Über Punktmengen konstanter Breite.

Von

Ernst Meissner.

Die Herausgabe einiger Modelle von Flächen konstanter Breite durch die Firma M. Schilling in Leipzig veranlasst mich zu der nachstehenden Note. Sie beschäftigt sich mit derartigen Gebilden und gibt Resultate, die bekannte von A. Hurwitz [1]) und Minkowski [2]) herrührende Sätze als Spezialfälle enthalten. Hervorzuheben ist die Definition der Fläche konstanter Breite als Begrenzung einer einfach definierten Punktmenge. Sie gestattet Verallgemeinerungen nach zwei Richtungen: einmal kann man einen Raum beliebiger Dimensionszahl zugrunde legen, und dann kann an Stelle der gewöhnlichen eine beliebige Minkowski'sche Geometrie [3]) treten, d. h. eine Massbestimmung vermittelst der wechselseitig-einhelligen Strahldistanz.

Wenn im folgenden nur Gebilde von 2 und 3 Dimensionen betrachtet werden, so geschieht es im Interesse der Anschaulichkeit.

Die vollständige Punktmenge M_D vom Durchmesser D.

In einem beliebigen Raum bedeute $S(P_1 P_2)$ die wechselseitigeinhellige Strahldistanz zweier Punkte $P_1 P_2$ im Sinne Minkowski's [4]).

Unter dem Durchmesser D einer endlichen oder unendlichen Punktmenge soll die obere Schranke aller Strahldistanzen zwischen den Punkten der Menge verstanden werden [5]).

---

[1]) A. Hurwitz: Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. de l'éc. norm., t. XIX, 7.

[2]) H. Minkowski: Über die Körper konstanter Breite. Werke. Pag. 275.

[3]) Diese Bezeichnung ist eingeführt bei Hamel: Geometrien etc. Math. Ann. Bd. 57. Pag. 251.

[4]) H. Minkowski: Geometrie der Zahlen. Pag. 2.

[5]) Vergl. Hch. W. E. Jung: Über den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschliesst. Crelle, Journ. f. Math. Bd. 137. 1909. — Die dort gelöste Aufgabe lässt sich übrigens ohne weiteres auf den Fall der Minkowski'schen Geometrie übertragen.

Eine Punktmenge vom Durchmesser D soll vollständig heissen (und hier mit M_D bezeichnet werden), wenn ihr keine neuen Punkte zugefügt werden können, ohne dass der Durchmesser wächst. D wird dabei immer als endlich vorausgesetzt.

Die Menge M_D liegt ganz im Endlichen. Für irgend zwei ihrer Punkte $P_1 P_2$ gilt

$$S(P_1 P_2) \leqq D. \tag{1}$$

Da die Strahldistanz stetig ist, so folgt aus der Vollständigkeit der Menge sofort ihre Abgeschlossenheit. Die Punktmenge M_D ist sogar konvex, enthält also mit zwei Punkten $P_1 P_2$ stets auch jeden Punkt Q der Verbindungsstrecke $P_1 P_2$. Denn ist P_0 ein beliebiger Punkt von M_D, so ist wegen der Einhelligkeit der Strahldistanz $S(P_0 Q)$ nicht grösser als die grössere der Distanzen $S(P_0 P_1)$, $S(P_0 P_2)$, also auch nicht grösser als D; wegen der Vollständigkeit von M_D gehört also Q zur Menge.

Die Randpunkte von M_D bilden eine stetige, konvexe, geschlossene Fläche F, der die Eigenschaft konstanter Breite zukommt. Es gilt nämlich allgemein der Satz:

Jede Oberfläche F einer vollständigen Punktmenge vom Durchmesser D hat die konstante Breite D.

Dies wird im Falle eines Raumes von 2 resp. 3 Dimensionen im folgenden näher ausgeführt.

Kurven konstanter Breite.

Die Punktmenge M_D liege in einer gewöhnlichen, zweidimensionalen Ebene. Die Massbestimmung vermittelt eine konvexe Eichkurve $\mathfrak{A}$ mit Mittelpunkt. Der Kürze wegen wird angenommen, sie sei ohne Ecken und geradlinige Randteile. Sind P, Q irgend zwei Punkte, und ist OE die Länge des zu PQ parallelen Halbmessers von $\mathfrak{A}$, so ist unter der Strahldistanz $S(PQ)$ von P zu Q das Verhältnis

$$S(PQ) = \left| \frac{PQ}{OE} \right|$$

zu verstehen. Es ist dann $S(PQ) > 0$, wenn $P \neq Q$, $S(P, P) = 0$; $S(PQ) = S(QP)$ und $S(P'Q') = t \cdot S(PQ)$, wenn $P'Q' \,||\, PQ$ und $(P'Q') : (PQ) = t$. Endlich gilt wegen der Konvexität von $\mathfrak{A}$[1]) die Ungleichung

$$S(PQ) \leqq S(PR) + S(RQ) \tag{2}$$

für irgend 3 Punkte PQR der Ebene.

Jeder Richtung u einer Tangente ordnet $\mathfrak{A}$ die Richtung $\bar{u}$ des nach dem Berührungspunkt gehenden Halbmessers zu. Es heisse

[1]) H. Minkowski: Geometrie d. Zahlen. Pag. 37.

$\bar{u}$ radial zu u, u tangential zu $\bar{u}$ gerichtet. Nach den über $\mathfrak{A}$ getroffenen Voraussetzungen gehört zu jeder Richtung je eine Radial- und eine Tangential-Richtung; doch ist die radiale zu einer Radialrichtung von der ursprünglichen im allgemeinen verschieden.[1] $\overline{(\bar{u})} \neq u$.

Die Begrenzung der Punktmenge M_D ist eine geschlossene konvexe Kurve C. Eine solche Kurve besitzt in jedem Punkte eine Tangente nach vorn und eine nach rückwärts.[2] Im allgemeinen fallen diese zwei Tangenten zusammen; sie sind verschieden für eine Menge von Kurvenpunkten E, die stets abzählbar ist, aber ganz wohl aus unendlich vielen Punkten bestehen kann.[3] In den Punkten E hat die Kurve C Ecken und ein ganzes Büschel von Stützlinien, während in den übrigen, den „regulären" Randpunkten R stets nur eine Stützlinie, die Tangente existiert. Von jedem Punkte ausserhalb gehen an C zwei Stützlinien; insbesondere gibt es stets zwei und nur zwei Stützlinien von gegebener Richtung u.

Sei nun P_0 ein fester Aufpunkt auf C, P ein variabler Kurvenpunkt. Es heisse $S(P_0 P)$ die Randstrahlfunktion von P_0. Sie ist stetig und besitzt ein Maximum, das wenigstens für einen Punkt $P = P_0^*$ angenommen wird. Jeder Punkt P_0^* dieser Art heisse Gegenpunkt von P_0.

Satz 1: Für jeden Kurvenpunkt P_0 von C ist das Randstrahlmaximum gleich dem Durchmesser D.

Grösser als D kann es wegen (1) nicht sein. Angenommen, es wäre im Gegenteil stets

$$S(P_0 P) \leqq D - \varepsilon \qquad (\varepsilon > o).$$

Man beschreibe um P_0 eine zur Eichkurve $\mathfrak{A}$ ähnliche und ähnlich gelegene Kurve mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $\varepsilon : 1$. (Sie wird bezeichnet mit $\mathfrak{A}(P_0 ; \varepsilon)$.) Da $\varepsilon > 0$ ist, kann dann stets ein innerer Punkt Q derselben angegeben werden, der nicht zu M_D gehört. Ist jetzt P' ein beliebiger Punkt von C, so hat man

$$S(P_0 P') \leqq b - \varepsilon \qquad S(P_0 Q) < \varepsilon$$

und wegen (2)

$$S(Q P') \leqq S(Q P_0) + S(P_0 P') < \varepsilon + (b - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Man schliesst, dass die um Q erweiterte Menge $(M_D + Q)$ immer noch den Durchmesser D haben würde, was der Vollständigkeit wider-

[1] Die einzige Ausnahme tritt für elliptische Eichkurven ein.

[2] Jensen. Acta math. T. 30, pag. 190.

[3] F. Bernstein. Über das Gauss'sche Fehlergesetz. Math. Ann. Bd. 64.

spricht. Also ist $\varepsilon = 0$, und wenn P_0^*, $P_0^{**}, \cdots$ die Gegenpunkte von P_0 sind:

$$S(P_0 P_0^*) = D, \qquad S(P_0 P_0^{**}) = D, \cdots \tag{3}$$

Jeder Punkt P_0 von C hat wenigstens einen Gegenpunkt.

Satz 2: Ist P_0^* ein Gegenpunkt von P_0, so ist die Gerade $\left\{\begin{matrix} t_0 \\ t_0^* \end{matrix}\right.$ durch $\left\{\begin{matrix} P_0 \\ P_0^* \end{matrix}\right.$, deren Richtung zu $P_0 P_0^*$ tangential geht, eine Stützlinie von C.

Denn die Menge M_D liegt wegen (1) ganz im Innern und auf dem Rande der Kurve $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{A}(P_0^*; D) \\ \mathfrak{A}(P_0; D) \end{matrix}\right.$. Aber $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{A}(P_0^*; D) \\ \mathfrak{A}(P_0; D) \end{matrix}\right.$ geht wegen (3) durch $\left\{\begin{matrix} P_0 \\ P_0^* \end{matrix}\right.$ und hat dort die Stützlinie $\left\{\begin{matrix} t_0 \\ t_0^* \end{matrix}\right.$.

Satz 3: Jeder reguläre Punkt P_0 von C hat nur einen einzigen Gegenpunkt.

Sind nämlich mehrere Gegenpunkte P_0^*, $P_0^{**}, \cdots$ vorhanden, so sind die Strahlen durch P_0, die tangential zu $P_0 P_0^*$, $P_0 P_0^{**}, \cdots$ gehen, nach Satz 2 Stützlinien von C in P_0. Da sie verschieden sind, so ist P_0 eine Ecke.

Satz 4: Sind P_0^*, P_0^{**} Gegenpunkte von P_0, so sind auch alle Punkte des Bogens $P_0^* P_0^{**}$ der Kurve C Gegenpunkte von P_0.

Ist R ein regulärer Punkt jenes Bogens, so ist die in P_0 tangential zu $P_0 R$ gezogene Gerade Stützlinie von C, also P_0 der Gegenpunkt von R, und mithin $S(P_0 R) = D$. Da aber die Punkte R den Bogen $P_0^* P_0^{**}$ überall dicht bedecken[1]), so folgt aus der Stetigkeit der Randstrahlfunktion

$$S(P_0 Q) = D$$

für jeden Punkt Q des Bogens $P_0^* P_0^{**}$

Satz 4': Die Gegenpunkte einer Ecke P_0 von C erfüllen also vollständig ein Stück der Kurve $\mathfrak{A}(P_0; D)$

Satz 5: Die Kurve C hat keine geradlinigen Randteile.

Denn wäre von den drei Kurvenpunkten $P_0 P_1 P_2$ etwa P_0 auf der Strecke $P_1 P_2$ gelegen, so lege man um den Gegenpunkt P_0^* von P_0 die Kurve $\mathfrak{A}(P_0^*, D)$, die durch P_0 geht. Diese muss einen der Punkte $P_1 P_2$ ausschliessen, was mit (1) im Widerspruch ist.

Es sollen jetzt die zwei neuen Begriffe der Kurvenradialen und der Breite eingeführt werden. Radiale in einem Punkt einer konvexen Kurve ist jede zu einer Stützlinie jenes Punktes radial gerichtete Gerade.

[1]) Dies folgt daraus, dass die irregulären Eckpunkte bloss eine abzählbare Menge bilden.

In einem regulären Punkte gibt es nur eine Radiale. Ist die Eichkurve ein Kreis, so ist die Radiale mit der Kurvennormalen identisch.

Wenn ein paralleles Stützlinienpaar von der Richtung u den Abstand a, das parallele Tangentenpaar der Eichkurve den Abstand $2\,\alpha$ besitzt, so soll das Verhältnis

$$B(u) = \left|\frac{a}{\alpha}\right|$$

die Breite der Kurve in der Richtung u heissen. Nach dieser Definition ist $B(u)$ eine eindeutige, stetige Funktion des Richtungswinkels u, und

$$B(u+\pi) = B(u).$$

Man lege jetzt an die Kurve C zwei parallele Stützlinien. Nach Satz 5 existiert eine eindeutige Berührungssehne. Ist einer ihrer Endpunkte $P_1\,P_2$ regulär, so zeigt der Satz 2, im andern Fall der Satz 4', dass die zwei Endpunkte Gegenpunkte zu einander sind, dass somit $P_1\,P_2$ radial zu den Tangenten verläuft, und man hat ferner nach Satz 1:

$$S(P_1\,P_2) = D.$$

Dies Resultat führt zu folgenden Theoremen:

Satz 6. Jede Radiale von C ist Biradiale, d. h. tritt eine Gerade radial in C ein, so tritt sie auch radial aus C aus.

Satz 7. Die Kurve C hat in allen Richtungen dieselbe Breite, und zwar ist sie gleich dem Durchmesser D.

$$B(u) = D = \text{konstant}.$$

Wählt man einen Kreis als Eichkurve, so geht C über in eine gewöhnliche Kurve konstanter Breite. Satz 6 sagt aus, dass jede ihrer Normalen Binormale ist.[1])

Die angewandte allgemeine Massbestimmung setzt nun jede konvexe Kurve zu einer zweiten, (der Eichkurve) in eine analoge Beziehung, wie die zwischen gewöhnlichen Kurven konstanter Breite und dem Kreis. Man kann nämlich jedes konvexe Oval ohne Ecken als Kurve konstanter Breite auffassen, und nachträglich eindeutig die Eichkurve der entsprechenden Massbestimmung feststellen.

Lautet in gewöhnlichen Koordinaten die Gleichung der Stützlinie des Ovals von der Richtung u

$$(4) \qquad x \cos u + y \sin u - p(u) = o$$

---

[1]) A. Hurwitz a. a. O.

so ist dasselbe durch die **Stützgeradenfunktion** $p(u)$ charakterisiert,[1] wobei natürlich

$$p(u+2\pi)=p(u)$$

ist. Die Kurve mit der Stützgeradenfunktion

$$P(u)=\frac{1}{D}\,[p(u)+p(u+\pi)]$$

hat wegen

$$P(u+\pi)=P(u)$$

einen Mittelpunkt, und ist ebenfalls konvex.[2] Macht man sie zur Eichkurve, so wird die Breite $B(u)$ des ursprünglichen Ovals

$$B(u)=2\,\frac{p(u)+p(u+\pi)}{P(u)+P(u+\pi)}=\frac{2\,D\,P(u)}{2\,P(u)}=D=\text{konstant.}$$

Das Oval hat konstante Breite D.

Der Umfang L desselben wird

$$\mathrm{L}=\int_0^{2\pi} p(u)\,d\,u=\int_0^{\pi}[p(u)+p(u+\pi)]\,d\,u=\frac{1}{2}\,D\int_0^{2\pi}P(u)\,d\,u.$$

Hieraus folgt

Satz 8. Kurven konstanter Breite D haben alle denselben Umfang. Er beträgt das $\frac{D}{2}$-fache des Umfangs der Eichkurve.

Die im Masstab $D:2$ vergrösserte Eichkurve ist die einzige Kurve konstanter Breite D mit Mittelpunkt.

Flächen konstanter Breite.

Die Punktmenge M_D liege im dreidimensionalen Raum. Ihre Begrenzung ist eine geschlossene, konvexe Oberfläche F, eine Eifläche, Die Punkte einer Eifläche lassen sich nach ihren Singularitäten in drei Gruppen ordnen:

1. Punkte, in denen **nur eine Stützebene** existiert, **reguläre Punkte** R.
2. Punkte mit einem **Büschel** von Stützebenen, **Kantenpunkte** K, die Axe des Büschels heisse **Kantenrichtung**.
3. Punkte mit einem **Bündel** von Stützebenen, **Eckpunkte** E.

---

[1]) Vergl. für das Folgende: E. Meissner: Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik. Diese Zeitschrift, Bd. 54, 1909.

[2]) Ist $p(u)$ zweimal differenzierbar, so ist $\varrho(u)=p(u)+\frac{d^2p(u)}{d\,u^2}$ der Krümmungsradius des Ovals im Berührungspunkt der Stützlinie (4), sonach $R(u)=P(u)+\frac{d^2P(u)}{d\,u^2}=\frac{\varrho(u)+\varrho(u+\pi)}{2D}$ der Krümmungsradius der Eichkurve; daher folgt aus $\varrho(u)>0$ sofort $R(u)>0$.

Eckpunkte sind nur in abzählbarer Menge vorhanden. Die Menge der Kantenpunkte kann die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen. Jedenfalls aber liegen die regulären Punkte auf der ganzen Fläche überall dicht.

An Stelle der Eichkurve tritt nun eine eigentlich konvexe Eichfläche mit Mittelpunkt. Wieder sei vorausgesetzt, ihre sämtlichen Punkte seien regulär. Der Stellung u jeder Stützebene ordnet sie die radiale Richtung $\bar{u}$ des Halbmessers nach dem Berührungspunkt zu, und umgekehrt gehört zu jeder Richtung $\bar{u}$ die tangentiale Stellung u der Stützebene im Endpunkt des zu u parallelen Eichflächen-Halbmessers.

Die Randstrahlfunktion wird wie früher eingeführt. Wieder ist ihr Maximum gleich dem Durchmesser D. (Satz 1). Jeder Punkt P von F hat wenigstens einen Gegenpunkt P^*. Das Analogon zu Satz 2 ist

Satz II. Ist P_0^* ein Gegenpunkt von P_0, so ist die Ebene $\left\{\begin{matrix} T_0 \\ T_0^* \end{matrix}\right.$ *durch* $\left\{\begin{matrix} P_0 \\ P_0^* \end{matrix}\right.$, *deren Stellung zu $P_0 P_0^*$ tangential geht, eine Stützebene von F.*

Satz 3 gilt unverändert. Man hat ferner

Satz IV': Die Gegenpunkte einer Ecke P_0 von F erfüllen vollständig ein einfach zusammenhängendes Stück der Fläche $\mathfrak{A}(P_0; D)$.

Beim Beweis dieses Satzes, der für reguläre Gegenpunkte R aus Satz II folgt, wird davon Gebrauch gemacht, dass die Punkte R überall dicht liegen, und die Randstrahlfunktion stetig ist. Es lautet ferner

Satz V: Die Fläche F hat keine drei Punkte, die in gerader Linie liegen. (Beweis wie früher.)

Die Begriffe der Flächenradialen und der Flächenbreite $B(u)$ für eine gegebene Stellung u ergeben sich durch einfache Analogie zum frühern. Wieder ist die Berührungssehne zweier parallelen Stützebenen radial zu deren Stellung, und hat die Strahldistanz D. Dies folgt aus Satz II, zunächst für reguläre Berührungspunkte, und gilt allgemein, weil diese überall dicht auf F liegen. Somit gilt

Satz VI: Jede Radiale der Fläche F ist Biradiale.

Satz VII: Die Fläche F hat konstante Breite D.

Man kann jetzt Satz IV' folgendermassen vervollständigen:

Satz IV'': Zu einem Flächenpunkte P findet man alle Gegenpunkte P^*, indem man auf allen Flächenradialen in P die Strahldistanz $D = S(PP^*)$ nach dem Flächeninnern abträgt.

Die Gegenpunkte eines Kantenpunktes erfüllen also im allgemeinen ein Stück einer räumlich gekrümmten Kurve. Diese ist ähnlich und ähnlich gelegen zur Berührungslinie der Eichfläche mit einem ihr in der Kantenrichtung umschriebenen Zylinder.

Im Fall eines Ellipsoides als Eichfläche wird die Raumkurve eben, eine Ellipse.[1])

Profil Π_u einer Eifläche in der Richtung u soll die Umrisskurve der orthogonalen Projektion der Eifläche aus der gegebenen Richtung u heissen. Sie ist sonach eine konvexe ebene Kurve.

Nun gilt folgender, leicht einzusehender Satz:

Satz IX: Das Profil der Fläche F in irgend einer Richtung ist eine Kurve konstanter Breite D, wenn man als Eichkurve das Profil der Eichfläche in derselben Richtung wählt.

Dann folgt aber nach Satz 8:

Satz X: Zwei beliebige Flächen konstanter Breite D haben in gleicher Richtung gleiche Profillänge. Sie beträgt das $\frac{D}{2}$*-fache der entsprechenden Profillänge der Eichfläche.*

Für die Kugel als Eichfläche, also die gewöhnliche Massbestimmung ergibt sich:

Die vollständige Punktmenge vom Durchmesser D bildet einen Körper konstanter Breite D. Jede Gerade, die normal in ihn eintritt, verlässt ihn auch normal zur Oberfläche. Die Profillänge des Körpers ist in jeder Richtung dieselbe. (Gleich $D\pi$).

Wiederum liefert die allgemeine Massbestimmung Beziehungen zwischen mehreren Flächen.

Es kann eine ganz beliebige Eifläche F durch ihre Stützebenenfunktion p bestimmt werden. Man versteht darunter den Abstand einer Stützebene von einem Fixpunkt im Innern von F, aufgefasst als Funktion der Stellung der Stützebene. Sind (α, β, γ) die Richtungswinkel der Stützebenen-Normalen, und führt man durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \sin\vartheta\cos\psi;\quad \cos\beta = \sin\vartheta\sin\psi;\quad \cos\gamma = \cos\vartheta$$

Länge ψ und Poldistanz ϑ ein, so kann p als eindeutige Funktion dieser Winkel ψ, ϑ aufgefasst werden.

$$p = p(\vartheta, \psi).$$

[1]) Hieraus folgt z. B., dass in der gewöhnlichen Geometrie (Kugel als Eichfläche) es ausser der Kugel selber keine aus lauter Kugelflächen zusammengesetzte Fläche konstanter Breite gibt. Denn den alsdann notwendig auftretenden kreisförmigen Kanten würde eine Gesamtheit von Gegenpunkten entsprechen, die ein Stück einer Ringfläche erfüllen. Man vergleiche die anfangs erwähnten Modelle der Firma Schilling.

Die Funktion

$$P(u) = \frac{1}{D}\left[p(\vartheta, \psi) + p(\pi - \vartheta, \psi + \pi)\right] \tag{5}$$

genügt der Relation

$$P(\vartheta, \psi) = P(\pi - \vartheta, \psi + \pi).$$

und ist Stützebenenfunktion einer konvexen Fläche mit Mittelpunkt, die, wenn F genügend stetig ist, lauter reguläre Punkte besitzt. Unter dieser Voraussetzung kann sie als Eichfläche verwendet werden. Dann wird die Breite $B(\vartheta, \psi)$ der Fläche F für die Stellung (ϑ, ψ)

$$B(\vartheta, \psi) = 2\,\frac{p(\vartheta, \psi) + p(\pi - \vartheta, \psi + \pi)}{P(\vartheta, \psi) + P(\pi - \psi, \vartheta + \pi)} = D = \text{konstant.}$$

Somit kann mit der oben angegebenen Einschränkung jede beliebige Fläche F als Fläche konstanter Breite aufgefasst werden. Die Gleichung (5) bestimmt die zugehörige Eichfläche.

Entwickelt man $p(\vartheta, \psi)$ nach Kugelflächenfunktionen,

$$p(\vartheta, \psi) = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \cdots$$

so wird

$$P(\vartheta, \psi) = \frac{2}{D}(X_0 + X_2 + X_4 + \cdots)$$

Zwei Flächen, die in derselben Geometrie konstante Breite haben, stimmen sonach in den Funktionen X_{2k} mit geradem Index überein.

Nach Minkowski[1]) ist nun die Profillänge von F in die Richtung (ϑ, ψ) gegeben durch

$$\Pi(\vartheta, \psi) = 2\pi X_0 + \omega_2 X_2 + \omega_4 X_4 + \cdots$$

wo die ω_{2k} gewisse numerische Konstante bedeuten. Sonach bestimmen sich aber die Funktionen $P(\vartheta, \psi)$ und $\Pi(\vartheta, \psi)$ gegenseitig. (Denn die Entwicklung nach Kugelfunktionen ist eindeutig.)

Aus $P(\vartheta, \psi)$ folgt $\Pi(\vartheta, \psi)$. Dies gibt einen neuen Beweis des Satzes X.

Aber bei gegebenem $\Pi(\vartheta, \psi)$ ist auch $P(\vartheta, \psi)$ bestimmt. Es gilt also auch als Umkehrung des Satzes X.

Satz XI: Haben zwei Eiflächen in gleicher Richtung gleiche Profillängen, so sind sie in ein- und derselben Minkowski'schen Geometrie Flächen konstanter (und gleicher) Breite, und begrenzen vollständige Punktmengen vom selben Durchmesser.

---

[1]) H. Minkowski: Über Flächen konstanter Breite. Werke pag. 275.