Tangenten an denselben zieht, oder indem man zu zwei Kegelschnitten, die irgend zwei Paare zu Brennpunkten haben, die gemeinsamen Tangenten legt; in beiden Fällen sind die gegenüberliegenden Schnittpunkte der Tangenten wieder Brennpunktspaare.

Denkt man sich eine andere Parabel mit den gleichen Brennpunkten c, γ_∞, wo γ_∞ im Unendlichen liegt, und von a, α an die neue Parabel Tangenten gezogen, so bilden die gegenüberliegenden Schnittpunkte neue Brennpunktspaare b_1, β_1 und d_1, δ_1. Es muss sein wie vorher

$$ca.\,c\alpha = cb_1.\,c\beta_1 = cd_1.\,c\delta_1$$

und wenn man von b_1, β_1 an die frühere Parabal Tangenten legt und die Berührungspunkte p_1, q_1, r_1, s_1 nennt

$$ca.\,c\alpha = \sqrt{cp.\,cq.\,cr.\,cs} = \sqrt{cp_1.\,cq_1.\,cr_1.\,cs_1}.$$

Das ist Satz 5, S. 433, Bd. 2, Ges. Werke. Die Sätze 4, a) b) c) d) S. 428, Bd. 2 enthalten andere Ausdrucksarten. Es bleibt noch Satz 6

Seite 434 zu beweisen. Man kann c, γ, (wo γ jetzt nicht mehr im Unendlichen liegt), als Brennpunkte eines Kegelschnittes betrachten, der dem Vierseit mit den Gegenecken a, α und b, β eingeschrieben ist; verbindet man c, γ mit a, α, und b, β, so entstehen bekanntlich bei diesen Punkten je zwei gleiche Winkel. Bezeichnet man sie mit A, A', B, B', so hat man

$$\frac{ac}{bc} = \frac{\sin B}{\sin A}, \; \frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\sin B'}{\sin A'},$$

$$\frac{ac}{bc} \cdot \frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \frac{\sin B'}{\sin A'}. \quad \text{Ebenso}$$

$$\frac{a\gamma}{b\gamma} \cdot \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\sin B'}{\sin A} \cdot \frac{\sin B}{\sin A'}, \quad \text{also}$$

$$\frac{ac}{bc} \cdot \frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{a\gamma}{b\gamma} \cdot \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}, \quad \text{w. z. z. w. —}$$