Über die Konstruktion einer speziellen automorphen Funktion.

Von

RUDOLF FUETER.

(Als Manuskript eingegangen am 30. Dezember 1918.)

Es sei S eine hyperbolische Substitution der Modulgruppe:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze rationale Zahlen sind. Dann gelingt es, die zu der zyklischen Untergruppe mit der Erzeugenden S gehörenden automorphen Funktionen auf folgende einfache Weise zu konstruieren.

Die Fixpunkte von S legen einen quadratisch-reellen Körper $k(\sqrt{m})$ fest; dieser ist gegeben durch die Wurzeln ω und ω' der Gleichung

$$\omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}.$$

Ich beschränke mich hier auf den Fall, dass die Zahl ω eine reduzierte Zahl von $k(\sqrt{m})$ sei.[1]). Dann ist ω in einen sofort periodischen Kettenbruch entwickelbar:

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_{\nu-1} + \cfrac{1}{\omega}}}}. \qquad (a_n > 0).$$

Ich setze:

$$a_n = a_m, \text{ falls } n \equiv m \pmod{\nu}$$

und bezeichne die Näherungsbrüche von ω mit $l_n = \frac{P_n}{Q_n}$. Es ist dann

$$l_0 = \infty;$$
$$P_n = a_{n-1} P_{n-1} + P_{n-2}$$
$$Q_n = a_{n-1} Q_{n-1} + Q_{n-2},$$
$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n,$$
$$\omega = \frac{P_\nu \omega + P_{\nu-1}}{Q_\nu \omega + Q_{\nu-1}},$$

[1]) Weber. Algebra. Braunschweig, 1898. Bd. I. pag. 404 u. ff.

und S ist Potenz der unimodularen Substitution

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} P_\nu & P_{\nu-1} \\ Q_\nu & Q_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Auch hier beschränke ich mich auf den einfachsten Fall, dass S die Substitution $\overline{S}$ selbst sei und dass ν gerade sei. Ich frage also nach automorphen Funktionen der Substitution:

$$S = \begin{pmatrix} P_\nu & P_{\nu-1} \\ Q_\nu & Q_{\nu-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Dazu definiere ich l_n auch für negative n durch die Rekursionsformeln:

$$l_n = \frac{P_n}{Q_n}; \; P_n = P_{n+2} - a_{n+1} P_{n+1}, \; Q_n = Q_{n+2} - a_{n+1} Q_{n+1}.$$

Es ist dann $l_{-1} = 0$. Ist ω' die konjugierte von ω, so sind die l_n für negative n die Näherungsbrüche von ω'.

Es sei:

$$E_k(z, \omega) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \dfrac{z}{l_{\nu n+2k}}}{1 - \dfrac{z}{l_{\nu n+2k+1}}}; \; k = o, 1, \ldots, \frac{\nu}{2} - 1.$$

Dabei ist der Faktor

$$\frac{1 - \dfrac{z}{l_{-2}}}{1 - \dfrac{z}{l_{-1}}} \quad \text{durch} \quad \frac{l_{-2} - z}{-z}$$

zu ersetzen. Das Produkt konvergiert in jedem Bereiche von z, der die Punkte ω, ω', l_n, $n = o, \pm 1, \ldots$ nicht enthält, gleichmässig, wie ein sehr einfacher Beweis zeigt.

Die Funktion E_k genügt der Funktionalgleichung:

$$E_k\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \omega\right) = \frac{\omega_{2k+1}}{\omega'_{2k+1}} E_k(z, \omega), \tag{1}$$

wo ω'_{2k+1} die konjugierte von ω_{2k+1} ist und ω_{2k+1} eine zu ω ähnliche reduzierte Zahl von $k(\sqrt{m})$ ist:

$$\omega_{2k+1} = \frac{Q_{2k} \; \omega - P_{2k}}{-Q_{2k+1} \omega + P_{2k+1}}.$$

Es ist praktisch, statt der Variablen z in E_k die Variable

$$\zeta = \frac{z - \omega}{z - \omega'}$$

einzuführen, wo den Punkten $z = \omega$ und ω' die Punkte 0 und ∞ der ζ-Ebene entsprechen. Ist

$$E_k(z, \omega) = H(\zeta, \omega),$$

so wird (1):

$$H(\varrho\, \zeta, \omega) = \frac{\omega_{2k+1}}{\omega'_{2k+1}} H(\zeta, \omega),$$

wo

$$\varrho = (P_\nu - Q_\nu\, \omega)^2$$

das Quadrat der Grundeinheit ε des quadratischen Körpers $k(\sqrt{m})$ ist. Die Funktionen:

$$U_k(\zeta, \omega) = \zeta \frac{d lg\, H_k(\zeta, \omega)}{d\, \zeta}$$

sind dann die gesuchten automorphen Funktionen, da sie der Relation:

$$U_k(\varrho\, \zeta, \omega) = U_k(\zeta, \omega) \tag{2}$$

genügen.

Bleiben wir zur Diskussion auf der ζ-Ebene, so ist der Diskontinuitätsbereich der Funktionen U_k ein Kreisring um 0; die Radien r_1 und r_2 der beiden begrenzenden Kreise stehen in der Beziehung

$$r_1 = \varrho\, r_2$$

zu einander. In jedem Diskontinuitätsbereich hat die Funktion U zwei einfache Pole und zwei einfache oder eine doppelte Nullstelle. Die Pole sind zwei der Zahlen

$$\frac{l_{\nu n+2k+1} - \omega}{l_{\nu n+2k+1} - \omega'}, \quad \frac{l_{\nu n+2k} - \omega}{l_{\nu n+2k} - \omega'};$$

also Zahlen des Körpers $k(\sqrt{m})$. Sind μ_1, μ_2 die beiden Nullstellen, ν_1, ν_2 die beiden Pole, so ist

$$\frac{\nu_1\, \nu_2}{\mu_1\, \mu_2} = \varrho^r,$$

wo r irgend eine ganze rationale Zahl ist.

Alle automorphen Funktionen, die zur selben Gruppe gehören, sind rationale Funktionen von zwei Funktionen U_k. Zwischen letztern besteht eine quadratische Gleichung. Die Funktionen $\zeta \frac{d U_k}{d\, \zeta}$ sind ebenfalls automorph. U_k genügt daher einer Differentialgleichung 1. Ordnung der Form:

$$\left(\zeta \frac{dU_k}{d\zeta}\right)^2 + R_1(U_k)\,\zeta \frac{dU_k}{d\zeta} + R_2(U_k) = 0\,,$$

wo R_1 und R_2 rationale Funktionen sind. Ausserdem stehen die Funktionen U_k mit den elliptischen Funktionen in einfachem Zusammenhang.

Die Beweise und weitern Ausführungen werden in einer demnächst erscheinenden Zürcher Dissertation veröffentlicht werden.