Bemerkungen
über das Rechnen mit Grenzwerten und Irrationalzahlen.

Von

H. Burkhardt.

Die arithmetische Behandlung irrationaler Grössen gründet sich bekanntlich auf folgende drei Sätze:

1. Wenn eine Scheidung sämtlicher rationalen Zahlen in zwei Klassen a, A gegeben ist, derart, dass jedes a kleiner ist als jedes A, dass aber weder unter den a eine grösste, noch unter den A eine kleinste ist, so gibt es eine (und nur eine) Irrationalzahl α, die grösser als jedes a und kleiner als jedes A ist.

2. Wenn eine Folge von unendlich vielen Zahlen $a_n, (n = 0, 1, 2, \cdots)$ gegeben ist und wenn zu jeder gegebenen Grösse ε eine ganze Zahl N gefunden werden kann, von der Art, dass

$$| a_p - a_q | < \varepsilon$$

ist, sobald p, q beide $> N$ sind, so gibt es eine (rationale oder irrationale) Zahl α mit der Eigenschaft, dass zu jedem gegebenen ε ein N so gefunden werden kann, dass

$$| a_p - \alpha | < \varepsilon$$

ist, sobald $p > N$ ist.

3. Wenn eine Folge von unendlich vielen Zahlen gegeben ist und wenn stets $a_{n+1} > a_n$ ist, aber jedes a_n kleiner ist als eine von n unabhängige Zahl M, so giebt es ein α der unter (2) bezeichneten Art.

Die verschiedenen Theorien der irrationalen Grössen (Euklid-Dedekind; G. Cantor; Weierstrass) unterscheiden sich dadurch, dass je einer dieser Sätze als Definition an die Spitze gestellt und die beiden andern dann als Lehrsätze aus ihm abgeleitet werden.

(Gelegentlich findet man in der Litteratur übrigens noch eine vierte Art der Einführung einer Irrationalzahl, die bis zu einem gewissen Grade die Vorteile des zweiten und des dritten Verfahrens vereinigt, aber freilich auch mehr voraussetzt, als eigentlich erforderlich ist. Es wird nämlich angenommen, man sei im Besitz von zwei unendlichen Zahlenfolgen, einer der a, in der immer $a_{n+1} > a_n$, und einer der b, in der immer $b_{n+1} < b_n$ ist, und die überdies so beschaffen sind, dass jedes b grösser als jedes a ist und dass $b_n - a_n$ kleiner als jede gegebene Grösse ε gemacht werden kann, indem man n hinlänglich gross nimmt; dann, heisst es, konvergieren sowohl die a als die b gegen eine gemeinsame Grenze α).

In vielen Fällen — jedenfalls in allen Fällen der Anwendungen — wird man sich nun nicht damit begnügen können, die Existenz einer solchen Zahl bewiesen, bezw. postuliert zu haben, sondern man wird verlangen, sie mit vorgegebener Genauigkeit zu berechnen. Als „mit der Genauigkeit ε berechnet" wird eine Zahl α dann angesehen, wenn zwei rationale Zahlen a, A bekannt sind von der Art, dass $a < \alpha < A$ und $| A - a | < \varepsilon$ ist. Insbesondere heisst α „mit einer Genauigkeit von ν Dezimalstellen berechnet", wenn in der eben ausgesprochenen Definition $\varepsilon = 10^{-\nu}$ genommen ist. Häufig verlangt man sogar dabei noch etwas mehr: man verlangt zwei Zahlen der Form

$$\left(a - \frac{1}{2}\right) 10^{-\nu} \text{ und } \left(a + \frac{1}{2}\right) 10^{-\nu}$$

unter a eine ganze Zahl verstanden, anzugeben, zwischen denen α eingeschlossen ist. Wenn diese weitergehende Forderung gemeint ist, soll im folgenden der Ausdruck „auf ν Stellen genau" gebraucht werden.

Es ist nun eine für das Rechnen mit solchen Zahlen fundamentale Thatsache, auf die meines Wissens noch nicht öffentlich aufmerksam gemacht worden ist — wenn sie auch sicher viele Mathematiker schon mehr oder weniger deutlich erkannt haben —, dass zwischen den angeführten Sätzen ein wesentlicher Unterschied besteht, sobald es sich darum handelt, nicht nur die Existenz einer Irrationalzahl zu beweisen, sondern sie selbst mit vorgeschriebener Genauigkeit zu berechnen.

Am vollkommensten gelingt das, wenn die Definition der zu berechnenden Irrationalzahl direkt auf den ersten Satz gestützt werden kann, ohne dass man nötig hätte, den Satz (2) oder (3) oder einen aus diesen abgeleiteten Satz zu Hilfe zu nehmen. Als „gegeben“ wird nämlich eine solche Scheidung der rationalen Zahlen in zwei Klassen dann — und nur dann — angesehen werden können, wenn es möglich ist, von jeder gegebenen rationalen Zahl durch ausführbare Operationen [also in letzter Instanz durch eine endliche Anzahl von Additionen und Multiplikationen] zu entscheiden, ob sie zu der einen oder zu der andern Klasse gehört. (Das klassische Beispiel hiefür ist die durch das Zeichen „$\sqrt{2}$“ postulierte Irrationalzahl: hier gehört eine positive rationale Zahl zu den a oder zu den A, je nachdem ihr Quadrat kleiner oder grösser als 2 ist). Immerhin reicht diese Möglichkeit noch nicht aus, wenn man α durch eine von vorneherein begrenzbare Anzahl von Schritten mit vorgegebener Genauigkeit berechnen will; es ist vielmehr dazu noch eine Bedingung erforderlich, die allerdings in den weitaus meisten Fällen, in denen man auf diese Frage geführt wird, von selbst erfüllt ist: man muss nämlich von einer Zahl a_1 schon wissen, dass sie zu den a, und von einer andern A_1, dass sie zu den A gehört. Ist das der Fall, so kann man z. B. zunächst die Zahl $\frac{1}{2}(A_1 + a_1)$ darauf untersuchen, ob sie zu den a oder zu den A gehört und damit das Intervall der Zahlen, von denen die Entscheidung noch aussteht, auf die Hälfte reduzieren. Durch hinreichend oftmalige Wiederholung dieses Verfahrens kann dann dieses Intervall beliebig klein gemacht, m. a. W. α mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden; und man ist auch in jedem einzelnen Fall im Stande von vornherein anzugeben, mit wie oftmaliger Wiederholung man auf jeden Fall sicher ausreicht. (Natürlich lässt sich das Verfahren in der mannigfaltigsten Weise modifizieren, z. B. so dass es für Decimalbruchrechnung bequem wird; oder man kann nach dem Prinzip der Farey'schen Reihen vorgehen; u. s. w.). Ob freilich zwei Irrationalzahlen einander gleich sind, lässt sich weder nach dieser Definition noch nach einer der beiden andern durch Rechnung entscheiden; d. h. wenn sie verschieden sind, so muss sich nach einer endlichen (aber nicht vor Durchführung der Rechnung angebbaren) Zahl von Operationen herausstellen, welche die grössere ist; sind sie aber gleich, so führt beliebige Steigerung der Genauigkeit der Rechnung nicht zur Entscheidung.

Nicht ganz so einfach liegt die Sache, wenn man die Berechnung eines Grenzwerts auf den zweiten Satz stützt. Man hat zwar α mit der Genauigkeit ε berechnet, sobald man die nach dem Satze zu diesem ε gehörende Zahl N bestimmt und a_N berechnet hat. (Sind die a selbst als Grenzwerte gegeben, so kann man etwa die zu $\varepsilon/2$ gehörende Zahl N bestimmen und dann a_N mit der Genauigkeit ε berechnen). Aber damit hat man noch kein Mittel, um von einer beliebig vorgelegten rationalen (oder auch irrationalen) Zahl β zu entscheiden, ob sie kleiner oder grösser als α ist; eine solche Entscheidung ist nur dann auf dem genannten Wege möglich, wenn $| \beta - \alpha | > \varepsilon$ ist, und wie klein man dazu ε nehmen muss, kann man nicht wissen, solange man α nicht kennt. Man kann zwar auch hier durch wiederholte Halbierung das Unbestimmtheitsintervall beliebig klein machen; wenn aber zufällig α gerade gleich β ist, kann die blosse Rechnung nie zur Erkenntnis dieser Thatsache führen. Was also bei der ersten Definition nur von der Vergleichung der Irrationalzahlen unter einander galt, gilt bei dieser zweiten auch von der Vergleichung einer rationalen mit einer irrationalen Zahl, ja selbst von der Vergleichung zweier Rationalzahlen, sofern sie als Grenzwerte eingeführt sind. Damit hängt zusammen, dass es nicht immer möglich ist, einen Grenzwert in dem oben bezeichneten engeren Sinne „auf ν Stellen genau" zu berechnen. Ist der Grenzwert nämlich, ohne dass man das vorher weiss, genau gleich einem ungeraden Vielfachen von $2^{-1}\, 10^{-\nu}$, so kann man die Näherungsrechnung noch so weit treiben, man wird doch nie zu einer Entscheidung gelangen, ob er grösser oder kleiner ist; und ist er einem solchen Vielfachen nicht gleich, so muss sich das zwar schliesslich herausstellen, aber man kann nicht vor Beginn der Rechnung angeben, wie klein man ε nehmen muss, um die Entscheidung herbeizuführen.

Sind dagegen zwei Zahlen β, γ vorgelegt, so kann immer mindestens für die eine von ihnen die Entscheidung getroffen werden, ob sie kleiner oder grösser als α ist; man braucht dazu nur α mit einer Genauigkeit $\varepsilon < b - a$ zu berechnen.

Viel weniger günstig liegt die Sache, wenn eine zu berechnende Irrationalzahl durch den dritten Satz gegeben ist, also als Grenzwert einer wachsenden, aber nicht über alle Grenzen wachsenden Folge. Man kann zwar auch dann, theoretisch zu reden, von jeder rationalen Zahl entscheiden, ob sie zu den a oder zu den A gehört; aber diese Entscheidung verlangt, wenn sie im letzteren Sinne ausfallen soll, die Vergleichung mit sämtlichen a_n, also die Fällung unendlich vieler Urteile, die nicht ausführbar ist. Daher kann man zwar, theoretisch zu reden, auch in diesem Fall α mit beliebiger Genauigkeit berechnen — man braucht nur in der Folge der a_n hinlänglich weit zu gehen —; aber man hat bei Ausführung der Rechnung kein Kriterium dafür, ob man schon hinlänglich weit gegangen ist, und noch weniger kann man vor Beginn der Rechnung wissen, wie weit zu gehen erforderlich oder hinreichend sein wird. In allen Fällen, in welchen die Existenz eines Grenzwerts zwar bewiesen, aber nicht zugleich die Möglichkeit gegeben ist, ihn zu berechnen, wird man bei näherem Zusehen finden, dass das darauf beruht, dass von dem hier besprochenen Satz (3) Gebrauch gemacht ist: so bei dem Satz, dass eine stetige Funktion ein Maximum hat; bei dem darauf beruhenden Argand'schen (ersten Cauchy'schen) Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra; bei Poincarés Beweis des Satzes, dass jedes Integral einer Riccati'schen Differentialgleichung $z' + z^2 - K = 0$ (bei bestimmten Voraussetzungen über K) gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert, wenn z durch reelle positive Werte über alle Grenzen geht; bei C. Neumanns ursprünglichem Beweis des Satzes, dass zu einem konvexen Gebiet eine Konfigurationskonstante gehört, die kleiner als 1 ist, u. s. w.

Ich bin seit längerer Zeit zu der Auffassung gekommen — und was Hensel in der Vorrede zu seiner Ausgabe von Kroneckers zahlentheoretischen Vorlesungen mitteilt, scheint mir keinen Zweifel mehr übrig zu lassen — dass Kroneckers ablehnende Haltung gegenüber der Weierstrass'schen Definition der Irrationalzahlen und der auf diese Definition gebauten Weierstrass'schen Funktionentheorie gerade hier ihre Wurzel hat. (Selbstverständlich rede ich hier nicht von dem Spiel mit dem Gedanken einer gänzlichen Abschaffung der Irrationalzahl, in dem sich Kroneckers Aeusserungen in seiner letzten Zeit zuweilen gefielen.) Kroneckers eigene Auffassung des Irrationalen scheint, soweit es sich aus seiner Behandlung desselben bei ernsthaften Untersuchungen erkennen lässt, der Dedekind'schen nahegestanden zu sein. Immerhin zeigt seine Behandlung des Fundamentalsatzes der Algebra (J. f. Math. 101, 1887, p. 337), dass er dem Rechnen mit Irrationalzahlen eine andere Bedeutung beilegte, die übrigens, soviel ich sehe, sich nicht in sich widerspruchsfrei durchführen lässt, sobald unstetige Funktionen in den Kreis der Untersuchung gezogen werden sollen. (Man vergleiche darüber eine zunächst gegen Mertens gerichtete, aber auch Kronecker treffende Bemerkung Hilberts, Fortschr. d. Math. 24, 1892 [95], p. 87). Uebrigens zeigen die oben erwähnten Mitteilungen Hensel's, dass Kronecker wenigstens ihm nahestehenden Schülern gegenüber den Gebrauch von Existenzbeweisen, die keine Anweisung zur Konstruktion enthalten — also doch wohl auch den Gebrauch des Satzes (3) —, nicht absolut perhorrescierte, sondern in ihm nur das Zeichen einer Entwicklungsstufe sah, auf der die Erkenntnis sich noch nicht zur vollen Beherrschung des Gegenstandes durchgerungen hat. Damit ist freilich eine allgemeine erkenntnistheoretische Frage berührt, deren Beantwortung nicht mehr Sache der Mathematik ist.