

## Ueber bestimmte Integrale mit Besselschen Funktionen.

Von

**E. Gubler.**

---

Im 75. Band des Crelleschen Journals für Mathematik hat H. Weber das Integral  $\int_0^{\infty} J^a(\alpha x) \frac{d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$  berechnet. Mit demselben

Integral beschäftigte sich auch Schönholzer in der Abhandlung zum Programm der Berner Kantonsschule 1877 und im 16. Band der mathematischen Annalen von Clebsch und Neumann hat Sonine pag. 54 ein Integral angegeben, welches das vorgenannte als speziellen Fall in sich schliesst. Die Resultate stimmten nicht überein, worauf Sonine am angeführten Orte aufmerksam machte. Als ich vor zwei Jahren der Darstellung Webers im ersten Band seiner partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik pag. 190 wieder begegnete, prüfte ich sämtliche Rechnungen noch einmal nach. Es ergab sich, dass H. Weber am Schluss seiner Entwicklung übersehen hatte, dass der Parameter  $x$  nicht negativ sein kann, wodurch im Endresultat ein Glied wegfiel. Ich erwähne dies auf Wunsch des Herrn Weber. Schönholzer wandte den Cauchyschen Satz an; der von ihm benutzte Integrationsweg ist aber unstatthaft, weil die  $J$ -Funktion nur im Ostpunkt ( $+\infty$ ) verschwindet, sonst am ganzen Horizont unendlich wird. Die Soninesche Formel gibt das allgemeinere Integral  $\int_0^{\infty} J^a(\alpha x) \frac{d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$  nicht,

wenigstens mir gelang es nicht, es daraus herzuleiten. Es hängen diese Integrale mit andern eng zusammen, die meines Wissens bis jetzt nicht berechnet worden sind. Bevor ich jedoch auf diesen eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Abhandlung eintrete,

will ich zeigen, dass Sonine und Weber übereinstimmen, wenn man beider Ergebnisse auf einen unmittelbar verwendbaren Rechnungsausdruck zurückführt.

I.

Auf einem etwas weiten Weg gelangt Sonine am angeführten Orte zum Integral

$$\int_0^\infty \frac{J^n(ax)}{x^n} \frac{dx}{x^2+h^2} = \frac{\pi}{2h} \frac{J^n(ah)}{(hi)^n} - \frac{\sqrt{\pi} \cdot a^n}{2^{n+1} \cdot h \cdot \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^1 (e^{ahy} - e^{-ahy}) (1-y^2)^{n-\frac{1}{2}} dy,$$

woraus für  $n = 0$  das von H. Weber berechnete Integral

$$\int_0^\infty J^0(ax) \frac{dx}{x^2+h^2} = \frac{\pi}{2h} J^0(ah) - \frac{1}{2h} \int_0^1 (e^{ahy} - e^{-ahy}) (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$$

hervorgeht. Durch Entwicklung der Exponentialfunktionen bekommt man

$$e^{ahy} - e^{-ahy} = 2 \sum_0^\infty \frac{(ah)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!} y^{2\lambda+1}.$$

Setzt man  $y^2 = t$ ,  $dy = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$ , so folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^{ahy} - e^{-ahy}) (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy &= \sum_0^\infty \frac{(ah)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!} \int_0^1 t^\lambda (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= 2 \sum_0^\infty \frac{(ah)^{2\lambda+1}}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\lambda+1))^2}, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty J^0(ax) \frac{dx}{x^2+h^2} = \frac{\pi}{2h} J^0(ah) - \frac{1}{h} \sum_0^\infty \frac{(ah)^{2\lambda+1}}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\lambda+1))^2}$$

H. Webers Gleichung lautet a. a. O.

$$\int_0^\infty J^0(\alpha x) \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \int_0^\pi e^{-\beta x \sin w} dw$$

Entwickelt man die Exponentialfunktion und integriert gliedweise, so erhält man wegen der Formeln

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \varphi \, d\varphi = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta x \sin w} \, dw = \frac{\pi}{2} J^0(\beta x i) - \sum_0^{\infty} \frac{(\beta x)^{2\lambda+1}}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\lambda+1))^2},$$

also das gleiche Ergebnis.

## II.

Es sei das Integral  $S = \int_0^{\infty} e^{-c(t+x)} J^a(t) \frac{dt}{t+x}$  vorgelegt. Wenn

die positive Zahl  $c = \frac{1}{2} \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right)$ , wo  $\gamma > 1$ , so ist nach einer be-

kannten Formel  $\int_0^{\infty} e^{-cx} J^a(x) \, dx = \frac{2 \gamma^{1-a}}{\gamma^2 + 1}$ ; folglich ist auch

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) (t+x)} J^a(t) \, dt = \frac{2 \gamma^{1-a}}{\gamma^2 + 1} e^{-\frac{x}{2} \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right)},$$

wenn  $\gamma > 1$ . Es sei  $\frac{1}{2} \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) = s$ ; man multipliziere mit  $ds = \frac{y^2+1}{2y^2} dy$  und integriere links von  $s = c$  bis  $s = \infty$ , also rechts von  $y = \gamma$  bis  $y = \infty$ .

Links hat man  $\int_c^{\infty} e^{-s(t+x)} \, ds = \frac{e^{-c(t+x)}}{t+x}$ . Man erhält also

$$S = \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{x}{2} \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right)} y^{-a-1} \, dy.$$

Um die obere Grenze des Integrals rechts in den Westpunkt ( $-\infty$ ) zu verlegen, setze man  $y = -z$ . Die Grenzen werden  $-\gamma$ ,  $-\infty$ . Man führe das Integral von  $-\infty$  nach  $-\gamma$  und gebe auf diesem Weg dem  $z$  die Phase  $-\pi$ , denke sich also  $y = e^{-i\pi} \cdot z$ . Schreibt man noch zur Abkürzung  $e^{\frac{x}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)} z^{-a-1} = Z$ , so hat man

$\int_{-\infty}^{-\gamma} Z \, dz = -e^{ia\pi} S$ . Zweitens führe man das Integral von  $-\gamma$

nach  $-\infty$ , lege hier  $z$  die Phase  $\pi$  bei, also  $y = e^{i\pi} \cdot z$ , dann ist

$\int_{-\gamma}^{-\infty} Z dz = e^{-ia\pi} S$ . Die Summe beider Integrale beträgt  $-2i \sin a\pi S$ .

Nimmt man das Schlingenintegral  $\int_{(-\gamma; 0)} Z dz$  \*) hinzu, so entsteht das

bekannte Integral  $\int_{(-\infty; 0)} Z dz = 2i\pi J^a(x)$  und hieraus folgt

$$S = \frac{1}{2i \sin a\pi} \int_{(-\gamma; 0)} Z dz - \frac{\pi}{\sin a\pi} J^a(x).$$

Im ersten Glied rechts substituierere man  $e^{\frac{x}{z}}(z^{-\frac{1}{z}}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} J^\lambda(x) z^\lambda$  und beachte, dass

$$\int_{(-\gamma; 0)} z^{\lambda-a-1} dz = 2i \sin((\lambda-a)\pi) \frac{\gamma^{\lambda-a}}{\lambda-a} = (-1)^\lambda (-2i \sin a\pi) \frac{\gamma^{\lambda-a}}{\lambda-a},$$

dann folgt  $\int_{(-\gamma; 0)} Z dz = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} (-2i \sin a\pi) \frac{\gamma^{\lambda-a}}{\lambda-a} (-1)^\lambda J^\lambda(x)$ . Gebraucht

man jetzt  $(-1)^\lambda J^\lambda(x) = J^{-\lambda}(x)$  und ersetzt dann noch  $\lambda$  durch  $-\lambda$ ,

so wird  $\frac{1}{2i \sin a\pi} \int_{(-\gamma; 0)} Z dz = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda+a} J^\lambda(x) \cdot \gamma^{-\lambda-a}$ , also schliesslich

$$(1) \int_0^\infty e^{-c(t+x)} J^a(t) \frac{dt}{t+x} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \frac{J^\lambda(x)}{\lambda+a} \cdot \gamma^{-\lambda-a} - \frac{\pi}{\sin a\pi} J^a(x).$$

Wenn  $a$  einer ganzen Zahl gleich wird, so kann diese Formel nicht benutzt werden. Da  $J^{-n}(t) = (-1)^n J^n(t)$ , so genügt es, nur den Fall zu betrachten, wo  $a = 0$  oder gleich einer positiven ganzen Zahl  $n$  wird. Man setze zuerst  $a = n + \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  bestimmt ist, zuletzt zu verschwinden. Im summatorischen Teil des Ausdrucks kommt nur das Glied, wo  $\lambda = -n$ , in Frage. Mit dem zweiten Teil zusammen gibt er

\*)  $(-\gamma; 0)$  bedeute: Weg aus  $-\gamma$  rechtläufig um Null nach  $-\gamma$ .

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\varepsilon} \left( J(x) \gamma^{-\varepsilon} - J(x) \right) &= (-1)^n \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!(\lambda+n)!} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left( \gamma^{-\varepsilon} - \frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda+n+1+\varepsilon)} \left(\frac{x}{2}\right)^\varepsilon \right) \\ &= (-1)^n \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!(\lambda+n)!} \left( A(\lambda+n+1) - \lg \frac{\gamma x}{2} \right), \text{ wo} \\ A(\lambda+n+1) &= \frac{\Gamma'(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda+n+1)}. \end{aligned}$$

Von der Summe in der Gl. (1) bleiben noch die beiden Stücke, wo  $\lambda$  von  $-n+1$  bis  $+\infty$  und von  $-n-1$  bis  $-\infty$  geht. Setzt man jedes Stück in eine Summe um, in welcher  $\lambda$  alle ganzen Zahlen von 1 bis  $\infty$  durchläuft, und schreibt man noch, um aus  $A(\lambda+n+1)$  den konstanten Teil abzusondern  $A(\lambda+n+1) = A(1) + \mathfrak{S} \frac{1}{\lambda+n}$ , so folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-c(t+x)} J^n(t) \frac{dt}{t+x} &= (-1)^n \left( A(1) - \lg \frac{\gamma x}{2} \right) J^n(x) + (-1)^n \sum_{\lambda=0}^\infty \mathfrak{S} \frac{1}{\lambda+n} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!(\lambda+n)!} \\ (1a) \quad &+ \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{1}{\lambda} J^n(x) \gamma^{-\lambda} - (-1)^n \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda} J^n(x) \gamma^\lambda. \end{aligned}$$

### III.

Die Ausdrücke, die soeben entwickelt wurden, werden einfacher, wenn man  $c = 0$ , also  $\gamma = 1$  setzt. Man hat dann

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J^n(t) \frac{dt}{t+x} &= \int_1^\infty e^{-\frac{x}{z} \left(y - \frac{1}{y}\right)} y^{-a-1} dy = \int_0^\pi e^{-x \sin z - az} dz \\ &= \frac{1}{2i \sin a \pi} \int_{(-1; 0)} e^{\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right)} z^{-a-1} dz - \frac{\pi}{\sin a \pi} J^n(x). \end{aligned}$$

Dies sei zur Abkürzung  $= T - \frac{\pi}{\sin a \pi} J^n(x)$  gesetzt.

Entwickelt man  $T$  nach steigenden Potenzen von  $x$  und unterscheidet gerade und ungerade Exponenten, so hat man, wenn  $[x^n | f]$  als Koeffizient von  $x^n$  in  $f$  gelesen wird:

$$\left[ \left( \frac{x}{2} \right)^{2\lambda} \right] T = \frac{1}{2i \sin a\pi} \cdot \frac{1}{(2\lambda)!} \int_{(-1; 0)} (z^2 - 1) z^{-2\lambda - a - 1} dz.$$

Setzt man hier  $z^2 = t$ , so wird der  $t$ -weg zu einer von  $t = 1$  aus geworfenen Schlinge, welche 0 zweimal umläuft. Der Koeffizient von  $\left( \frac{x}{2} \right)^{2\lambda}$  wird daher

$$\frac{1}{2i \sin a\pi} \frac{1}{(2\lambda)!} \int (1-t)^{2\lambda} t^{-\lambda - \frac{a}{2} - 1} dt, \text{ Weg} = \text{---} \img alt="Diagram of a keyhole contour in the complex plane. The contour starts at t=1 on the real axis, goes clockwise around the origin, and returns to t=1. Arrows indicate the direction of integration: clockwise around the origin and from right to left along the real axis." data-bbox="680 244 870 294"/>$$

Man denke sich den Exponenten von  $t$  durch  $b - 1$  ersetzt, wo  $b$  positiv sein muss, damit man den Weg um 0 zusammen ziehen könne. Auf dem Hinweg hat  $t$  die Phase  $-2\pi$ , auf dem Herweg  $2\pi$ ; die entsprechenden Multiplikatoren des geradlinigen

Integrals  $\int_0^1$  sind  $-e^{-2i b \pi}$  und  $e^{2i b \pi}$ ; also ist

$$\int_{\text{Weg wie in obiger Figur}} (1-t)^{2\lambda} t^{b-1} dt = 2i \sin(2b\pi) \int_0^1 (1-t)^{2\lambda} t^{b-1} dt = 2i \sin(2b\pi) \frac{\Gamma(2\lambda + 1) \Gamma(b)}{\Gamma(2\lambda + 1 + b)}.$$

Jetzt darf man  $b$  durch die negative Zahl  $-\lambda - \frac{a}{2}$  ersetzen und erhält statt des letzten Ergebnisses

$$-2i \sin a\pi \frac{(2\lambda)! \Gamma(-\lambda - \frac{a}{2})}{\Gamma(\lambda - \frac{a}{2} + 1)}. \text{ Also ist}$$

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{x}{2} \right)^{2\lambda} \right] T &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(-\lambda - \frac{a}{2})}{\Gamma(\lambda - \frac{a}{2} + 1)} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{a\pi}{2}} \frac{(-1)^\lambda}{\Gamma(\lambda + \frac{a}{2} + 1) \Gamma(\lambda - \frac{a}{2} + 1)} \\ &= \frac{1}{a} \frac{(-1)^\lambda}{(1 - \frac{a}{2})(2 - \frac{a}{2}) \cdots (\lambda - \frac{a}{2})(1 + \frac{a}{2})(2 + \frac{a}{2}) \cdots (\lambda + \frac{a}{2})} \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{x}{2} \right)^{2\lambda+1} \right] T &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma(-\lambda - \frac{a+1}{2})}{\Gamma(\lambda + \frac{3-a}{2})} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{a\pi}{2}} \frac{(-1)^\lambda}{\Gamma(\lambda + \frac{3+a}{2}) \Gamma(\lambda + \frac{3-a}{2})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^\lambda}{\frac{1-a}{2} \cdot \frac{3-a}{2} \cdots (\lambda + \frac{1-a}{2}) \cdot \frac{1+a}{2} \cdot \frac{3+a}{2} \cdots (\lambda + \frac{1+a}{2})} \end{aligned}$$

Endlich ergibt sich

$$(2) \quad \int_0^{\infty} J^a(t) \frac{dt}{t+x} = \frac{1}{a} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\left(1 - \frac{a}{2}\right) \cdots \left(\lambda - \frac{a}{2}\right) \left(1 + \frac{a}{2}\right) \cdots \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)} \\ + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}}{\frac{1-a}{2} \cdots \left(\lambda + \frac{1-a}{2}\right) \cdot \frac{1+a}{2} \cdots \left(\lambda + \frac{1+a}{2}\right)} - \frac{\pi}{\sin a\pi} J^a(x).$$

Die erste Summe rechts ist eine gerade Funktion von  $a$ , und hat für ein sehr kleines  $a$  die Entwicklung  $J^0(x) + a^2 F(x) + \dots$ . Da  $\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \pi^2 + \dots\right)$ , so ergibt sich, wenn  $a$  verschwindet

$$(2a) \quad \int_0^{\infty} J^0(t) \frac{dt}{t+x} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}}{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\right)^2} + \left(A(1) - \lg \frac{x}{2}\right) J^0(x) \\ + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \in \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda}{\lambda! \lambda!}.$$

#### IV.

Dreht man im Integral (2)  $x$  aus der positiven Achse zuerst in die Südhälfte des Meridians, dann aus der positiven Achse in die Nordhälfte, subtrahiert das zweite Integral vom ersten, beachtet, dass  $J^a(e^{-\frac{i\pi}{2}} x) = e^{-ia\pi} J^a(e^{\frac{i\pi}{2}} x)$ , und dividiert dann noch durch  $2ix$ , so ergibt sich:

$$(3) \quad \int_0^{\infty} J^a(t) \frac{dt}{t^2+x^2} = \frac{\pi e^{-ia\pi}}{2x \cos \frac{a}{2}\pi} J^a(ix) - \frac{1}{2x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}}{\frac{1-a}{2} \cdots \left(\lambda + \frac{1-a}{2}\right) \frac{1+a}{2} \cdots \left(\lambda + \frac{1+a}{2}\right)}$$

Auf dieselbe Weise erhält man aus der Gleichung (2a), wenn man beachtet, dass das erstemal  $\lg \frac{x}{2}$  in  $-\frac{i\pi}{2} + \lg \frac{x}{2}$ , das zweitemal in  $\frac{i\pi}{2} + \lg \frac{x}{2}$  übergeht

$$(3a) \quad \int_0^{\infty} J^0(t) \frac{dt}{t^2+x^2} = \frac{\pi}{2x} J^0(ix) - \frac{1}{x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{x^{2\lambda+1}}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\lambda+1))^2}.$$

Die Formel folgt auch unmittelbar aus (3), wenn man dort  $a=0$  setzt.

Zürich, im Oktober 1902.