Neue Entwicklungen über die Abel'sche Integralumkehrungsformel.

Von

ALFRED KIENAST.

(Als Manuskript eingegangen am 19. Januar 1917.)

Vom Jahre 1896 an hat Herr Borel die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \int_0^{\infty} e^{-x} \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{a_n z^n x^n}{n!} \right\} dx = \lim_{x=\infty} e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sum_{\varkappa=0}^{n-1} a_\varkappa z^\varkappa \right]$$

untersucht, zu der er gelangte, um die Aufgabe zu lösen: es soll eine unendliche Reihe in einen Grenzwert verwandelt werden, der in einem grösseren Gebiet der komplexen Variabeln konvergiert als die ursprüngliche Reihe. Diese Borel'sche Formel habe ich abgeleitet [1]) durch ein Verfahren, das auf Sätzen über lineare Differentialgleichungen [2]) beruht. In vorliegendem Aufsatz möchte ich zeigen, dass dieselbe Methode [3]) in einfachster Weise zu den berühmten Abel'schen Formeln führt.

1. Die Funktionen, die im Folgenden eingeführt werden, sind sämtlich analytisch vorausgesetzt. Aus den beiden Differentialgleichungen

$$(1) \qquad (1-x)\, x\, y' + s\, x\, y = x^{\alpha+1} \cdot \psi(x)$$

$$(1-x)\, x\, y_1' + s\, x\, y_1 = 0$$

folgt

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{y_1}\right] = \frac{x^\alpha\, \psi(x)}{(1-x)\, y_1(x)}.$$

Es ist $y_1 = C(1-x)^s$ und man erhält, wenn $V(x)$ ein beliebig gewähltes partikuläres Integral von (1) bedeutet:

$$(2) \qquad \Big| (1-x)^{-s}\, V(x) \Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{t^\alpha \cdot \psi(t)\, dt}{(1-t)^{1+s}}.$$

[1]) „Sur quelques représentations arithmétiques etc." L'enseignement mathématique, t. XIX, Nos. 1—2 (1917).

[2]) „Über eine Integralformel etc." Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. Zürich, 3./4. Heft, Jahrg. 61, 1916.

[3]) Weitere Anwendungen sind ausgeführt und werden bei anderer Gelegenheit dargestellt.

Unter der Voraussetzung, dass $\psi(x)$ regulär ist in der Umgebung von $x = 0$ und dass α keine ganze negative Zahl ist, gibt [1]) es ein Integral von (1), das sich darstellen lässt durch die konvergierende Reihe

$$V(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} A_\varkappa \, x^{\varkappa+\alpha+1}$$

und umgekehrt. Diese Reihe eingesetzt in (1) liefert

$$x^\alpha \psi(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} D_\varkappa \, x^{\varkappa+\alpha} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} x^{\varkappa+\alpha} \left[(\varkappa+\alpha+1) A_\varkappa - (\varkappa+\alpha-s) A_{\varkappa-1}\right].$$

Setzt man jetzt, wodurch ein Parameter eingeführt wird,

$$A_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} \, z^\lambda \tag{3}$$

und wählt die $a_{\varkappa\lambda}$ entsprechend der Tabelle

$a_{\varkappa\lambda}$	$\lambda=0$	1	2	3	4
$\varkappa=0$	a_0	a_1	a_2	a_3	.
1	0	$\frac{\alpha+1-s}{\alpha+2} a_1$	$\frac{\alpha+1-s}{\alpha+2} a_2$	$\frac{\alpha+1-s}{\alpha+2} a_3$	.
2	0	0	$\frac{(\alpha+1-s)(\alpha+2-s)}{(\alpha+2)(\alpha+3)} a_2$	$\frac{(\alpha+1-s)(\alpha+2-s)}{(\alpha+2)(\alpha+3)} a_3$	.
.	.	.	.	.	.

so findet man

$$A_0 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \, z^\lambda \quad ; \quad A_\varkappa = \frac{(\alpha+1-s)\cdots(\alpha+\varkappa-s)}{(\alpha+2)\cdots(\alpha+\varkappa+1)} \sum_{\lambda=\varkappa}^{\infty} a_\lambda \, z^\lambda$$

$$D_0 = (\alpha+1) A_0 \quad ; \quad D_\varkappa = -\frac{(\alpha+1-s)\cdots(\alpha+\varkappa-s)}{(\alpha+2)\cdots(\alpha+\varkappa)} a_{\varkappa-1} \, z^{\varkappa-1}.$$

Der Zusammenhang zwischen $\psi(x)$ und $V(x)$, der durch die verbindende Differentialgleichung (1) herbeigeführt wird, ist umkehrbar und so kann über die in (3) auftretenden $a_{\varkappa\lambda}$ und z frei verfügt werden, mit der einzigen Beschränkung, dass die daraus hervorgehende Reihe $\sum_0^\infty D_\varkappa \, x^\varkappa$, wie oben vorausgesetzt, konvergent ist. Indem man diese Ausdrücke benutzt, erhält (2) die Gestalt:

[1]) Siehe Vierteljahrsschrift, Jahrg. 61, Satz auf S. 701.

$$(4)\qquad \Bigg|(1-x)^{-s}\,x^{\alpha+1}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}\,x^{\varkappa}\left[\sum_{\lambda=\varkappa}^{\infty}a_\lambda z^\lambda\right]\Bigg|_{x_0}^{x}$$

$$=\frac{\Pi(\alpha-s)}{\Pi(\alpha)}\int_{x_0}^{x}\frac{t^{\alpha}\cdot dt}{(1-t)^{1+s}}\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda z^\lambda\right)$$

$$-\int_{x_0}^{x}\frac{t^{\alpha+1}}{(1-t)^{1+s}}\left\{\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa+1)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}\,a_\varkappa z^\varkappa t^\varkappa\right\}dt.$$

Diese Formel ist gültig für alle Werte von a_λ und z, für die

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty}D_\varkappa x^\varkappa=(\alpha+1)\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda z^\lambda-\frac{\Pi(\alpha+1)}{\Pi(\alpha-s)}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa+1)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}\,a_\varkappa z^\varkappa x^{\varkappa+1}$$

eine in bezug auf x konvergente Reihe ist. Daher ist $\Sigma a_\lambda z^\lambda$ notwendig eine Potenzreihe mit nicht verschwindendem Konvergenzradius und z ein Wert, für den sie konvergiert. Daraus folgt, dass auch $\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa+1)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}\,a_\varkappa z^\varkappa x^\varkappa$ eine Potenzreihe mit nicht verschwindendem Konvergenzradius ist. Von Formel (4) aus kann man in verschiedener Weise weiter schliessen.

2. Über den Bereich, dem der Parameter z entnommen werden darf, werde vorausgesetzt, dass für jeden zugelassenen Wert von z die beiden Funktionen $\Sigma A_\varkappa x^\varkappa$ und $\Sigma D_\varkappa x^\varkappa$ sich regulär verhalten in der Umgebung jeder Stelle einer Elementarfläche, die $x=0$ und $x=1$ enthält. Ferner seien weder α noch s ganze reelle Zahlen. Dann kann man als Integrationsweg eine Doppelschleife um die Stellen 0 und 1 nehmen von irgend einem Werte x_0 der Elementarfläche ausgehend und in $x=x_0$ endigend. Sie wird gewöhnlich durch (1,0) bezeichnet[1]) und so folgt aus (4)

$$(5)\qquad \frac{-\pi\left[1-e^{2\pi i\alpha}\right]\left[1-e^{-2\pi i s}\right]}{\sin\pi s\;\Pi(s)}\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda z^\lambda$$

$$=\int_{(1,0)}\frac{t^{\alpha+1}}{(1-t)^{1+s}}\left\{\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa+1)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}\,a_\varkappa z^\varkappa t^\varkappa\right\}dt.$$

Setzt man $\alpha=\alpha_1-s_1$, $s=-s_1$, so enthält der Integrand die Reihe, deren Koeffizient $\frac{\Pi(\alpha_1+\varkappa+1)}{\Pi(\alpha_1-s_1+\varkappa+1)}\,a_\varkappa$ ist. Bezeichnet man

1) L. Schlesinger, Differentialgleichungen, S. Schubert XIII, pag. 156, 157.

$a_\varkappa = \frac{\Pi(\alpha_1 - s_1 + \varkappa + 1)}{\Pi(\alpha_1 + \varkappa + 1)} b_\varkappa$, so entsteht, wenn der Index 1 wieder weggelassen wird, die Formel

$$(6) \qquad [1 - e^{2\pi i(\alpha - s)}][1 - e^{2\pi i s}]\, \Pi(s-1) \sum_{\varkappa=0}^{\infty}{}' \frac{\Pi(\alpha - s + \varkappa + 1)}{\Pi(\alpha + \varkappa + 1)} b_\varkappa z^\varkappa$$

$$= \int_{(1,0)} \frac{t^{\alpha - s + 1}}{(1-t)^{1-s}} \left(\sum_{\varkappa=0}^{\infty} b_\varkappa z^\varkappa t^\varkappa \right) dt.$$

Diese beiden Formeln (5) und (6) kann man ansehen als die Verallgemeinerung der Abel'schen Formeln für einen Integrationsweg im Gebiet der komplexen Variabeln. Wendet man statt der obigen Substitution die folgende an

$$\alpha = \alpha_1 - s_1 - 1 \quad ; \qquad s = -s_1 - 1$$

so gelangt man in entsprechender Weise zur Formel

$$(7) \qquad [1 - e^{2\pi i(\alpha - s)}][1 - e^{2\pi i s}]\, \Pi(s) \sum_{\varkappa=0}^{\infty}{}' \frac{\Pi(\alpha - s + \varkappa)}{\Pi(\alpha + \varkappa + 1)} b_\varkappa z^\varkappa$$

$$= \int_{(1,0)} \frac{t^{\alpha - s}}{(1-t)^{-s}} \left(\sum_{\varkappa=0}^{\infty} b_\varkappa z^\varkappa t^\varkappa \right) dt.$$

Diese kleine Abänderung ermöglicht, wenn $R(\alpha) > -2$; $-1 < R(s) < 0$; $R(\alpha - s) > -1$ und die Strecke 01 der Elementarfläche angehört, die Integrale in (5) und (7) zu reduzieren auf solche, deren Integrationsweg die Strecke 01 ist. Die Substitution $t = \frac{u}{z}$ führt dann auf die bei Abel vorkommende Gestalt.

Durch denselben Gedankengang habe ich ähnliche Formeln abgeleitet, bei denen als Bestandteil im Integranden an Stelle der Funktion $y_1 = (1-x)^s$ in (5) eine Lösung der Gauss'schen Differentialgleichung auftritt.

Von Anwendungen der Formeln (5) (6) ist besonders die auf die Gauss'sche Reihe $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z)$ in die Augen springend, wozu man in (5) zu setzen hat $\alpha = \beta_1 - 2$, $s = \beta_1 - \gamma_1$. Man erhält dadurch sofort die Integraldarstellungen der Lösungen der Gauss'schen Differentialgleichung.

Ein Vergleich mit der ersten Hälfte der an den Anfang gestellten Borel'schen Formel ist sehr lehrreich. Während das von Herrn Borel benutzte Integral in einem relativ beschränkten Gebiet, dem „polygone de sommabilité" konvergiert, ist das Integral der Formel (5) fähig, die Funktion in ihrem ganzen Existenzgebiet darzustellen, wodurch sogar der von Herrn Mittag-Leffler geforderte grösste Bereich[1]) übertroffen wird.

3. Wenn eine oder beide der Zahlen α, s eine ganze reelle Zahl ist, so bleibt die Doppelschleife (1,0) nicht immer anwendbar. Es sei α weder 0 noch eine ganze reelle Zahl, die Stelle 1 Pol und $s = 0$. Die Doppelschleife zerfällt in einen positiven Umlauf um $+1$ in einem Zweige von t^α und einen negativen Umlauf um $+1$ im folgenden Zweige $t^\alpha \cdot e^{2\pi i \alpha}$, so dass das Resultat übereinkommt mit einem positiven Umlauf um $+1$, bezeichnet durch U^+, multipliziert mit dem Faktor $1 - e^{2\pi i \alpha}$. So gelangt man zu

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda z^\lambda \int_{U^+} \frac{t^\alpha\, dt}{1-t} = \int_{U^+} \frac{t^{\alpha+1}\left[\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda z^\lambda t^\lambda\right]}{1-t}\, dt.$$

Dies ist die Cauchy'sche Integralformel, die man so als ganz speziellen Fall der Abel'schen Formeln auffassen kann.

4. Ich wähle jetzt die in Formel (3) eingeführten Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ wie folgt:

$a_{\varkappa\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2
$\varkappa = 0$	0	0	0
1	$\frac{\alpha+1-s}{\alpha+2}\, a_0$	0	0
2	$\frac{(\alpha+1-s)(\alpha+2-s)}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\, a_0$	$\frac{(\alpha+1-s)(\alpha+2-s)}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\, a_1$	0
.	.	.	.

Wenn dann $R(\alpha) > -2$, erhalte ich aus (2)

$$(8) \qquad (1-x)^{-s} x^{\alpha+1} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{\Pi(\alpha - s + \varkappa)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}\, x^\varkappa \left(\sum_{\lambda=0}^{\varkappa-1} a_\lambda z^\lambda\right)$$

$$= \int_0^x \frac{t^{\alpha+1}\, dt}{(1-t)^{1+s}} \left\{\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{\Pi(\alpha - s + \varkappa + 1)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}\, a_\varkappa z^\varkappa t^\varkappa\right\}$$

Benutzt man diese Gleichung auch für $z = 0$, so erhält man für den Mittelwert

---

[1]) G. Mittag-Leffler, Acta Math. 23, S. 45.
G. Mittag-Leffler, Acta Math. 26, S. 355/356.

$$(9)\qquad M(x,z)=\frac{\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}\left[\sum_{\lambda=0}^{\varkappa-1}a_\lambda z^\lambda\right]x^{\varkappa+\alpha+1}}{\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}x^{\varkappa+\alpha+1}}=$$

$$=\frac{\Pi(\alpha+1)\int_0^x\frac{t^{\alpha+1}\,dt}{(1-t)^{1+s}}\left\{\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa+1)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}a_\varkappa z^\varkappa t^\varkappa\right\}}{\Pi(\alpha-s+1)\int_0^x\frac{t^{\alpha+1}\,dt}{(1-t)^{1+s}}}.$$

Die Wahl der Koeffizienten a_λ und des Parameters z muss so getroffen sein, dass

$$(10)\qquad H(x,z)=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa+1)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}a_\varkappa z^\varkappa x^{\varkappa+1}=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}D_\varkappa x^\varkappa$$

in bezug auf x eine Potenzreihe mit nicht verschwindendem Konvergenzradius ist. Nun besitzt die durch die spezielle Gauss'sche Reihe

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa+1)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}x^\varkappa=\frac{\Pi(\alpha-s+1)}{(s-1)\,\Pi(\alpha)}x^{-1-\alpha}F(1-s,-\alpha,2-s,1-x)+$$
$$+\Pi(-s)\,x^{-1-\alpha}(1-x)^{s-1}$$

definierte Funktion die singulären Stellen 0, 1, ∞. Es besitzt also $H(x,z)$ diejenigen Werte zu singulären Stellen, die man erhält durch Multiplikation der Singularitäten der Funktion $\sum_{\lambda=0}^{\infty}[a_\lambda z^\lambda]x^\lambda$ mit 0, 1, ∞. Sind die singulären Stellen der Funktion $\sum_0^\infty a_\lambda z^\lambda$ mit s_μ bezeichnet, so sind diejenigen von $\sum_0^\infty a_\lambda z^\lambda x^\lambda$, als Funktion von x betrachtet $\frac{s_\mu}{z}$. Der Hauptstern S_1, der zur Reihe (10) gehört, entsteht also aus demjenigen S, der zu $\sum_0^\infty a_\lambda z^\lambda$ gehört dadurch, dass dieser als Ganzes gedreht wird, und dass sämtliche Vektorenlängen, vom Mittelpunkt aus gemessen, im gleichen Verhältnis verändert werden. Hieraus geht hervor, dass die oben angegebene Beschränkung für die Wahl der a_λ und des z gleichbedeutend ist mit der Bedingung, dass $\sum_0^\infty a_\lambda z^\lambda$ eine Reihe mit nicht verschwindendem Konvergenzradius ist. Aus dem Zusammenhang, der zwischen $V(x)$ und $\psi(x)$ besteht, geht endlich noch hervor, dass der Hauptstern der Potenzeihe von x:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)}\left[\sum_{\lambda=0}^{\varkappa-1}a_\lambda z^\lambda\right]x^\varkappa$$

besteht aus dem Hauptstern S_1, dem der Schnitt $1\ldots\infty$ zugefügt wurde.

Es sei jetzt z_1 ein Wert von z, innerhalb des Konvergenzkreises von $\sum\limits_0^\infty a_\lambda z^\lambda$ oder eine Stelle auf ihm, derart dass $\sum\limits_{x=0}^\infty \frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa+1)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)} a_\varkappa z_1^\varkappa$ konvergiert. Wenn dann noch $R(s)<0$, so kann in der Formel (9) zur Grenze $x=1$ übergegangen werden, da die Integrale der rechten Seite konvergieren. Daher

$$\lim_{x=1} M(x,z) = \left[\Pi(-s-1)\right]^{-1} \int\limits_0^1 \frac{t^{\alpha+1}dt}{(1-t)^{1+s}} \left\{ \sum_{\varkappa=0}^\infty \frac{\Pi(\alpha-s+\varkappa+1)}{\Pi(\alpha+\varkappa+1)} a_\varkappa z^\varkappa t^\varkappa \right\} = \sum_{\lambda=0}^\infty a_\lambda z^\lambda .$$

Wenn z_1 ein Wert von z ausserhalb des Konvergenzkreises von $\sum\limits_0^\infty a_\lambda z^\lambda$ ist, so konvergiert der Zähler des Mittelwertes nur noch in einem Kreise, dessen Radius kleiner als 1 ist und von dem Grenzübergang $\lim x=1$ kann nicht mehr gesprochen werden.

Anders verhält sich dagegen das Integral rechts in (9). Dem Vektor $0\ldots z_1$ in S entspricht der Vektor $0\ldots 1$ in S_1. Die durch $H(x,z_1)$ definierte Funktion verhält sich daher regulär in der Umgebung jeder Stelle dieser Strecke $0\ldots 1$, Endpunkte inbegriffen. Dies ist aber gerade der Integrationsweg des Integrals in (9) und somit konvergiert dieses Integral für jeden Wert z, der im Innern des Hauptsterns S der Reihe $\sum\limits_0^\infty a_\lambda z^\lambda$ liegt. Hierbei hat man aber von der Fortsetzbarkeit der Reihe $H(x,z_1)$ längs der Strecke $x=0\,.\,.\,1$ Gebrauch gemacht, was ein wesentlicher Unterschied ist gegenüber den von Herrn Borel und Herrn Mittag-Leffler benutzten bestimmten Integralen. Während diese Fortsetzung bei einzelnen Funktionen $H(x,z)$ ohne Mühe geleistet werden kann, wie bei den Integraldarstellungen für die Gauss'sche hypergeometrische Funktion, ist sie für andere Funktionen ja gerade die Aufgabe, die gelöst werden soll. Dies zeigt, dass derartige Integraldarstellungen den Funktionen angepasst werden müssen, auf die man sie anwenden will, und dass nicht jede der möglichen Formeln für alle Anwendungen gleich gut geeignet ist.

Ist endlich z_1 ein Wert derart, dass $\arg z_1 = \arg s_\mu$ und $|z_1|>|s_\mu|$, dann liegt auf dem Integrationsweg $0\ldots 1$ mindestens eine Singularität der Funktion $H(x,z_1)$. Aber es gibt Fälle, in denen dies die Konvergenz des Integrals nicht zerstört, und dann liefert das Integral mehr als einen Wert, die man mit den verschiedenen Zweigen der Funktion in Zusammenhang bringen kann.

5. Zum Schluss möchte ich erwähnen, dass man auch in den bisher ausgeschlossenen Fällen interessante Betrachtungen anstellen kann. So zum Beispiel ist die Formel (4) noch richtig, wenn man setzt: $s = n$, $\alpha = n + \nu - 1$, wo n und ν ganze positive Zahlen bedeuten. Der Integrationsweg jedoch erfordert besondere Überlegungen, die ich ausgeführt habe für die von Heine, Handbuch der Kugelfunktionen[1]), betrachtete „zugeordnete Funktion erster Art" $P_\nu^n(x)$, die dargestellt ist durch

$$P_\nu^n(x) = \frac{2^n}{(-1)^\nu \Pi(2n)} \frac{u^\nu}{(1-v)^{n+1}} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{\Pi(\varkappa+n+\nu)\ \Pi(\varkappa+n)}{\Pi(\varkappa)\ \Pi(\varkappa+\nu)} u^{2\varkappa},$$

wobei $$v = \frac{1-x}{2}, \quad \frac{v}{v-1} = u^2.$$

Diese Reihe ist anwendbar für jeden ganzen positiven Wert von n und ν. Man findet bei $\nu \leqq n$, wenn C^+ einen einfachen positiven Umlauf um die Stelle $x = \frac{1}{u}$ bedeutet

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{\Pi(\varkappa+n+\nu)\ \Pi(\varkappa+n)}{\Pi(\varkappa)\ \Pi(\varkappa+\nu)} u^{2\varkappa+\nu} = \frac{-1}{2\pi i} \frac{[\Pi(n)]^2}{[-u]^{n+1}} \int_{C^+} \frac{x^{n+\nu}\,dx}{\left[\left(1-\frac{x}{u}\right)(1-ux)\right]^{n+1}}.$$

Dieses Integral verdient Beachtung, weil sein Bau analog ist demjenigen eines wichtigen Integrals in der Theorie der Zylinderfunktionen. Von da gelangt man leicht zur Formel[2])

$$\pi P_\nu^n(x) = \frac{(-1)^\nu 2^n [\Pi(n)]^2}{\Pi(2n)} \int_0^\pi \frac{\cos\nu\varphi\ d\varphi}{\left[x + \cos\varphi\sqrt{x^2-1}\right]^{n+1}}$$

mit den Bedingungen $\nu \leqq n \ ; \ R(x) > 0.$

Auch den Fall, dass α eine negative ganze Zahl bedeutet, habe ich in Betracht gezogen, worüber bei anderer Gelegenheit Mitteilung erfolgen wird.

Küsnacht, Frühjahr 1916.

---

1) Zweite Aufl. Definition S. 206; Darstellung S. 221.

2) Heine, Handbuch S. 207.