Über die Bewegung des Sandkorns auf dem Sieb.

Von

Ernst Meissner.

Bei einer Reihe von Bewegungserscheinungen lässt sich der Einfluss der Reibung charakteristisch als Dämpfung bezeichnen. Dabei kann entweder ein Abklingen der Bewegung gegen Ruhezustand, ein Erlöschen stattfinden; oder aber eine asymptotische Annäherung an einen stationären Bewegungszustand. Dies wird abhängen von der Form des Reibungsgesetzes, d. h. der Art des Zusammenhangs zwischen der Grösse der Reibung und der Gleitgeschwindigkeit.

Ein über das axiomatische hinausgehendes Interesse scheint mir dabei folgendes Problem zu bieten:

Inwiefern wird bei einem solchen Vorgang die mögliche Form des Reibungsgesetzes eingeschränkt durch die Forderung, dass stationäre Bewegungen existieren, und die allgemeinen Bewegungen sich mit wachsender Zeit ihnen annähern?

Dies Problem soll hier am speziellen Beispiel des Sandkornes behandelt werden, das auf eine periodisch bewegte horizontale Siebebene aufgelegt, und von ihr vermöge der Reibung teilweise mitgenommen wird.

1. Formulierung des Problems.

Wir fassen die Aufgabe in folgende Form:

Eine horizontale, gleichmässig rauhe Ebene E (die Siebebene) bewegt sich so, dass alle ihre Punkte gleiche horizontale Kreise vom Radius r mit der konstanten Geschwindigkeit c $\left(\text{und der Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{c}{r}\right)$ durchlaufen. Ein materieller Punkt P von der Masse 1 wird auf die Ebene geworfen. Seine Bewegung ist zu ermitteln.

2. Die Differentialgleichungen der Aufgabe.

Sei $O\ (x\,y)$ ein mit der Ebene E fest verbundenes Koordinatensystem, O_1 der im Raum feste Punkt, um den O gleichförmig rotiert. $\varphi = \omega\, t$ sei der Winkel, den der Strahl $O_1\, O$ mit der (unveränderlichen) Richtung der Axe $O\,x$ zur Zeit t einschliesst. Der Punkt P habe zur Zeit t die Koordinaten (x, y) bezüglich dieses Systems. Dann sind[1]) x', y' die Komponenten der Relativgeschwindigkeit von P zum System. Ihr Absolutwert sei w. Am Punkt P heben sich sein Eigengewicht und die Normalreaktion der Ebene E stets auf, sodass für die Bewegung bloss die Reibung an der Unterlage E in Frage kommt. Sie ist eine gewisse Funktion $R\,(w)$ der Relativgeschwindigkeit, und zwar werden wir $R\,(w)$ als eindeutig stetig und nicht negativ anzusehen haben.

Ist $w \neq o$, so hat die absolute Beschleunigung von P nach den Axen von $O\ (x, y)$ die Komponenten:

$$p_x = -R\,(w) \cdot \frac{x'}{w}\,, \qquad p_y = -R\,(w) \cdot \frac{y'}{w}\,,$$

denn die Reibung wirkt der Gleitgeschwindigkeit entgegengesetzt. Wenn man hiezu die mit umgekehrtem Sinn genommene Systemsbeschleunigung mit den Komponenten

$$c\,\omega\ \cos\ (\omega\, t) \qquad\qquad c\,\omega\ \sin\ (\omega\, t)$$

addiert, so erhält man nach Coriolis die Relativbeschleunigung mit den Komponenten

$$x'', \qquad y''.$$

Daraus folgen die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -R\,(w) \cdot \frac{x'}{w} + c\,\omega\ \cos\ (\omega\, t) \\ y'' &= -R\,(w) \cdot \frac{y'}{w} + c\,\omega\ \sin\ (\omega\, t) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Sie gehen durch die Substitution

$$\left.\begin{aligned} u &= x' \cos (\omega\, t) + y' \sin (\omega\, t) \\ v &= x' \sin (\omega\, t) - y' \cos (\omega\, t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

über in

$$\left.\begin{aligned} u' &= \omega\, c - \omega\, v - R\,(w) \cdot \frac{u}{w} \\ v' &= \omega\, u - R\,(w) \cdot \frac{v}{w} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

u und v haben eine einfache Bedeutung; es sind die Komponenten

---

[1]) Akzente bezeichnen stets Ableitungen nach der Zeit.

von w normal und tangential zum Kreis, den der mit P zusammenfallende Systemspunkt beschreibt. Es ist insbesondere

$$w = +\sqrt{u^2 + v^2} \tag{4}$$

Aus (3) folgt noch

$$w \frac{dw}{dt} = u\,u' + v\,v' = \omega\, c\, u - R(w) \cdot w \tag{5}$$

$$u\,v' - v\,u' = \omega\,(w^2 - c\,v). \tag{6}$$

3. Die stationären Bewegungen.

Es soll jetzt die Frage nach den Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit w_1 gestellt werden. Zwei Fälle sind dabei auseinander zu halten.

A. Der Fall relativer Ruhe, $w_1 = 0$.

Hier verlieren die Gleichungen (1) ihre Gültigkeit, und es tritt die statische Reibung ins Spiel. Nun kann relative Ruhe nur dann dauernd bestehen, wenn jene im Stande ist, dem Punkt P die gleichförmige Kreisbewegung der Siebebene (die mit der Beschleunigung $c\,\omega$ erfolgt) aufzuzwingen. Dies ist der Fall[1]), wenn

$$R(0) \geqq c\,\omega \tag{7}$$

B. Der Fall $w_1 \neq 0$.

Sind u_1, v_1 die Komponenten von w_1, so genügen sie nach (5) und (6) den Gleichungen.

$$\omega\, c\, u_1 - R(w_1) \cdot w_1 = 0 \tag{5'}$$

$$w_1^{\,2} - c\, v_1 = 0. \tag{6'}$$

Es sind also auch u_1 und v_1 konstante, und zwar positive Grössen. Eliminiert man sie mit Hülfe von

$$w_1^{\,2} = u_1^{\,2} + v_1^{\,2}, \tag{4'}$$

so folgt für die positive Grösse w_1 die Gleichung

$$\frac{R^2(w_1)}{\omega^2} + w_1^{\,2} - c^2 = 0. \tag{8}$$

Entweder liegt nun der Fall (7) vor, oder es hat (8) wenigstens eine zwischen Null und c gelegene Lösung. Denn in diesem letztern Fall ist die linke Seite von (8) für $w_1 = 0$ negativ und für $w_1 = c$ positiv.

Sonach existiert stets wenigstens eine stationäre Geschwindigkeit w_1, und zwar ist

$$0 \leqq w_1 \leqq c.$$

[1]) Um Weitschweifigkeiten zu vermeiden, wird kein Unterschied zwischen voll entwickelter statischer und dynamischer Reibung gemacht, erstere also gleich $R(0)$ gesetzt.

Ist $w_1 \neq 0$, so bildet w_1 mit der Systemsgeschwindigkeit c den aus

$$tg\,\alpha = -\frac{u_1}{v_1}$$

zu bestimmenden, stumpfen und konstanten Winkel α. Es ändert w_1 also gleichförmig seine Richtung. Die Bahn der stationären Bewegung von P auf der Ebene E ist also ein Kreis, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω und der peripherischen Geschwindigkeit w_1 durchlaufen wird, der also den Radius

$$\varrho = \frac{w_1}{\omega} \leqq \frac{c}{\omega} = r$$

besitzt.

4. Das Postulat.

Da c und ω unabhängig von einander und willkürlich gewählt werden können, so kann die Ebene E eine zweiparametrige Schar von Bewegungen ausführen.

Wir fordern jetzt:

Für keine Bewegung der Schar soll mehr als eine stationäre Geschwindigkeit w_1 existieren.

Die Gleichung (8) soll also für $R(0) < c\,\omega$ stets nur eine positive Lösung besitzen.

Als erste Folgerung ergibt sich folgende:

Die Reibungsfunktion $R(w)$ nimmt mit w monoton zu oder doch nicht ab.

In der Tat, wäre $w_2 > w_1$, aber $R(w_2) < R(w_1)$, so könnte man ω und c positiv reell bestimmen aus den Gleichungen

$$\omega^2 = -\frac{R(w_2) - R(w_1)}{w_2 - w_1} \qquad c^2 = \frac{R^2(w_1)}{\omega^2} + w_1^{\,2}$$

und die Gleichung (8) hätte für diese Werte von ω und c die zwei verschiedenen positiven Lösungen w_1 und w_2.

Die Bedingung der Monotonie genügt aber auch umgekehrt, damit die Forderung des Postulates erfüllt werde. Denn dann wächst die linke Seite von (8) mit w_1 monoton, und wird ferner dann und nur dann für einen positiven Wert w_1 und auch nur einmal zu Null, wenn $R(0) < c\,\omega$ ist.

5. Die Approximation der allgemeinen Bewegung an den Zustand relativer Ruhe.

Sei $R(0) \geqq c\,\omega$, dann bleibt P in relativer Ruhe zur Ebene E, wenn dies in irgend einem Moment der Fall ist. Wenn nicht, so tritt eine Relativbewegung ein, die mit wachsender Zeit erlischt.

Nach (5) ist nämlich

$$w \frac{dw}{dt} = \omega \cdot c\, u - R(w) \cdot w \leqq \omega \cdot c\, u - R(0) \cdot w \leqq \omega\, c\,(u - w) \leqq 0$$

w kann nach vorigem einen von Null verschiedenen Wert nicht dauernd annehmen, nimmt sonach gegen einen Grenzwert unbegrenzt ab. Man sieht leicht, dass dieser Grenzwert von Null nicht verschieden sein kann.

6. Die Approximation an die stationäre Bewegung.

Sei jetzt $R(0) < c\,\omega$, so dass die stationäre Geschwindigkeit w_1 (u_1, v_1) von Null verschieden ist. Wir verfolgen eine bei beliebigen Anfangsbedingungen auftretende Bewegung des Punktes P, indem wir in einer (u, v) Ebene die zugehörigen Grössen (u, v) als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes Π deuten. Sie sind Funktionen der Zeit, die den Gleichungen (3) genügen. Der Punkt Π (u, v) beschreibt also eine zu P zugeordnete Bewegung, eine Art Hodographenbewegung. Nur wenn P die stationäre Geschwindigkeit w_1 beibehält, bleibt Π dauernd im Punkte Π_1 (u_1, v_1) in Ruhe. In allen übrigen Fällen beschreibt Π mit endlicher Geschwindigkeit eine Bahn, die weder Doppelpunkte, noch Spitzen aufweist. Dies lehrt die Form der Gleichungen (3).

Wir werden jetzt nachweisen, dass sich Π mehr und mehr dem Punkte Π_1 nähert. Sei $\Pi_1 \Pi = \varrho > 0$, dann hat man

$$\varrho^2 = (u - u_1)^2 + (v - v_1)^2$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{\varrho} \left\{ (u - u_1)\, u' + (v - v_1)\, v' \right\}$$

und wegen (3)

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{\varrho} \left\{ \omega \cdot c\,(u - u_1) - R(w) \cdot w - \omega\,(u\, v_1 - v\, u_1) + \frac{R(w)}{w} (u\, u_1 + v\, v_1) \right\}$$

Sei O_0 der Anfangspunkt des $(u\,v)$ Koordinatensystems, α der Winkel des Strahls $O_0\, \Pi_1$ mit der u-Axe, dann gilt

$$u_1 = w_1 \cos \alpha \qquad v_1 = w_1 \sin \alpha$$

und man kann weiter setzen:

$$u = w \cos(\psi + \alpha) \qquad v = w \sin(\psi + \alpha).$$

Es wird aber jetzt:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{\varrho} \left\{ \cos \psi \cdot \left[R(w) \cdot w_1 + R(w_1)\, w \right] - \left[R(w) \cdot w + R(w_1)\, w_1 \right] \right\}$$

$\frac{d\varrho}{dt}$ ist bei gegebenem w am grössten für $\cos \psi = 1$, da ja die Ausdrücke in den eckigen Klammern positiv sind. Somit ist

$$\frac{d\varrho}{dt} \leqq \frac{1}{\varrho}\left\{R(w)\cdot w_1 + R(w_1)\,w - R(w)\,w - R(w_1)\,w_1\right\} =$$
$$= -\frac{1}{\varrho}(w - w_1)\Big(R(w) - R(w_1)\Big)$$

also

$$\frac{d\varrho}{dt} \leqq 0. \tag{9}$$

Das Gleichheitszeichen tritt überhaupt nur in dem Fall ein, wo $R(w)$ in der Umgebung von $w = w_1$ konstant ist, und auch da nur in den vereinzelten Augenblicken, wo Π den Halbstrahl $Q_0\,\Pi_1$ mit von Null verschiedener Geschwindigkeit passiert. Daher folgt aus (9), dass mit wachsender Zeit ϱ unbegrenzt und zwar nach Null abnimmt, und es erscheint dies Resultat als direkte Konsequenz aus der Monotonie von $R(w)$. Π nähert sich mehr und mehr Π_1, also die Bewegung von P mehr und mehr der stationären Kreisbewegung. Da dies von jeder Bewegung gilt, ist die letztere selbstverständlich stabil.

7. Der Bewegungsverlauf in der Nähe der stationären Bewegung.

Wenn Π nahe an Π_1 gelangt ist, so sind

$$\xi = u - u_1 \qquad \eta = v - v_1$$

kleine Grössen, und man darf neben ihnen ihre Quadrate und Produkte vernachlässigen. Die Gleichungen (3) gehen über in

$$\xi' = a_1\,\xi + b_1\,\eta \qquad \eta' = a_2\,\xi + b_2\,\eta. \tag{10}$$

Hier sind folgende Abkürzungen eingeführt:

$$z = \frac{R(w_1)}{w_1} - R'(w_1) \qquad R'(w_1) = \left[\frac{dR(w)}{dw}\right]_{w = w_1} \geqq 0$$
$$a_1 = z\cos^2\alpha - \frac{R(w_1)}{w_1} \qquad b_1 = z\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \omega$$
$$a_2 = z\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \omega \qquad b_2 = z\sin^2\alpha - \frac{R(w_1)}{w_1}.$$

Aus (10) folgt die sowohl für ξ als η gültige Differentialgleichung

$$\xi'' - \xi'(a_1 + b_2) + \xi(a_1\,b_2 - a_2\,b_1) = 0\,. \tag{11}$$

Es ist hiebei

$$\left.\begin{aligned} a_1 + b_2 &= -\left(\frac{R(w_1)}{w_1} + R'(w_1)\right) < 0 \\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 &= \omega^2 + \frac{R(w_1)}{w_1}\cdot R'(w_1) > 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Aus (12) ergibt sich aber

$$\lim_{t=\infty}\xi = 0 \qquad \lim_{t=\infty}\eta = 0$$

als Bestätigung des über die Approximation Gesagten. Die Diskriminante Δ der charakteristischen Gleichung von (11) hat den Wert

$$\Delta = (a_1 - b_2)^2 + 4\, b_1\, a_2 = z^2 - 4\, \omega^2 .$$

Es nähert sich demnach Π an Π_1 aperiodisch oder oszillatorisch, je nachdem $\left(\frac{R(w_1)}{w_1} - R'(w_1)\right)^2$ grösser oder kleiner als $4\,\omega^2$ ausfällt. Im aperiodischen Fall ist die Grenzlage der Tangente an die Bahn von Π für $\Pi = \Pi_1$ bestimmt durch

$$\lim_{t=\infty} \frac{\eta}{\xi} = \frac{-z\cos 2\,\alpha + \sqrt{z^2 - 4\,\omega^2}}{z\sin 2\,\alpha - 2\,\omega},$$

im oszillatorischen Fall windet sich die Bahn von Π asymptotisch um den Punkt Π_1.

8. Das spezielle Reibungsgesetz: R proportional w.

Setzt man $R = \omega\, k\, w$, wo k irgend eine Konstante ist, so werden die Gleichungen (3) geschlossen integrierbar. Sie gehen über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{u'}{\omega} &= c - v - k\,u \\ \frac{v'}{\omega} &= u - k\,v \end{aligned}\right\}$$

woraus zunächst

$$u_1 = \frac{c\,k}{k^2+1}, \qquad v_1 = \frac{c}{k^2+1}, \qquad w_1 = \frac{c}{\sqrt{k^2+1}},$$

und alsdann

$$u = u_1 + \left[\, A\cos(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t)\,\right] e^{-k\omega t}$$

$$v = v_1 + \left[\, A\sin(\omega\, t) - B\cos(\omega\, t)\,\right] e^{-k\omega t}$$

Ist zur Zeit $t = 0$ Π in $\Pi_0\,(u_0\, v_0)$, so ist

$$A = (u_0 - u_1) \qquad B = -\,(v_0 - v_1)$$

und

$$\Pi_1\, \Pi = \varrho = \Pi_1\, \Pi_0 \cdot e^{-k\omega t}$$

sowie

$$\angle\, \Pi\, \Pi_1\, \Pi_0 = \omega\, t .$$

Die Bahnkurve von Π ist also eine logarithmische Spirale mit Π_1 als Windungspunkt, und der Fahrstrahl $\Pi_1\, \Pi$ dreht sich bei der Bewegung gleichförmig um Π_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

Auch die Gleichungen (1) lassen sich hier sofort integrieren. Es wird

$$\left.\begin{aligned} x &= \text{Konstante} + \frac{u_1}{\omega}\sin(\omega\, t) - \frac{v_1}{\omega}\cos(\omega\, t) - \frac{A}{k\,\omega}\, e^{-k\omega t} \\ y &= \text{Konstante} - \frac{u_1}{\omega}\cos(\omega\, t) - \frac{v_1}{\omega}\sin(\omega\, t) - \frac{B}{k\,\omega}\, e^{-k\omega t}. \end{aligned}\right\}$$

9. Konstante Reibung.

Dieser Fall soll zum Schluss noch besprochen werden. Wir setzen also

$$R = \omega \cdot k = \text{konstant}.$$

Es ist entweder $w_1 = 0$ oder $w_1 = \sqrt{c^2 - k^2}$. Die Gleichungen (3) lassen sich hier nicht geschlossen integrieren. Dagegen führt ein

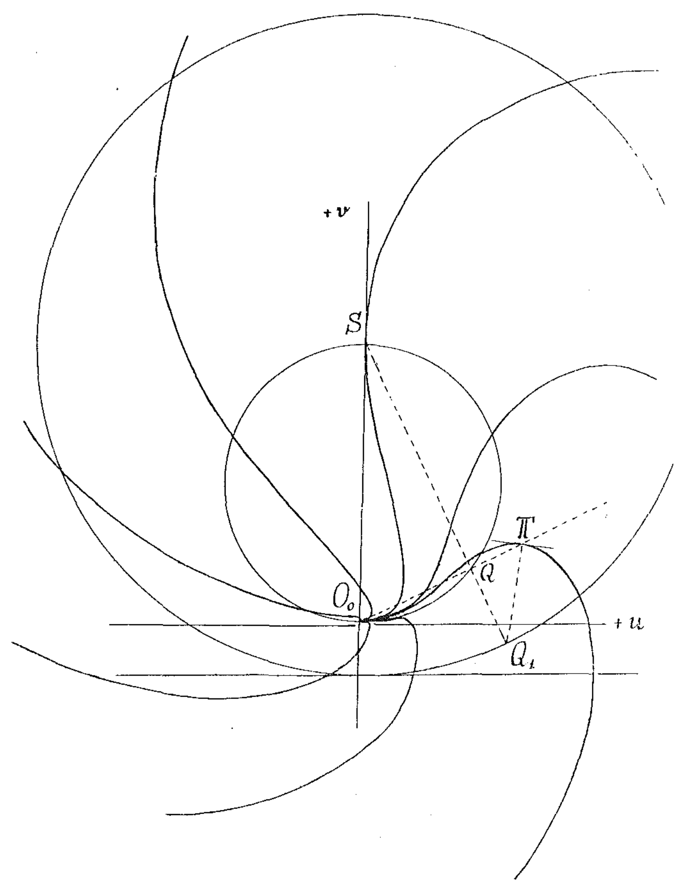

Fig. 1.

einfaches graphisches Verfahren sehr rasch zur Bestimmung der Bahn des Punktes Π. Man ziehe in der (uv)-Ebene den Kreis

$$u^2 + v^2 - c\,v = 0$$

auf dem wegen (6') der Punkt Π_1 gelegen ist. Man schneide ihn in Q (Fig. 1) mit dem Halbstrahl $O_0\,Q$, der mit der positiven u-Axe den Winkel β bildet. Sodann lege man um den im Abstand c von O_0 auf der positiven v-Axe gelegenen Punkt S den Kreis vom Radius k. Schneidet er den ersten Kreis reell, so ist Π_1 der Schnittpunk mit positiven Quadranten. Man projiziere nun den Punkt Q von S aus auf diesen zweiten Kreis nach Q_1. Q_1 hat die Koordinaten $k \sin \beta$, $c - k \cos \beta$. Ist nun Π ein beliebiger Punkt des Halbstrahls $O_0 Q$, so zeigt man vermittelst der Gleichungen (3) leicht, dass die Geschwindigkeit von Π senkrecht steht zu ΠQ_1. Daraus folgt aber eine einfache

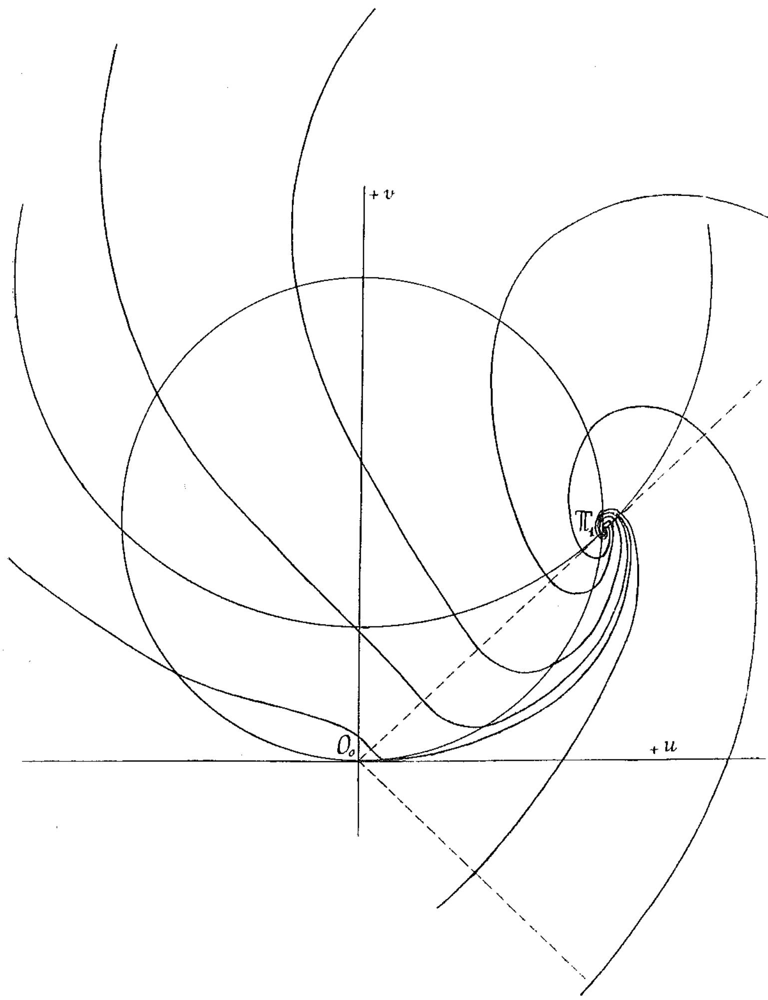

Fig. 2.

Konstruktion der Tangente an die Bahn von Π, die zur angenäherten Ermittlung der Bahn benützt werden kann.

Auf diesem Wege sind die Fig. 1 und 2 ermittelt worden. Fig. 1 gibt die Bahnen des Punktes Π für eine Reihe von Anfangslagen Π_0, und für den Fall, wo die Bewegung mit wachsender Zeit erlischt. In Fig. 2 existiert eine von Null verschiedene stationäre Geschwindigkeit w_1. Der Punkt Π_1 bildet für die Bahnen von Π einen Windungspunkt. In dem Winkelraum zwischen den punktierten Halbstrahlen ist w im Zunehmen, ausserhalb im Abnehmen begriffen.

Es ist endlich noch leicht einzusehen, dass die Gleichungen (3) durch ein dem beschriebenen analoges Verfahren bei beliebigem z. B. graphisch gegebenen Reibungsgesetz graphisch integriert werden können.

10. Die Resultate der Untersuchung.

Bei dem betrachteten Bewegungsvorgang existiert stets wenigstens eine stationäre Bewegung. Damit es auch stets nur eine solche gebe ist notwendig und hinreichend ein monoton zu- oder doch nicht abnehmendes Reibungsgesetz. Dieses garantiert nicht nur die Stabilität der stationären Lösung, sondern es nähern sich dann sämtliche Bewegungen mit wachsender Zeit asymptotisch der stationären an, zu was für Anfangsbedingungen sie auch gehören mögen. Es ist also dazu keine weitere Einschränkung des (monotonen) Reibungsgesetzes nötig. Die stationäre Bewegung, die approximiert wird, ist entweder relative Ruhe oder eine gleichförmige Kreisbewegung, die sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie die der Siebpunkte, aber auf einem kleinern Kreise und mit einer gewissen Hysterisis vollzieht.