Neuer Beweis für die Darstellbarkeit definiter biquadratischer Funktionen als Summe von fünf Quadraten.

Von

WERNER WOLFF.

Herr Landau[1]) hat den Satz bewiesen, dass jede definite biquadratische Funktion einer Variabeln mit rationalen Koeffizienten sich als Summe von sechs Quadraten von Funktionen mit rationalen Koeffizienten darstellen lässt. An den Beweis dieses Satzes schliesst Herr Fleck[2]) an und zeigt, dass jede solche Funktion sich schon in eine Summe von fünf Quadraten zerlegen lässt. Der im Folgenden auseinandergesetzte neue Beweis dieses Satzes von der Darstellbarkeit jeder definiten biquadratischen Funktion als Summe von fünf Quadraten, trachtet danach, einfacher als der Flecksche zu sein, und stützt sich ebenfalls auf die genannte Arbeit von Herrn Landau. Er wird die komplizierteren Fälle durch linear gebrochene Substitutionen auf die einfacher zu erledigenden zurückführen, und indem dieses Verfahren ausgiebig angewendet wird, gestaltet sich der Beweis des Fleckschen Satzes wesentlich übersichtlicher.

Die Anregung dieser Arbeit verdanke ich Herrn Landau, der auch bei ihrer endgültigen Gestaltung mir mit wertvollem Rat zur Seite stand. Ich spreche hier Herrn Landau meinen besten Dank aus.

§ 1.

Wir wollen von vornherein festsetzen, dass wenn die Ausdrücke: „eine definite Funktion ist als Summe von Quadraten darstellbar" oder „sie ist in eine gewisse Anzahl von Quadraten zerlegbar", der Kürze wegen gebraucht werden, dass dies stets heissen soll: die definite Funktion ist darstellbar als Summe von Quadraten mit rationalen Koeffizienten (z. B.: jede positive rationale Zahl ist in vier Quadrate zerlegbar).

---

[1]) Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. 7, 1904, S. 271—277. (Hier kommen in Betracht: S. 275—277).

[2]) Archiv d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 10, 1906, S. 23—38 u. S. 378; und ebendort 3. Reihe, Bd. 16, 1910, S. 275—276.

Wir wollen nun ausgehen von der definiten biquadratischen Funktion:

$$f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e,$$

in der die Koeffizienten a, b, c, d und e rationale Zahlen bedeuten. Wenn wir sagen $f(x)$ sei definit, so soll das heissen, dass für jedes reelle x

$$f(x) \geqq 0$$

ist. Es darf $a \gtreqless 0$ angenommen werden, da sonst die Funktion höchstens vom Grad 2 ist, und Herr Landau [1]) hat den Satz bewiesen, dass jede definite quadratische Funktion in fünf Quadrate zerlegbar ist. Aus $a \gtreqless 0$ folgt aber

$$a > 0.$$

Wir führen in $f(x)$ die Substitution

$$x = \frac{\alpha\,y + \beta}{\gamma\,y + \delta}$$

aus, wo α, β, γ und δ rationale Zahlen sind, deren Determinante $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma$ ungleich Null ist. Es ist dann

$$f\left(\frac{\alpha\,y+\beta}{\gamma\,y+\delta}\right) = a\left(\frac{\alpha\,y+\beta}{\gamma\,y+\delta}\right)^4 + b\left(\frac{\alpha\,y+\beta}{\gamma\,y+\delta}\right)^3 + c\left(\frac{\alpha\,y+\beta}{\gamma\,y+\delta}\right)^2 +$$
$$+ d\left(\frac{\alpha\,y+\beta}{\gamma\,y+\delta}\right) + e,$$

und wenn wir mit $(\gamma\,y + \delta)^4$ erweitern:

$$F(y) = (\gamma\,y + \delta)^4 \cdot f\left(\frac{\alpha\,y+\beta}{\gamma\,y+\delta}\right) = a\,(\alpha y + \beta)^4 + b\,(\alpha y + \beta)^3\,(\gamma y + \delta) +$$
$$+ c\,(\alpha\,y + \beta)^2\,(\gamma\,y + \delta)^2 + d\,(\alpha\,y + \beta)\,(\gamma\,y + \delta)^3 + e\,(\gamma\,y + \delta)^4.$$

Ordnen wir nach Potenzen von y, so können wir schreiben:

$$F(y) = a'\,y^4 + b'\,y^3 + c'\,y^2 + d'\,y + e',$$

und hier sind die Koeffizienten wieder rationale Zahlen. Ist jetzt diese neu entstandene Funktion $F(y)$ als Summe von fünf Quadraten darstellbar, so folgt auch das gleiche für die ursprüngliche Funktion $f(x)$. Nämlich wenn

$$F(y) = \sum_{i=1}^{5} (r_i\,y^2 + s_i\,y + t_i)^2$$

ist, r_i, s_i, t_i rationale Zahlen, so übe man die inverse Substitution

$$y = \frac{\delta\,x - \beta}{-\gamma\,x + \alpha}$$

aus. Dann wird aus $F(y)$:

$$\left(\gamma\,\frac{\delta\,x - \beta}{-\gamma\,x + \alpha} + \delta\right)^4 f(x) = \sum_{i=1}^{5}\left\{r_i\left(\frac{\delta\,x - \beta}{-\gamma\,x + \alpha}\right)^2 + s_i\,\frac{\delta\,x - \beta}{-\gamma\,x + \alpha} + t_i\right\}^2.$$

[1]) Archiv d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 7, 1904, S. 273—275.

Erweitert man mit $(-\gamma x + \alpha)^4$, so folgt:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^4 f(x) = \sum_{i=1}^{5} \Big\{ r_i (\delta x - \beta)^2 + s_i (\delta x - \beta)(-\gamma x + \alpha) + \\ + t_i (-\gamma x + \alpha)^2 \Big\}^2,$$

und hieraus ergibt sich schliesslich:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{5} (r_i^* x^2 + s_i^* x + t_i^*)^2,$$

wo r_i^*, s_i^*, t_i^* rationale Zahlen sind. Wenn also der Satz, den wir beweisen wollen, für die durch die Substitution $x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$ entstandene Funktion $F(y)$ gilt, so gilt er auch für die ursprüngliche Funktion $f(x)$.

Nachdem dies vorausgeschickt worden ist, können wir über $f(x)$ verschiedene Annahmen machen, ohne die Allgemeinheit einzuschränken. Zuerst können wir voraussetzen, dass in

$$f(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$$

der Koeffizient b Null ist. Denn wäre b von Null verschieden, so würde die rationalzahlige Substitution $x = y - \frac{b}{4a}$ eine definite biquadratische Funktion ohne kubisches Glied ergeben, und ist diese letztere dann in fünf Quadrate zerlegbar, so ist es auch die ursprüngliche.

Ferner können wir annehmen, dass die Funktion

$$f(x) = a x^4 + c x^2 + d x + e$$

keine mehrfache reelle oder komplexe Wurzel besitzt, also insbesondere (weil es definit ist) keine reelle Wurzel besitzt. Andernfalls hätte $f(x)$ nämlich die Gestalt

$$f(x) = g^2(x) \cdot h(x),$$

wo $h(x)$ definit quadratisch oder konstant ist, sodass also $h(x)$ in fünf Quadrate zerlegbar wäre. Es würde dann das gleiche für $f(x)$ folgen. Dann lautet der Landausche Satz[1]), den wir später gebrauchen werden:

Für jede definite biquadratische Funktion mit rationalzahligen Koeffizienten, ohne mehrfache Wurzeln und ohne kubisches Glied,

[1]) Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 7, 1904, S. 275—277.

haben alle rationalen Grössen $\varkappa$ eines endlichen Intervalles, das die Null nicht enthält, die Eigenschaft, dass

$$\varphi(x) = f(x) - \left(\varkappa x + \frac{d}{2\varkappa}\right)^2 = a\,x^4 + (c - \varkappa^2)\,x^2 + e - \frac{d^2}{4\varkappa^2}$$

in $x^2 = u$ definit wird.

Dieser Satz ist algebraisch einfach zu beweisen.

Nun können wir weiter annehmen, dass die Koeffizienten von $f(x)$ ganze Zahlen sind, indem wir im andern Falle schreiben würden:

$$f(x) = \frac{1}{N^2}(N^2\,a\,x^4 + N^2\,c\,x^2 + N^2\,d\,x + N^2 e) = \frac{1}{N^2} f_1(x),$$

wo N der gemeinsame Nenner der rationalen Zahlen a, c, d, e ist. Ist $f_1(x)$ in fünf Quadrate zerlegbar, so folgt aus obiger Gleichung dasselbe für $f(x)$.

Schliesslich werden wir zeigen, dass noch angenommen werden kann, dass der Koeffizient d von Null verschieden ist. Es sei also $d = 0$, und ich will zeigen, dass ich diesen Fall auf den Fall $d \neq 0$, nebst $b = 0$ und rationalen ganzen a, c, d, e zurückführen kann. Es sei demnach:

$$f(x) = a\,x^4 + c\,x^2 + e.^{1)}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

I. Es sei $4\,a\,e - c^2 = 0$. Dann würde für

$$f(x) = a\,x^4 + c\,x^2 + e = a\left(x^2 + \frac{c}{2a}\right)^2$$

die Zerlegung in vier Quadrate ohne weiteres folgen; denn da a eine positive ganze rationale Zahl ist, so ist a in vier Quadrate zerlegbar und also auch $f(x)$.

II. Es sei $4\,a\,e - c^2 \gtreqless 0$. Ich führe hier die Substitution

$$x = \frac{\alpha\,y + \beta}{\gamma\,y + \delta}$$

in $f(x)$ aus, wo α, β, γ, δ ganze Zahlen bedeuten sollen, deren Determinante ungleich Null ist. Dann betrachte ich, wie es früher geschehen ist, die Funktion

$$F(y) = a(\alpha\,y + \beta^4) + c\,(\alpha\,y + \beta)^2\,(\gamma\,y + \delta)^2 + e\,(\gamma\,y + \delta)^4 =$$
$$= a'\,y^4 + b'\,y^3 + c'\,y^2 + d'\,y + e',$$

[1]) Auch wenn $f(x) = a\,x^4 + c\,x^2 + e$ definit ist, so braucht $f(u) = a\,u^2 + c\,u + e$ nicht auch definit zu sein, sodass wir diese quadratische Funktion nicht dazu benützen können, um die Zerlegung der biquadratischen Funktion $f(x)$ in fünf Quadrate nachzuweisen. Wir wissen ja, dass jede quadratische definite Funktion so zerlegbar ist. (Vergl. § 1.) Siehe Fleck, Berichtigung: Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 16, 1910, S. 275—276.

wo a', b', c', d', e' ganz sind. Wenn ich zeigen kann, dass ich die Substitutionskoeffizienten so wählen kann, dass $b' = 0$ und $d' \neq 0$ ist, so habe ich nach dem Vorausgeschickten den Fall $d = 0$ auf den Fall $d \neq 0$ zurückgeführt. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$b' = 4\,a\,\alpha^3\,\beta + 2\,c\,(\alpha^2\,\gamma\,\delta + \alpha\,\beta\,\gamma^2) + 4\,e\,\gamma^3\,\delta,$$
$$d' = 4\,a\,\alpha\,\beta^3 + 2\,c\,(\alpha\,\beta\,\delta^2 + \beta^2\,\gamma\,\delta) + 4\,e\,\gamma\,\delta^3.$$

In b' kommen β und δ getrennt und linear vor:

$$b' = (4\,a\,\alpha^3 + 2\,c\,\alpha\,\gamma^2)\,\beta + (2\,c\,\alpha^2\,\gamma + 4\,e\,\gamma^3)\,\delta.$$

Setzt man also

$$\beta = -(2\,c\,\alpha^2\,\gamma + 4\,e\,\gamma^3)$$
$$\delta = +(4\,a\,\alpha^3 + 2\,c\,\alpha\,\gamma^2),$$

so wird b' verschwinden. Hier sind α und γ noch beliebig zu wählende ganze Zahlen, nur soll die Determinante

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 4\,a\,\alpha^4 + 4\,c\,\alpha^2\,\gamma^2 + 4\,e\,\gamma^4$$

nicht verschwinden. In diesem Ausdruck sind nicht alle Koeffizienten Null, so dass es sicherlich ganze Zahlen α, γ gibt, für welche $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0$ ist. Das wird so gemacht, dass man γ gleich einer festen Zahl setzt, z. B. 1, und für α irgend eine ganze Zahl von einer gewissen Stelle an wählt. Gerade dies ist wesentlich, da nachher für α eine weitere Bedingung zu erfüllen ist.

Die Werte für β und δ setzen wir in den Ausdruck für d' ein und erhalten:

$$d' = -4\,a\,\alpha\,(2\,c\,\alpha^2\gamma + 4\,e\,\gamma^3)^3 - 2\,c\,\alpha\,(2\,c\,\alpha^2\,\gamma + 4\,e\,\gamma^3)\,(4\,a\,\alpha^3 + 2\,c\,\alpha\,\gamma^2)^2 +$$
$$+ 2\,c\,\gamma\,(2\,c\,\alpha^2\,\gamma + 4\,e\,\gamma^3)^2\,(4\,a\,\alpha^3 + 2\,c\,\alpha\,\gamma^2) + 4\,e\,(4\,a\,\alpha^3 + 2\,c\,\alpha^2\,\gamma)^3.$$

Hierin tritt α in der höchsten Potenz in den Termen $\alpha^9\,\gamma$ auf und zwar ergeben bei Ausmultiplikation der zweite und letzte Summand Terme, die mit $\alpha^9\,\gamma$ multipliziert sind. Man findet als Koeffizient von $\alpha^9\,\gamma$

$$4^4\,a^3\,e - 4^3\,a^2\,c^2 = 4^3\,a^2\,(4\,a\,e - c^2),$$

und da $a > 0$ ist und $4\,a\,e - c^2 \gtrless 0$, so ist dieser Koeffizient von Null verschieden, und daher kann d' Werte annehmen, die ungleich Null sind. Das kann so gemacht werden, dass man $\gamma = 1$ setzt und α so gross wählt, dass sowohl die Determinante $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma$ als auch d' von Null verschieden werden.

Demnach kann im folgenden in

$$f(x) = a\,x^4 + c\,x^2 + d\,x + e$$

d von Null verschieden angenommen werden und $a > 0$; a, c, d, e ganzzahlig.

§ 2.

Nach dem Landauschen Satz konnten wir schreiben:

$$\varphi(x) = f(x) - \left(\varkappa x + \frac{d}{2\varkappa}\right)^2 = a\,x^4 + (c - \varkappa^2)\,x^2 + e - \frac{d^2}{4\varkappa^2},$$

wobei $\varphi(x)$ definit in $x^2 = u$ ist. Wie a so ist auch e grösser als Null, denn $f(0) \neq 0$, weil $f(x)$ keine reelle Wurzel hat. Wenn ich also zeigen kann, dass $\varphi(x)$ als Summe von vier Quadraten darstellbar ist, so folgt daraus die Zerlegung von $f(x)$ in fünf Quadrate. Um dies zu zeigen, schreiben wir:

$$\varphi(x) = a\left\{\left(x^2 + \frac{c-\varkappa^2}{2a}\right)^2 + \frac{1}{a}\left(e - \frac{d^2}{4\varkappa^2}\right) - \left(\frac{c-\varkappa^2}{2a}\right)^2\right\}$$
$$= a\left\{\left(x^2 + \frac{c-\varkappa^2}{2a}\right)^2 + \frac{4\,a\,e\,\varkappa^2 - a\,d^2 - (c-\varkappa^2)^2\,\varkappa^2}{4\,a^2\,\varkappa^2}\right\}.$$

a ist immer als Summe von vier Quadraten darstellbar. Wenn ich demnach zeigen kann, dass der Ausdruck in der Klammer in vier Quadrate zerfällbar ist, so folgt das gleiche auch für $\varphi(x)$, denn es besteht die bekannte Identität:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) =$$
$$= (a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 + a_4\,b_4)^2 + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1 + a_3\,b_4 - a_4\,b_3)^2 +$$
$$+ (a_1\,b_3 - a_2\,b_4 - a_3\,b_1 + a_4\,b_2)^2 + a_1\,(b_4 + a_2\,b_3 - a_3\,b_2 - a_4\,b_1)^2,$$

nach der ein Produkt aus zwei Summen von je vier Quadraten rationalzahliger Funktionen stets als eine Summe dergleichen Art darstellbar ist. Um den Fleckschen Satz zu beweisen, ist es also hinreichend zu zeigen, dass die Grösse

$$\Phi = \frac{4\,a\,e\,\varkappa^2 - a\,d^2 - (c-\varkappa^2)^2\,\varkappa^2}{4\,a^2\,\varkappa^2} = \frac{(4\,a\,e - c^2)\,\varkappa^2 + 2\,c\,\varkappa^4 - \varkappa^6 - a\,d^2}{4\,a^2\,\varkappa^2}$$

selbst oder die durch eine Substitution $x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$ in $f(x)$ transformierte Grösse Φ durch geeignete Wahl von $\varkappa$, wobei $\varphi(x)$ definit in x^2 bleibt, in drei Quadrate zerlegt werden kann. Kann ich dieses von

$$\Phi_1 = (4\,a\,e - c^2)\,\varkappa^2 + 2\,c\,\varkappa^4 - \varkappa^6 - a\,d^2$$

zeigen, so gilt es auch für Φ, und setzt man

$$\varkappa = \frac{l}{m},$$

wo l und m ganze Zahlen sind, so genügt es diesen Umstand für

$$\Phi_2 = (4\,a\,e - c^2)\,l^2\,m^4 + 2\,c\,l^4\,m^2 - l^6 - a\,d^2\,m^6$$

nachzuweisen.[1])

Zu beachten ist noch, dass $\varphi(x)$ stets definit in $x^2 = u$ bleibt, solange sich $\varkappa$ als rationale Zahl in einem ganzen endlichen Intervall bewegt. Wir hatten $\varkappa = \frac{l}{m}$ gesetzt und wir werden im folgenden

$$l = 2^\nu\,(8\,p + r_1),$$
$$m = 8\,q + r_2$$

setzen, also

$$\varkappa = \frac{l}{m} = \frac{2^\nu\,(8\,p + r_1)}{8\,q + r_2},$$

wo p und q irgendwelche frei verfügbare ganze Zahlen bedeuten, ν eine feste positive ganze Zahl ist, und r_1 und r_2 eine feste der Zahlen 1, 3, 5, 7 bedeuten. Nun liegen die rationalen Zahlen von der Form

$$\frac{2^\nu\,(8\,p + r_1)}{8\,q + r_2}$$

überall dicht verteilt. Denn in jedem noch so kleinen Intervall von der Breite ε liegt eine Zahl obiger Form. Wir brauchen dazu nämlich nur zu zeigen, dass eine Zahl von der Form $\frac{8\,p + r_1}{8\,q + r_2}$ in dem Intervall von der Breite $\frac{\varepsilon}{2^\nu} = \varepsilon'$ liegt. Wir wählen für q eine so grosse Zahl, dass $\frac{1}{q} < \varepsilon'$ ist. Dann liegen zwei aufeinander folgende Zahlen $\frac{8\,p + r_1}{8\,q + r_2}$ und $\frac{8\,(p + 1) + r_1}{8\,q + r_2}$ in dem Abstand $\frac{8}{8\,q + r_2}$ von einander entfernt, der nach der Wahl von q kleiner als ε' ist. Daher muss es ein p geben, sodass $\frac{8\,p + r_1}{8\,q + r_2}$ in das Intervall von der Breite ε' fällt und folglich fällt auch die Zahl $\frac{2^\nu(8\,p + r_1)}{8\,q + r_2}$ in das Intervall von der Breite ε. Das Intervall, indem sich $\varkappa$ als rationale Zahl bewegen kann, ohne dass $\varphi(x)$ aufhört definit in $x^2 = u$ zu sein, enthält demnach unendlich viele Zahlen der Form $\frac{2^\nu\,(8\,p + r_1)}{8\,q + r_2}$, und folglich kann $\varkappa = \frac{l}{m}$ selber als eine rationale Zahl dieser Form angenommen werden.

---

[1]) Auch Herr Fleck geht bei seinem Beweise von dieser Grösse Φ_2 aus. Es beginnt hier meine eigentliche Arbeit.

§ 3.

Wir haben von der Grösse

$$\Phi_2 = (4\,a\,e - c^2)\,l^2\,m^4 + 2\,c\,l^4\,m^2 - l^6 - a\,d^2\,m^6$$

auszugehen. ad^2 ist von Null verschieden, und ich ziehe aus dieser Zahl die höchste Potenz von 4 hinaus und schreibe:

$$a\,d^2 = 2^{2\mu} A;\ A \equiv 1, 2, 3, 5, 6, 7 \pmod{8}.$$

Dann setze ich in Φ_2

$$l = 2^{\mu+2} L \text{ und } m = M$$

ein, wo L und M ungerade Zahlen bedeuten, über die noch verfügt werden wird. So ergibt sich:

$$\Phi_2 = \left(4a\cdot e - c^2\right) 2^{2\mu+4} L^2 M^4 + 2c\cdot 2^{4\mu+8} L^4 M^2 - 2^{6\mu+12} L^6 - 2^{2\mu} A M^6$$
$$= 2^{2\mu}\left\{\left(4\,a\,e - c^2\right) 2^4 L^2 M^4 + 2c\cdot 2^{2\mu+8} L^4 M^2 - 2^{4\mu+12} L^6 - A M^6\right\}.$$

Φ_2 ist seiner Bedeutung nach positiv für alle solchen Wertpaare l, m, dass $\frac{l}{m}$ einem bestimmten Intervall angehört. Im andern Fall wäre dann auch Φ negativ und demnach $\varphi(x)$ nicht definit in x^2.

Ist nun $A \equiv 1$ (mod 8,) so erhält Φ_2 die Gestalt $2^{2\mu}(8n+7)$, und da bekanntlich nur die Zahlen von der Form

$$2^{2\mu}(8n+1),\ 2^{2\mu}(8n+2),\ 2^{2\mu}(8n+3),\ 2^{2\mu}(8n+5),\ 2^{2\mu}(8n+6)$$

in drei Quadrate zerlegbar sind, so muss dieser Fall später besonders behandelt werden. Ist dagegen

$$A \equiv 2, 3, 5, 6, 7 \pmod{8},$$

so erhält Φ_2 eine der obigen fünf Formen und ist also dann in drei Quadrate zerlegbar. Nach der am Schluss von § 2 gemachten Bemerkung bleibt $\varphi(x)$ bei dieser Bestimmung von $\varkappa = \frac{l}{m} = \frac{2^{2\mu} L}{M}$ definit in x^2, wenn nur L und M als ungerade Zahlen entsprechend gewählt werden.

So bleibt also alleine der Fall

$$ad^2 = 2^{2\mu} A,\ A \equiv 1 \pmod{8}$$

übrig. Zu diesem Hauptfall gehört z. B. $a = 1$; denn da d^2 von der Form $2^{2\nu}(8n+1)$ ist, so muss a hier die Gestalt $2^{2\alpha_1}(8n+1)$

haben. Aus den Koeffizienten c und d ziehen wir die höchste Potenz von 2 heraus und setzen:

$$\text{für } c \gtrless 0:\ c = 2^{c_1} c_2, \qquad (c_1 \geqq 0),$$

wobei c_2 eine ungerade Zahl ist. Ist $c = 0$, so verstehe man unter c_1 irgend eine positive ganze Zahl, während $c_2 = 0$ gesetzt wird. Ferner schreiben wir:

$$d = 2^{d_1} d_2, \qquad (d_1 \geqq 0),$$

wobei d_2 ungerade ist. Aus e ziehen wir die höchste Potenz von 4 heraus und setzen

$$e = 2^{2e_1} \cdot e_2,$$

wo e_2 nach dem Modul 8 die Reste 1, 2, 3, 5, 6, 7 lässt. Es ist also

$$f(x) = 2^{2a_1} a_2 x^4 + 2^{c_1} c_2 x^2 + 2^{d_1} d_2 x + 2^{2e_1} e_2,$$

wo a_1, c_1, d_1, e_1 ganze Zahlen grösser oder gleich Null sind; $a_2 \equiv 1 \pmod 8$ ist; c_2 und d_2 ungerade Zahlen sind; und e_2 ungerade oder höchstens durch die erste Potenz von 2 teilbar ist.

Hiebei kann nun für den Nachweis des Fleckschen Satzes angenommen werden, dass die Exponenten den Ungleichungen

$$\begin{aligned} 2a_1 &\geqq 2e_1 \\ c_1 &\geqq 2e_1 \\ d_1 &\geqq 2e_1 \end{aligned}$$

genügen. Denn wäre das nicht der Fall, so würde man eine Substitution $x = 2^{\varrho} y$, ϱ positiv und ganz, ausüben und hätte:

$$\begin{aligned} f(y) &= 2^{2a_1+4\varrho} a_2 y^4 + 2^{c_1+2\varrho} c_2 y^2 + 2^{d_1+\varrho} d_2 y + 2^{2e_1} e_2 \\ &= 2^{2a_1'} a_2 y^4 + 2^{c_1'} c_2 y^2 + 2^{d_1'} d_2 y + 2^{2e_1} e_2. \end{aligned}$$

Wird nun ϱ genügend gross gewählt, so gelten für die Exponenten dieser neuen Funktion die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 2a_1' &= 2a_1 + 4\varrho \geqq 2e_1, \\ c_1' &= c_1 + 2\varrho \geqq 2e_1, \\ d_1' &= d_1 + \varrho \geqq 2e_1. \end{aligned}$$

Ist diese neue Funktion in y in fünf Quadrate zerlegbar, so ist es auch die ursprüngliche, und diese transformierte Funktion erfüllt auch alle Voraussetzungen, die für $f(x)$ gegolten haben. a_2 ist unverändert geblieben, der Koeffizient von y ist wieder von Null verschieden, mehrfache Wurzeln sind sicherlich keine da.

Kehren wir zu den alten Bezeichnungen zurück, so lässt sich

$$f(x) = 2^{2a_1} a_2 x^4 + 2^{c_1} c_2 x^2 + 2^{d_1} d_2 x + 2^{2e_1} e_2$$

in der Form schreiben:

$$f(x) = 2^{2e_1} \{2^{2a_1 - 2e_1} a_2 x^4 + 2^{c_1 - 2e_1} c_2 x + 2^{d_1 - 2e_1} d_2 x + e_2\},$$

wobei die Exponenten von 2 positiv oder Null sind. Ist die Funktion in der Klammer in fünf Quadrate zerlegbar, so ist es auch $f(x)$. Wir können folglich $f(x)$ in der Gestalt annehmen:

$$f(x) = 2^{2a_1} a_2 x^4 + 2^{c_1} c_2 x^2 + 2^{d_1} d_2 x + e_2;$$

hiebei ist:

$$a_2 \equiv 1; \quad c_2 \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8, \text{ oder } c_2 = 0;$$
$$d_2 \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8; \; e_2 \equiv 1, 2, 3, 5, 6, 7 \pmod 8.$$

Wir führen nun in $f(x) = a x^4 + c x^2 + d x + e$ wieder eine Substitution aus:

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \quad \alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$$

und betrachten wie früher die Funktion

$$\begin{aligned} F(y) &= a(\alpha y + \beta)^4 + c(\alpha y + \beta)^2 (\gamma y + \delta)^2 + d(\alpha y + \beta)(\gamma y + \delta)^3 + \\ &\quad + e(\gamma y + \delta)^4 = \\ &= a' y^4 + b' y^3 + c' y^2 + d' y + e'. \end{aligned}$$

Es interessieren uns die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a' &= a \alpha^4 + c \alpha^2 \gamma^2 + d \alpha \gamma^3 + e \gamma^4. \\ b' &= 4 a \alpha^3 \beta + 2 c (\alpha^2 \gamma \delta + \alpha \beta \gamma^2) + d(3 \alpha \gamma^2 \delta + \beta \gamma^3) + 4 e \gamma^3 \delta. \\ d' &= 4 a \alpha \beta^3 + 2 c (\alpha \beta \delta^2 + \beta^2 \gamma \delta) + d(3 \beta \gamma \delta^2 + \alpha \delta^3) + 4 e \gamma \delta^3. \end{aligned}$$

Es soll $b' = 0$ sein. Wir können b' in der Form schreiben:

$$b' = (4 a \alpha^3 + 2 c \alpha \gamma^2 + d \gamma^3) \beta + (2 c \alpha^2 \gamma + 3 d \alpha \gamma^2 + 4 e \gamma^3) \delta,$$

und wird

$$\begin{aligned} \beta &= - \gamma (2 c \alpha^2 + 3 d \alpha \gamma + 4 e \gamma^2) \\ \delta &= \quad 4 a \alpha^3 + 2 c \alpha \gamma^2 + d \gamma^3 \end{aligned}$$

gesetzt, so wird $b' = 0$.

Jetzt wollen wir für α und γ je eine Bedingung festsetzen. Es sei

$$\alpha \equiv \alpha_0 \pmod 8,$$

wo α_0 eine positive ganze Zahl kleiner als 8 bedeutet. Ferner sei

$$\gamma = 2^{\gamma_1} \Gamma, \quad \Gamma \equiv \Gamma_0 \pmod 8,$$

wo γ_1 eine ganze Zahl grösser oder gleich Null bedeutet und Γ_0 eine positive ganze Zahl kleiner als 8. In Übereinstimmung mit diesen Bedingungen werden nun α und γ so bestimmt, dass erstens die Determinante

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 4\,a\,\alpha^4 + 4\,c\,\alpha^2\gamma^2 + 4\,d\,\alpha\,\gamma^3 + 4\,e\,\gamma^4$$

von Null verschieden ist (was sicherlich erreicht werden kann), und zweitens dass d' von Null verschieden wird, wenn man darin für β und δ die Ausdrücke in α und γ einsetzt. Es ist:

$$\begin{aligned} d' = & -4\,a\,\alpha\,\gamma^3(2\,c\,\alpha^2 + 3\,d\,\alpha\,\gamma + 4\,e\,\gamma^2)^3 - \\ & - 2\,c\,\alpha\,\gamma(2\,c\,\alpha^2 + 3\,d\,\alpha\,\gamma + 4\,e\,\gamma^2)\cdot(4\,a\,\alpha^3 + 2\,c\,\alpha\,\gamma^2 + d\,\gamma^3)^2 + \\ & + 2\,c\,\gamma^3(2\,c\,\alpha^2 + 3\,d\,\alpha\,\gamma + 4\,e\,\gamma^2)(4\,a\,\alpha^3 + 2\,c\,\alpha\,\gamma^2 + d\,\gamma^3) - \\ & - 3\,d\,\gamma^2(2\,c\,\alpha^2 + 3\,d\,\alpha\,\gamma + 4\,e\,\gamma^2)(4\,a\,\alpha^3 + 2\,c\,\alpha\,\gamma^2 + d\,\gamma^3)^2 + \\ & + d\,\alpha(4\,a\,\alpha^3 + 2\,c\,\alpha\,\gamma^2 + d\,\gamma^3)^3 + 4\,e\,\gamma(4\,a\,\alpha^3 + 2\,c\,\alpha\,\gamma^2 + d\,\gamma^3)^3. \end{aligned}$$

Hierin verschwinden nicht alle Koeffizienten, denn der Koeffizient von α^{10} z. B. ist $4^3\,a^3\,d$ (wie das zweitletzte Glied zeigt). So können wir also gleichzeitig $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma$ und auch d' durch α und γ, welche obigen Bedingungen genügen, von Null verschieden machen.

Wir durften $f(x)$ in der Form

$$f(x) = 2^{2\,a_1} a_2\,x^4 + 2^{c_1} c_2\,x^2 + 2^{d_1} d_2\,x + e_2.$$

annehmen und wir unterscheiden jetzt die zwei Fälle:

$$\text{I. } e_2 = e \equiv 2, 3, 5, 6, 7 \pmod 8.$$
$$\text{II. } e_2 = e \equiv 1 \pmod 8.$$

I. $e \equiv 2, 3, 5$ $6, 7 \pmod 8$.

Nach dem Ausführen obiger Substitution hatten wir

$$a' = a\,\alpha^4 + c\,\alpha^2\gamma^2 + d\,\alpha\,\gamma^3 + e\,\gamma^4.$$

Wird $\alpha \equiv 0$ und $\gamma \equiv 1 \pmod 8$ gesetzt, so wird $a' \equiv 2, 3, 5, 6, 7 \pmod 8$. Da d'^2 von Null verschieden gemacht worden ist und stets die Form $2^{2\mu}$ $(8n+1)$ hat, so hat $a' d'^2$ die Form $2^{2\mu} A'$; $A' \equiv 2$, 3, 5, 6, 7 (mod 8). Wir kommen also auf diese Weise auf die anfangs erledigten Fälle zurück; denn die durch die Substitution entstandene, neue Funktion erfüllt alle frühern Bedingungen.

II. $e = e_2 \equiv 1$ (mod 8).

In

$$f(x) = 2^{2a_1} a_2 x^4 + 2^{c_1} c_2 x^2 + 2^{d_1} d_2 x + e_2$$

können wir für die Exponenten $2a_1$, c_1, d_1 die Voraussetzung machen, dass wenigstens einer der drei Fälle

$$1.\ d_1 = 0, \quad 2.\ c_1 \leqq 1, \quad 3.\ 2a_1 \leqq 2$$

vorliegt. Denn wäre das nicht der Fall, d. h. wäre

$$d_1 > 0, \quad c_1 > 1, \quad 2a_1 > 2,$$

so könnten wir in $f(x)$ eine Substitution $x = 2^{-\varrho} y$, (ϱ positiv und ganz) ausüben, sodass aus $f(x)$

$$f(y) = 2^{2a_1 - 4\varrho} a_2 y^4 + 2^{c_1 - 2\varrho} c_2 y^2 + 2^{d_1 - \varrho} d_2 y + e_2$$

würde. Nun lasse man ϱ nach einander die Werte 0, 1, 2, 3, . . . durchlaufen, bis zum e r s t e n m a l einer der drei Exponenten oder auch mehrere negativ werden. Dieses trete bei ϱ_0 ein. Dann setze man $\varrho = \varrho_0 - 1$, und es treten dann auf diese Weise die drei Fälle ein, wie sie folgendes Tableau veranschaulicht:

	d_1	c_1	$2a_1$.
1.	0	0, 1, 2, . . .	0, 2, 4, . . .
2.	0, 1, 2, . . .	0, 1.	0, 2, 4, . . .
3.	0, 1, 2, . . .	0, 1, 2, . . .	0, 2.

Ist $c = 0$, so hat es keinen Sinn von Fall 2 zu sprechen, denn in $2^{c_1} c_2$ wird ja dann c_2 Null gesetzt und c_1 legt man irgend einen positiven ganzzahligen Wert bei. Wenn $c = 0$ ist, kommen also nur die Fälle 1 und 3 in Betracht.

1. $d_1 = 0$.

D. h.: $d = 2^{d_1} d_2 \equiv 1, 3, 5, 7$ (mod 8). Es war

$$a' = a\alpha^4 + c\alpha^2\gamma^2 + d\alpha\gamma^3 + e\gamma^4.$$

Setzt man hier $\alpha \equiv 4$ und $\gamma \equiv 1$, so wird a' die Gestalt $8n+5$ annehmen, so dass $a' d'^2$ Form $2^{2\mu}$ $(8n+5)$ bekommt. Wir werden also wieder auf einen der früher erledigten Fälle zurückgeführt, ohne dass die durch die Substitution entstandene, neue Funktion aufhört die gemachten Voraussetzungen zu erfüllen.

2. $d_1 > 0$, $c_1 \leq 1$, $c = 2^{c_1} c_2 \gtreqless 0$.

Es ist also $c = 2^{c_1} c_2 \equiv 1, 2, 3, 5, 6, 7 \pmod 8$.

a) $d_1 \geq 2$, $c_1 = 1$, $a_1 = 0$.

D. h., es ist:

$$c \equiv 2, 6, \quad a \equiv 1.$$

Wir gehen hier aus von:

$$\Phi_2 = (4\,a\,e - c^2)\,l^2\,m^4 + 2\,c\,l^4\,m^2 - l^6 - a\,d^2\,m^6$$

Da $e \equiv 1$ ist, so ist $4\,a\,e - c^2 \equiv 0$. Ferner ist $a\,d^2 = a \cdot 2^{2\,d_1}\,d_2^2 \equiv 0$. Wird $l \equiv 1$ und $m \equiv 1$ gesetzt, so bekommt Φ_2 die Form $8\,n + 3$, ist also in drei Quadrate zerlegbar.

b) $d_1 \geq 1$, $c_1 = 1$, exklusive Fall a).

Man setze $\alpha \equiv 1$ und $\gamma = 2^{a_1}\,\Gamma$, wo $\Gamma \equiv 1 \pmod 8$ ist. Dann wird aus

$$a' = 2^{2\,a_1}\,a_2\,\alpha^4 + 2\,c_2\,\alpha^2\,\gamma^2 + 2^{d_1}\,d_2\,\alpha\,\gamma^3 + e_2\,\gamma^4:$$

$$a' = 2^{2\,a_1}\,\{a_2\,\alpha^4 + 2\,c_2\,\alpha^2\,\Gamma^2 + 2^{d_1 + a_1}\,d_2\,\alpha\,\Gamma^3 + 2^{2\,a_1}\,e_2\,\Gamma^4\}.$$

Ist $a_1 = 0$ und $d_1 = 1$, so wird a' von der Form $8\,n + 2$ oder $8\,n + 6$.

(Ist $a_1 = 0$ und $d_1 \geq 2$, so kommen wir auf Fall a.)

Ist $a_1 \geq 1$ und $d_1 \geq 1$, so wird a' von der Form $2^{2\,a_1}(8\,n + 3)$ oder $2^{2\,a_1}(8\,n + 7)$.

c) $c_1 = 0$.

Es ist also $c = 2^{c_1} c_2 \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$. Man setze $\alpha \equiv 1$ und $\gamma = 2^{a_1 + 1}\,\Gamma$, $\Gamma \equiv 1$. Dann wird:

$$\begin{aligned} a' &= 2^{2\,a_1}\,\{a_2\,\alpha^4 + 2^2\,c_2\,\alpha^2\,\Gamma^2 + 2^{d_1 + a_1 + 3}\,d_2\,\alpha\,\Gamma^3 + 2^{2\,a_1 + 4}\,\Gamma^4\} \\ &= 2^{2\,a_1}\,(8\,n + 5). \end{aligned}$$

Somit ist auch Fall 2 auf schon erledigte Fälle zurückgeführt; entweder haben wir ein Φ_2 erhalten, das in drei Quadrate zerlegbar ist, oder aber nimmt $a'\,d'^2$ nicht die Form $2^{2\mu}(8\,n + 1)$ an, wobei ferner die durch die Substitution entstandene, neue Funktion alle frühern Voraussetzungen erfüllt.

3. $d_1 > 0$, $c_1 > 1$, $2\,a_1 \leqq 2$.

a) $d_1 = 1$, $a_1 = 0$.

D. h.: $a = 2^{2\,a_1}\,a_2 \equiv 1 \pmod 8$. Dann setze man $\alpha = 2\,A$, $A \equiv 1$ und $\gamma \equiv 1$. Dann wird:

$$a' = 2^4\,a\,A^4 + 2^2\,c\,A^2\,\gamma^2 + 2\,d\,A\,\gamma^3 + e\,\gamma^4.$$

Da $d \equiv 2, 6$ ist, und c durch 2 teilbar ist, so bekommt a' die Form $8\,n + 5$.

b) $d_1 > 1$, $a_1 = 0$.

d ist also mindestens durch 2^2 teilbar. Man setze $\alpha \equiv 1$ und $\gamma \equiv 1$, so dass

$$a' = a\,\alpha^4 + c\,\alpha^2\,\gamma^2 + d\,\alpha\,\gamma^3 + e\,\gamma^4$$

die Gestalt $8\,n + 2$ oder $8\,n + 6$ bekommt. Es ist ja hier $a \equiv 1$ und $e \equiv 1$.

c) $d_1 \geqq 3$; $c = 0$ oder wenn $c \neq 0$: $c_1 \geqq 3$; $2\,a_1 = 2$.

Man setze $\alpha \equiv 1$ und $\gamma \equiv 1$ und dann bekommt a' die Gestalt $8\,n + 5$, weil hier $a \equiv 4$, $c \equiv 0$ und $d \equiv 0$ ist.

d) $d_1 \geqq 3$; $c \neq 0$ und $c_1 = 2$; $2\,a_1 = 2$.

Es ist also $d \equiv 0$ und $c \equiv 4$. Hier müssen wir von

$$\Phi_2 = (4\,a\,e - c^2)\,l^2\,m^4 + 2\,c\,l^4\,m^2 - l^6 - a\,d^2\,m^6$$

ausgehen. Nun kann man setzen:

$$\begin{aligned} 4\,a\,e - c^2 &= 2^4 \cdot 8\,N, && N \text{ eine ganze Zahl,}\\ 2\,c &= 2^3\,C, && C \text{ eine ungerade Zahl,}\\ a\,d^2 &= 2^8\,D, && D \text{ eine ganze Zahl.}\end{aligned}$$

Wird dann $l = 2\,L$, L eine ungerade Zahl und $m = M$, M ungerade, gesetzt, so folgt:

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= 2^6\,\{8\,N\,L^2\,M^4 + 2\,C\,L^4\,M^2 - L^6 - 2^2\,D\,M^6\}\\ &= 2^6\,(8\,n + 1) \text{ oder } = 2^6\,(8\,n + 5).\end{aligned}$$

Φ_2 ist demnach in drei Quadrate zerlegbar.

e) $d_1 = 2$; $c = 0$ oder wenn $c \neq 0$: $c_1 \geqq 3$; $2\,a_1 = 2$.

Man setze $\alpha \equiv 1$ und $\gamma = 2\,\Gamma$, $\Gamma \equiv 1$. Es wird:

$$\begin{aligned} a' &= 2^2\,(a_2\,\alpha^4 + c\,\alpha^2\,\Gamma^2 + 2\,d\,\alpha\,\Gamma^3 + 2^2\,e\,\Gamma^4)\\ &= 2^2\,(8\,n + 5).\end{aligned}$$

f) $d_1 = 2$; $c \neq 0$ und $c_1 = 2$; $2\,a_1 = 2$.

Es ist also $c \equiv 4$ und $d \equiv 4$, und es wird, wenn $\alpha \equiv 1$ und $\gamma \equiv 1$, gesetzt wird, $a' = 8\,n + 5$.

g) $d_1 = 1$; $c = 0$ oder wenn $c \neq 0$: $c_1 \geqq 3$; $2\,a_1 = 2$.
D. h.: $c \equiv 0$ und $d \equiv 2, 6$. Also für $\alpha \equiv 1$ und $\gamma \equiv 1$ wird a' von der Form $8\,n + 3$ oder $8\,n + 7$.

h) $d_1 = 1$; $c \neq 0$ und $c_1 = 2$; $2\,a_1 \doteq 2$.
D. h.: $c \equiv 4$; $d \equiv 2, 6$. Man setze $\alpha \equiv 1$ und $\gamma \equiv 2\,\Gamma$; $\Gamma \equiv 1$. Dann wird:

$$a' = 2^2\,(a_2\,\alpha^4 + c\,\alpha^2\,\Gamma^2 + 2\,d\,\alpha\,\Gamma^3 + 2^2\,e\,\Gamma^4),$$

also von der Form $2^2\;(8\,n + 5)$.

Auch im Fall 3 kommen wir also auf ein Φ_2, das in drei Quadrate zerlegbar ist, oder es nimmt $a'\,d'^2$ in der durch die Substitution entstandenen, neuen Funktion nie die Form $2^{2\mu}\,(8\,n + 1)$ an. Diese Funktion erfüllt auch alle die frühern Bedingungen.

Hiemit sind alle denkbaren Fälle erledigt, und es ist also der Nachweis geführt worden, dass jede definite biquadratische Funktion in fünf Quadrate zerfällbar ist.