Über die Principien der Variationsrechnung und die geodätischen Linien des n-dimensionalen Rotationsellipsoides.

Von

Ferdinand Rudio.

Die vorliegende Arbeit, mit der ich mich Ostern 1881 am eidgenössischen Polytechnikum habilitierte, verdankt ihre Entstehung einer Anregung von Weierstrass, der mich dazu veranlasst hatte, seine von ihm zum ersten Male im Sommer 1879 vorgetragenen neuen Grundlagen der Variationsrechnung auf n Dimensionen zu verallgemeinern und auf ein specielles n-dimensionales Problem anzuwenden. Dementsprechend enthalten die folgenden Zeilen, in denen ich das Original etwas gekürzt wiedergebe, zunächst eine Übersicht über den theoretischen Teil der genannten Weierstrass-schen Vorlesung, sodann die Verallgemeinerung auf n Dimensionen und endlich die Anwendung auf die geodätischen Linien des n-dimensionalen Rotationsellipsoides.

I.

Damit das Integral

$$J = \int_{t'}^{t''} F(x, y, x', y')\, dt \tag{1}$$

zu einem Extremum (Maximum oder Minimum) werde, muss zunächst die erste Variation, die sich in der Form

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{t'}^{t''} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} \right) \xi + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right\} dt \\ + \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{t'}^{t''} \end{aligned} \tag{2}$$

darstellen lässt, verschwinden. Dabei bedeuten x, y Funktionen der unabhängigen Variabeln t und x', y' ihre Ableitungen; ξ, η sind die Variationen von x, y. Für x und y ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0,\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\end{aligned} \tag{3}$$

aus denen man die Kurve $x = \varphi(t, \alpha, \beta)$, $y = \psi(t, \alpha, \beta)$ erhält, längs der das vorgelegte Integral zu einem Extremum werden soll.

Eine weitere Bedingung für die Existenz eines Extremums ist die, dass die zweite Variation ihr Zeichen nicht ändere. Diese Bedingung führt dazu, dass die Funktion F_1, die durch jede der drei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = y'^2 F_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = -x' y' F_1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = x'^2 F_1 \tag{4}$$

definiert werden kann, längs der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ihr Zeichen nicht wechseln darf.

Als dritte Bedingung endlich ergiebt sich, ebenfalls aus der zweiten Variation, der Jacobi'sche Satz, dass der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ die Eigenschaft des Extremums nur zwischen zwei konjugierten Punkten zukommt.

Zum Beweise dafür, dass diese drei notwendigen Bedingungen auch hinreichend seien, führte Weierstrass in jener Vorlesung vom Sommer 1879 zum ersten Male eine eigentümliche Funktion ein, die neben ihrer Bedeutung für den in Rede stehenden Beweis auch noch dadurch von Interesse ist, dass sie die Bedingung, F_1 solle längs der gefundenen Kurve sein Zeichen nicht ändern, ohne Hülfe der zweiten Variation abzuleiten gestattet. Der Gang der Weierstrass'schen Untersuchung ist der folgende.

Für die Kurve $x = \varphi(t, \alpha, \beta)$, $y = \psi(t, \alpha, \beta)$ seien die notwendigen Bedingungen erfüllt. Man wähle einen beliebigen, durch $t = t_0$ ausgezeichneten Punkt 0 der Kurve als Ausgangspunkt und führe die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'(t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \varphi_1(t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \varphi_2(t),\\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi'(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \psi_1(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = \psi_2(t),\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} \varphi'(t_0), & 0, & \varphi_1(t_0), & \varphi_2(t_0) \\ \psi'(t_0), & 0, & \psi_1(t_0), & \psi_2(t_0) \\ 0, & \varphi'(t), & \varphi_1(t), & \varphi_2(t) \\ 0, & \psi'(t), & \psi_1(t), & \psi_2(t) \end{vmatrix} = D(t_0, t). \tag{6}$$

Dann kann man leicht zeigen, dass die Kurve $x = \varphi(t, \alpha, \beta)$, $y = \psi(t, \alpha, \beta)$ in einen Flächenstreifen von der Beschaffenheit eingehüllt werden kann, dass nach jedem seiner Punkte vom Punkte 0 aus eine und nur eine den Differentialgleichungen (3) genügende Kurve gezogen werden kann. Die Möglichkeit der Konstruktion dieses Flächenstreifens ist aber an die Bedingung geknüpft, dass $D(t_0, t)$ nicht verschwinde; mit der nächsten auf t_0 folgenden Wurzel von $D(t_0, t) = 0$ hört sie auf. Der durch diese Wurzel, die wir mit t_1 bezeichnen wollen, bestimmte Punkt 1 der Kurve ist in dem Sinne des Jacobi'schen Kriteriums der zu dem Punkte 0 konjugierte Punkt.

Wir wählen nun auf der Kurve einen Punkt 1′ vor 1 (Fig. I), sodass sich in dem Intervalle 0 1′, die Grenze 1′ eingeschlossen, kein zu 0 konjugierter Punkt befindet, und ziehen von einem beliebigen, zwischen 0 und 1′ gelegenen Punkte 2 eine willkürliche Kurve 2 3. Der Punkt 3 werde so nahe bei 2 gewählt, dass die den Differentialgleichungen (3) genügende Kurve 0 3 ganz innerhalb des oben definierten Flächenstreifens liegt.

Fig. I.

Betrachen wir jetzt die Änderung, die das Integral J erleidet, wenn wir es über 0 3 und 3 2 statt über 0 2 erstrecken. Wir bezeichnen den Integrationsweg durch Indices und deuten durch einen horizontalen Strich über dem J an, dass das Integral über eine willkürliche, nicht den Differentialgleichungen genügende Kurve erstreckt werden soll. Die zu untersuchende Änderung ist dann durch $J_{03} + \overline{J}_{32} - J_{02}$ dargestellt. Bezeichnet man mit ξ_3 und η_3 die relativen Koordinaten von 3 gegen 2 und setzt $\frac{\partial F}{\partial x'} = F^{(1)}$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = F^{(2)}$, so findet man:

$$J_{03} - J_{02} = F^{(1)}(x_2, y_2, x_2', y_2')\,\xi_3 + F^{(2)}(x_2, y_2, x_2', y_2')\,\eta_3 + \cdots \tag{7}$$

Wegen der Homogeneität von F kann man x_2' und y_2' in $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ durch die Richtungskosinus p_2 und q_2 von 0 2 in 2 ersetzen. Bezeichnet man ferner mit $\bar{p}_2$ und $\bar{q}_2$ die Richtungskosinus von 3 2 in 2 und mit σ die Länge des Bogens 3 2, so erhält man wegen $\xi_3 = -\bar{p}_2\,\sigma + \cdots$ und $\eta_3 = -\bar{q}_2\,\sigma + \cdots$ für $J_{03} - J_{02}$ den Ausdruck:

$$J_{03} - J_{02} = -\{F^{(1)}(x_2, y_2, p_2, q_2)\,\bar{p}_2 + F^{(2)}(x_2, y_2, p_2, q_2)\,\bar{q}_2\}\,\sigma + \cdots \tag{8}$$

Für $\bar{J}_{32}$ ergiebt sich, insofern man die Koordinaten der Punkte von 3 2 durch die zugehörige Bogenlänge σ' ausdrückt, der Wert:

$$\bar{J}_{32} = \int_0^\sigma F(x_{\sigma'}, y_{\sigma'}, x'_{\sigma'}, y'_{\sigma'})\,d\sigma'. \tag{9}$$

Entwickelt man nach σ' und integriert, so kommt:

$$\bar{J}_{32} = F(x_2, y_2, \bar{p}_2, \bar{q}_2)\,\sigma + \cdots, \tag{10}$$

woraus man mit Rücksicht auf die Homogeneität von F schliesslich erhält:

$$\bar{J}_{32} = \{F^{(1)}(x_2, y_2, \bar{p}_2, \bar{q}_2)\,\bar{p}_2 + F^{(2)}(x_2, y_2, \bar{p}_2, \bar{q}_2)\,\bar{q}_2\}\,\sigma + \cdots \tag{11}$$

Nun definiert Weierstrass eine neue Funktion $E(x, y, p, q, \bar{p}, \bar{q})$ durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} E(x, y, p, q, \bar{p}, \bar{q}) = \{&F^{(1)}(x, y, \bar{p}, \bar{q}) - F^{(1)}(x, y, p, q)\}\,\bar{p} \\ + \{&F^{(2)}(x, y, \bar{p}, \bar{q}) - F^{(2)}(x, y, p, q)\}\,\bar{q} \end{aligned} \tag{12}$$

Dadurch erhält man jetzt:

$$J_{03} + \bar{J}_{32} - J_{02} = E(x_2, y_2, p_2, q_2, \bar{p}_2, \bar{q}_2)\,\sigma + \cdots \tag{13}$$

Für den Fall eines Extremums ergiebt hieraus die Bedingung, dass längs der Kurve 0 1' für jeden Punkt 2 und für jede beliebige Richtung $\bar{p}_2, \bar{q}_2$ die Funktion E ihr Zeichen nicht wechseln darf.

Die Funktion E steht in naher Beziehung zu der durch die Gleichungen (4) definierten Funktion F_1. Berücksichtigt man nämlich die bekannte Gleichung:

$$\begin{aligned} &f(p_1, q_1) - f(p_o, q_o) \\ = \int_0^1 \{&f^{(1)}[p_o + \varepsilon(p_1 - p_o), q_o + \varepsilon(q_1 - q_o)](p_1 - p_o) \\ + &f^{(2)}[p_o + \varepsilon(p_1 - p_o), q_o + \varepsilon(q_1 - q_o)](q_1 - q_o)\}\,d\varepsilon \end{aligned} \tag{14}$$

und setzt zur Abkürzung

$$p_\varepsilon = p + \varepsilon(\bar{p} - p), \qquad q_\varepsilon = q + \varepsilon(\bar{q} - q),$$

so erhält man zunächst:

$$\left.\begin{aligned} & F^{(1)}(x, y, \bar{p}, \bar{q}) - F^{(1)}(x, y, p, q) \\ = & \int_0^1 \{F^{(11)}(x, y, p_\varepsilon, q_\varepsilon)(\bar{p} - p) + F^{(12)}(x, y, p_\varepsilon, q_\varepsilon)(\bar{q} - q)\}\, d\varepsilon, \\ & F^{(2)}(x, y, \bar{p}, \bar{q}) - F^{(2)}(x, y, p, q) \\ = & \int_0^1 \{F^{(21)}(x, y, p_\varepsilon, q_\varepsilon)(\bar{p} - p) + F^{(22)}(x, y, p_\varepsilon, q_\varepsilon)(\bar{q} - q)\}\, d\varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad (15).$$

Addiert man aber diese Gleichungen, nachdem man mit $\bar{p}$ und $\bar{q}$ multipliziert hat, und berücksichtigt

$$F^{(11)} = F_1\, q_\varepsilon^2, \quad F^{(12)} = -F_1\, p_\varepsilon\, q_\varepsilon = F^{(21)}, \quad F^{(22)} = F_1\, p_\varepsilon^2, \qquad (16)$$

so ergiebt sich die angekündigte Beziehung zwischen E und F_1 in der Form:

$$E(x, y, p, q, \bar{p}, \bar{q}) = (p\,\bar{q} - q\,\bar{p})^2 \int_0^1 F_1(x, y, p_\varepsilon, q_\varepsilon)(1 - \varepsilon)\, d\varepsilon. \qquad (17)$$

Diese Gleichung liefert sofort die Bedingung, dass F_1 längs der Kurve sein Zeichen nicht wechseln darf.

Die Bedingung, dass die Funktion E für jeden Punkt 2 der Kurve $0\,1'$ und für jede beliebige Richtung $\bar{p}_2, \bar{q}_2$ dasselbe Zeichen besitzen muss, ist für das Bestehen eines Extremums auch hinreichend. Zum Beweise hülle man $0\,1'$ in einen solchen Bereich ein, dass E für alle darin befindlichen Punkte und für alle Richtungen dasselbe Zeichen besitzt. Verbindet man dann einen auf 0 folgenden Nachbarpunkt $0'$ mit $1'$ durch eine willkürliche, aber innerhalb des Bereiches liegende Kurve (Fig. II), so lässt sich zeigen, dass das über diese Kurve erstreckte Integral bei einem negativen E kleiner, bei einem positiven E grösser ist, als das über die Differentialgleichungskurve $0'\,1'$ erstreckte Integral.

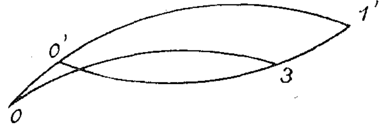

Fig. II.

Zu diesem Zwecke wähle man auf der willkürlichen Kurve einen Punkt 3 und drücke seine Koordinaten als Funktionen der von $0'$ aus gemessenen Bogenlänge u aus. Setzt man dann

$$J_{03} + \bar{J}_{31'} = S(u) \tag{18}$$

und lässt u das eine Mal um den kleinen Betrag σ zunehmen, das andere Mal um σ abnehmen, so erhält man mit Benutzung der früheren Rechnungen:

$$\begin{aligned} S(u-\sigma) - S(u) &= \quad E(x_3, y_3, p_3, q_3, \bar{p}_3, \bar{q}_3)\,\sigma + \cdots \\ S(u+\sigma) - S(u) &= -E(x_3, y_3, p_3, q_3, \bar{p}_3, \bar{q}_3)\,\sigma + \cdots \end{aligned} \tag{19}$$

Mithin ist E gleich dem negativen Differentialquotienten von $S(u)$ nach u. Wenn also E längs $0'\,3\,1'$ nirgends positiv und nicht in jedem Punkte gleich Null ist, so ist das über $0'\,1'$ erstreckte Integral grösser als das über die willkürliche Kurve erstreckte. Entsprechendes gilt, wenn E längs $0'\,3\,1'$ nirgends negativ und nicht in jedem Punkte gleich Null ist. Im ersten Falle erhalten wir also ein Maximum, im zweiten ein Minimum.

II.

Wir gehen nun zur Verallgemeinerung der in I kurz skizzierten Weierstrass'schen Untersuchungen über, indem wir folgende Aufgabe formulieren:

Es sollen n Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$, zwischen denen die m Bedingungsgleichungen $f_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \cdots m)$ bestehen, so als Funktionen von t bestimmt werden, dass das Integral

$$J = \int_{t'}^{t''} F(x_1, x_2, \cdots x_n, x'_1, x'_2, \cdots x'_n)\,dt \tag{1}$$

zu einem Extremum werde.

Die Forderung, dass J nur von der Gestalt der Kurve $x_1 = \varphi_1(t), \cdots x_n = \varphi_n(t)$ abhängig sei, nicht aber von der Art und Weise, wie $x_1, \cdots x_n$ als Funktionen von t dargestellt werden, hat zunächst wieder die Homogeneität von F in Bezug auf $x'_1 \cdots x'_n$ zur Folge. Sodann ist für das Bestehen eines Extremums notwendig, dass die erste Variation

$$\delta J = \int_{t'}^{t''} \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_i'}\right) \xi_i \, dt + \left[\sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i'}\right]_{t'}^{t''} \tag{2}$$

verschwinde. Gleichzeitig hat man:

$$\sum_i \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \xi_i = 0 \qquad (\mu = 1, \cdots m). \tag{3}$$

Nach der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren sind nun die $n + m$ Grössen $x_1, \cdot\cdot\, x_n, \lambda_1, \cdot\cdot\, \lambda_m$ als Funktionen von t aus den $n + m$ Gleichungen

$$\left.\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_i'} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} - \cdots - \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0 \\ f_\mu = 0 \\ (i = 1, \cdots n, \mu = 1, \cdots m) \end{gathered}\right\} \tag{4}$$

zu bestimmen.

Gesetzt, man habe

$$x_1 = \varphi_1 \,(t, \alpha_1, \cdots \alpha_{2(n-1)}), \cdots x_n = \varphi_n \,(t, \alpha_1, \cdots \alpha_{2(n-1)}) \tag{5}$$

erhalten und man habe über die $2n$ Konstanten $t', t'', \alpha_1, \cdot\cdot\, \alpha_{2\,(n-1)}$ so verfügt, dass die Kurve durch einen gegebenen Anfangs- und Endpunkt geht. Dann fragt es sich, unter welchen Bedingungen die so gefundene Kurve ein Extremum darbietet.

Man gehe von einem beliebigen, durch $t = t_0$ ausgezeichneten Punkt 0 der Kurve aus. In der Nähe des Kurvenpunktes $x_1 = \varphi_1(t), \cdots x_n = \varphi_n(t)$, aber ausserhalb der Kurve, werde ein Punkt $x_1 + \xi_1, \cdots x_n + \xi_n$ so gewählt, dass die Bedingungen (3) erfüllt sind. Dann lässt sich leicht zeigen, dass von 0 aus nach diesem Punkte eine den Differentialgleichungen genügende Kurve gezogen werden kann. Zu diesem Zwecke führen wir wieder folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial \varphi_\lambda(t)}{\partial t} = \overline{\varphi}_\lambda\,(t), \qquad \frac{\partial \varphi_\lambda(t)}{\partial \alpha_\mu} = \varphi_\lambda^{(\mu)}\,(t). \tag{6}$$

Bezeichnen wir dann durch $\tau_0, \tau, \alpha_1', \cdots \alpha_{2\,(n-1)}'$ der Nachbarkurve entsprechende Änderungen von $t_0, t, \alpha_1, \cdots \alpha_{2\,(n-1)}$, so müssen sich diese aus den Gleichungen bestimmen lassen:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_1(t_o)\,\tau_o + \varphi_1^{(1)}(t_o)\,\alpha_1' + \cdots + \varphi_1^{(2(n-1))}(t_o)\,\alpha_{2(n-1)}' + (\quad)_2 = 0,\\
&\vdots\\
&\bar{\varphi}_n(t_o)\,\tau_o + \varphi_n^{(1)}(t_o)\,\alpha_1' + \cdots + \varphi_n^{(2(n-1))}(t_o)\,\alpha_{2(n-1)}' + (\quad)_2 = 0,\\
&\bar{\varphi}_1(t)\,\tau + \varphi_1^{(1)}(t)\,\alpha_1' + \cdots + \varphi_1^{(2(n-1))}(t)\,\alpha_{2(n-1)}' + (\quad)_2 = \xi_1,\\
&\vdots\\
&\bar{\varphi}_n(t)\,\tau + \varphi_n^{(1)}(t)\,\alpha_1' + \cdots + \varphi_n^{(2(n-1))}(t)\,\alpha_{2(n-1)}' + (\quad)_2 = \xi_n.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Dazu ist aber erforderlich, dass die Determinante der linearen Glieder, nämlich

$$
\begin{vmatrix}
\bar{\varphi}_1(t_o), & 0, & \varphi_1^{(1)}(t_o), & \cdots\ \varphi_1^{(2(n-1))}(t_o)\\
\vdots & & & \\
\bar{\varphi}_n(t_o), & 0, & \varphi_n^{(1)}(t_o), & \cdots\ \varphi_n^{(2(n-1))}(t_o)\\
0, & \bar{\varphi}_1(t), & \varphi_1^{(1)}(t), & \cdots\ \varphi_1^{(2(n-1))}(t)\\
\vdots & & & \\
0, & \bar{\varphi}_n(t), & \varphi_n^{(1)}(t), & \cdots\ \varphi_n^{(2(n-1))}(t)
\end{vmatrix}
= D(t_o, t) \tag{8}
$$

von Null verschieden sei. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man, wie früher, die Kurve wieder in ein solches Gebiet einhüllen, dass nach jedem Punkte des Gebietes von 0 aus eine und nur eine den Differentialgleichungen genügende Kurve sich konstruieren lässt. Die Möglichkeit der Konstruktion dieses Gebietes hört mit der nächsten auf t_o folgenden Wurzel t_1 der Gleichung $D(t_o, t) = 0$ auf. Der dem Werte t_1 entsprechende Punkt 1 der Kurve ist als der zu 0 konjugierte zu bezeichnen; über ihn hinaus findet ein Extremum nicht statt.

Wir wählen jetzt wieder vor 1 einen Punkt 1′ (vergl. die für $n = 2$ geltende Figur I) und ziehen von einem beliebigen, zwischen 0 und 1′ gelegenen Punkte 2 eine ganz willkürliche Kurve 23. Der Punkt 3 werde so nahe bei 2 gewählt, dass die den Differentialgleichungen genügende Kurve 03 ganz innerhalb des oben bezeichneten Gebietes liegt und dass ausserdem die relativen Koordinaten von 3 gegen 2 den Gleichungen (3) genügen.

Bezeichnen wir nun die Richtungskosinus von 02 in 2 mit $p_1, \cdots p_n$, sodass also $p_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}}$ ist, wenn sich $\xi_1, \cdots \xi_n$ auf einen unmittelbar vor 2 gelegenen Punkt von 02 beziehen, bezeichnen wir ferner die Richtungskosinus von 32 in 2 mit $\bar{p}_1, \cdots \bar{p}_n$ und setzen endlich $\sigma = \sqrt{\bar{\xi}_1^2 + \cdots + \bar{\xi}_n^2}$, wo $\bar{\xi}_1, \cdots \bar{\xi}_n$ die relativen

Koordinaten von 3 gegen 2 bedeuten, so erhalten wir durch eine der früheren ganz ähnliche Rechnung für die Änderung, die das Integral J erleidet, wenn es über 03 und 32 statt über 02 erstreckt wird, den Ausdruck:

$$J_{03} + \bar{J}_{32} - J_{02} = E(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n, \bar{p}_1, \cdots \bar{p}_n)\,\sigma + \cdots \qquad (9)$$

Dabei wird die Funktion E definiert durch die Gleichung:

$$\begin{gathered} E(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n, \bar{p}_1, \cdots \bar{p}_n) \\ = \sum_i \{F^{(i)}(x_1, \cdots x_n, \bar{p}_1, \cdots \bar{p}_n) - F^{(i)}(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n)\}\,\bar{p}_i, \end{gathered} \qquad (10)$$

wo $F^{(1)}$, ähnlich wie in I. die Ableitung von F in Bezug auf x'_i bezeichnet. Als notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums ergiebt sich daher, dass längs der Kurve $0\,1'$ für jeden Punkt 2 und für jede Richtung $\bar{p}_1, \cdots \bar{p}_n$, die den Bedingungsgleichungen (3) genügen, die Funktion E ihr Zeichen nicht wechseln darf.

Wie bei zwei Variabeln lässt sich auch hier die Funktion E so umformen, dass man die üblichen Kriterien (wie sie z. B. Herr A. Mayer in der Abhandlung „Über die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale“ im 69. Bande des Crelle'schen Journals dargestellt hat) wiedererkennt.

Schreiben wir der Einfachheit halber $\varphi(x, p, q, \cdots)$ statt $\varphi(x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n, q_1, \cdots q_n, \cdots)$ und benutzen die bekannte Gleichung

$$f(p^{(1)}) - f(p^{(0)}) = \int_0^1 \sum_i f^{(i)}[p^{(0)} + \varepsilon(p^{(1)} - p^{(0)})]\,(p_i^{(1)} - p_i^{(0)})\,d\varepsilon,$$

so ergiebt sich, wenn zur Abkürzung $p_i^{(\varepsilon)} = p_i + \varepsilon(\bar{p}_i - p_i)$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$F^{(i)}(x, \bar{p}) - F^{(i)}(x, p) = \int_0^1 \sum_\varkappa F^{(i\varkappa)}(x, p^{(\varepsilon)})\,(\bar{p}_\varkappa - p_\varkappa)\,d\varepsilon. \qquad (11)$$

Multiplizieren wir mit $\bar{p}_i$ und summieren, so kommt:

$$E(x, p, \bar{p}) = \int_0^1 \sum_{i,\varkappa} F^{(i\varkappa)}(x, p^{(\varepsilon)})\,(\bar{p}_\varkappa - p_\varkappa)\,\bar{p}_i\,d\varepsilon. \qquad (12)$$

Wegen der aus der Homogeneität von F entspringenden Gleichung

$$\sum_{i,\varkappa} F^{(i\varkappa)}(x, p^{(\varepsilon)})\, p_i^{(\varepsilon)} = 0$$

können wir aber Gleichung (12) in die Form bringen:

$$E(x, p, \bar{p}) = \int_0^1 \sum_{i,\varkappa} F^{(i\varkappa)}(x, p^{(\varepsilon)})\, (\bar{p}_i\, p_\varkappa^{(\varepsilon)} - \bar{p}_\varkappa\, p_i^{(\varepsilon)})\, \frac{\bar{p}_\varkappa - p_\varkappa}{p_\varkappa^{(\varepsilon)}}\, d\varepsilon. \quad (13)$$

Vertauschen wir noch i und $\varkappa$ und addieren, so folgt:

$$2\, E(x, p, \bar{p})$$
$$= \int_0^1 \sum_{i,\varkappa} F^{(i\varkappa)}(x, p^{(\varepsilon)})\, (\bar{p}_i\, p_\varkappa^{(\varepsilon)} - \bar{p}_\varkappa\, p_i^{(\varepsilon)}) \left(\frac{\bar{p}_\varkappa - p_\varkappa}{p_\varkappa^{(\varepsilon)}} - \frac{\bar{p}_i - p_i}{p_i^{(\varepsilon)}}\right) d\varepsilon, \quad (14)$$

woraus sich schliesslich ergiebt:

$$2\, E(x, p, \bar{p}) = \int_0^1 \sum_{i,\varkappa} \frac{F^{(i\varkappa)}(x, p^{(\varepsilon)})}{p_i^{(\varepsilon)}\, p_\varkappa^{(\varepsilon)}}\, (p_i\, \bar{p}_\varkappa - p_\varkappa\, \bar{p}_i)^2 (1 - \varepsilon)\, d\varepsilon. \quad (15)$$

Setzt man noch nach Analogie von F_1:

$$F^{(i\varkappa)}(x, p^{(\varepsilon)}) = p_i^{(\varepsilon)}\, p_\varkappa^{(\varepsilon)}\, F_{i\varkappa}(x, p^{(\varepsilon)}), \quad (16)$$

so erkennt man als notwendige Bedingung für ein Extremum, dass

$$-\sum_{i,\varkappa} F_{i\varkappa}(x, p^{(\varepsilon)})\, (p_i\, \bar{p}_\varkappa - p_\varkappa\, \bar{p}_i)^2$$

sein Zeichen nicht wechseln darf.

Die oben genauer bezeichnete notwendige Bedingung, dass die Funktion E ihr Zeichen nicht wechseln darf, ist für die Existenz eines Extremums auch hinreichend — natürlich immer unter der Voraussetzung, dass das Integral sich nicht über den zu dem Anfangspunkte konjugierten Punkt hinaus erstreckt. Der Beweis hiefür ist der gleiche wie bei zwei Variabeln. Auch hier ergiebt sich, dass die Funktion $-E(x, p, \bar{p})$ gleich der Ableitung von $J_{03} + \bar{J}_{31'} = S(u)$ nach der Bogenlänge u der willkürlichen Kurve $0'\,3\,1'$ (s. Fig. II) ist, in die wir, unter Berücksichtigung der Gleichungen (3), die gefundene Kurve variieren können.

Im Falle E beständig positiv ist, findet daher ein Minimum, im andern Falle ein Maximum statt.

III.

Unter dem Probleme der geodätischen Linien des n-dimensionalen Rotationsellipsoides ist die folgende Aufgabe zu verstehen:

Es sollen die n Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$, die mit einander durch die Gleichung

$$f = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{a^2} + \frac{x_n^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{1}$$

verbunden sind, so als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t bestimmt werden, dass das Integral

$$J = \int_{t'}^{t''} \sqrt{x_1'^2 + \cdots + x_n'^2}\, dt \tag{2}$$

ein Minimum werde.

Zu diesem Zwecke ermittele man zunächst $x_1, \cdots x_n$ und den Multiplikator λ aus den $n+1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{x_1'}{\sqrt{x_1'^2 + \cdots + x_n'^2}} = \lambda \frac{x_1}{a^2}, \cdots \frac{d}{dt} \frac{x_{n-1}'}{\sqrt{x_1'^2 + \cdots + x_n'^2}} = \lambda \frac{x_{n-1}}{a^2} \\ &\frac{d}{dt} \frac{x_n'}{\sqrt{x_1'^2 + \cdots + x_n'^2}} = \lambda \frac{x_n}{b^2}, \qquad f = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Dann ist zu untersuchen, ob längs der gefundenen Kurve die Funktion E für alle Punkte zwischen t' und t'' und für alle Richtungen $\bar{p}_1, \cdots \bar{p}_n$, die der Gleichung $\frac{x_1 \bar{p}_1 + \cdots + x_{n-1} \bar{p}_{n-1}}{a^2} + \frac{x_n \bar{p}_n}{b^2} = 0$ genügen, stets dasselbe Zeichen besitzt. Diese Untersuchung lässt sich hier sofort erledigen. Es ist nämlich

$$E(x, p, \bar{p}) = \sum_i \left(\frac{\bar{p}_i}{\sqrt{\bar{p}_1^2 + \cdots + \bar{p}_n^2}} - \frac{p_i}{\sqrt{p_1^2 + \cdots + p_n^2}} \right) \bar{p}_i. \tag{4}$$

Da aber $\sum_i \bar{p}_i^2 = \sum_i p_i^2 = 1$ ist, so folgt:

$$E(x, p, \bar{p}) = 1 - \sum_i \bar{p}_i p_i. \tag{5}$$

Nun kann $\Sigma \bar{p}_i p_i$ niemals grösser als 1 sein; es ist also E für alle Richtungen $\bar{p}_1, \cdots \bar{p}_n$ positiv. Folglich ist das Integral J sicherlich ein Minimum, wenn nur der zu t' konjugierte Punkt jenseits t'' liegt.

Zur Ermittlung von $x_1, \cdots x_n$ führen wir als unabhängige Veränderliche t den Bogen s der geodätischen Linie ein, wodurch die Gleichungen (3) übergehen in:

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} = \lambda \frac{x_1}{a^2}, \;\cdot\cdot\; \frac{d^2 x_{n-1}}{ds^2} = \lambda \frac{x_{n-1}}{a^2}, \; \frac{d^2 x_n}{ds^2} = \lambda \frac{x_n}{b^2}, \qquad f = 0. \tag{6}$$

Aus den ersten $n-1$ Gleichungen von (6) erhält man:

$$x_\alpha \frac{d^2 x_\beta}{ds^2} - x_\beta \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = 0, \tag{7}$$

folglich:

$$x_\alpha \frac{d x_\beta}{ds} - x_\beta \frac{d x_\alpha}{ds} = c_{\alpha\beta}. \tag{8}$$

Solcher Gleichungen existieren $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, doch sind die Integrationskonstanten $c_{\alpha\beta}$ nicht alle von einander unabhängig.

Mit Hülfe von $f = 0$ kann man nun aus

$$(x_1^2 + \cdot\cdot + x_{n-1}^2)(dx_1^2 + \cdot\cdot + dx_{n-1}^2)$$
$$= (x_1\, dx_1 + \cdot\cdot + x_{n-1}\, dx_{n-1})^2 + \sum_{\alpha\beta} (x_\alpha\, dx_\beta - x_\beta\, dx_\alpha)^2$$

die Gleichung ableiten

$$a^2 \left(1 - \frac{x_n^2}{b^2}\right)(ds^2 - dx_n^2) = \frac{a^4}{b^4} x_n^2\, dx_n^2 + \varkappa^2\, ds^2, \tag{9}$$

insofern man zur Abkürzung $\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^2 = \varkappa^2$ setzt. Daraus aber ergiebt sich der Zusammenhang zwischen x_n und s in der Form:

$$\left(\frac{dx_n}{ds}\right)^2 = \frac{1 - \frac{\varkappa^2}{a^2} - \frac{x_n^2}{b^2}}{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^4} x_n^2}. \tag{10}$$

Hat man aus dieser Differentialgleichung x_n als Funktion von s ermittelt, so kann man leicht auch den Multiplikator λ als Funktion von s darstellen. Aus (6) findet man nämlich

$$x_1 \frac{d^2 x_1}{ds^2} + \cdots + x_n \frac{d^2 x_n}{ds^2} = \lambda, \quad \text{oder}$$

$$\frac{d}{ds}\left(x_1 \frac{dx_1}{ds} + \cdots + x_n \frac{dx_n}{ds}\right) = \lambda + 1,$$

woraus man mit Hülfe von $f = 0$ und $\frac{d^2 x_n}{ds^2} = \lambda \frac{x_n}{b^2}$ erhält:

$$1+\lambda=\frac{d}{ds}\left[\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)x_n\frac{dx_n}{ds}\right]=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\left[\lambda\frac{x_n^2}{b^2}+\left(\frac{dx_n}{ds}\right)^2\right].$$

Mit Benutzung von (10) kann man aber jetzt λ durch x_n allein ausdrücken, nämlich:

$$\lambda=\frac{\frac{a^2-b^2}{b^2}\,\frac{\nu^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}}{\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^4}\,x_n^2\right)^2}. \tag{11}$$

Dasselbe Resultat hätte man auch direkt erhalten durch Differentiation von (10) nach s.

Durch (11) und (10) wird also jetzt auch λ als Funktion von s definiert. Schreiben wir $\lambda=\lambda(s)$, so hat man noch $x_1,\cdots x_{n-1}$ aus den $n-1$ Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x_1}{ds^2}=\lambda(s)\frac{x_1}{a^2},\ldots\frac{d^2x_{n-1}}{ds^2}=\lambda(s)\frac{x_{n-1}}{a^2} \tag{12}$$

zu ermitteln. Die Grössen $x_1,\cdots x_{n-1}$ genügen also alle derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Daraus folgt aber, dass je $n-3$ dieser Grössen $x_1,\cdots x_{n-1}$ linear durch die beiden übrigen ausdrückbar sind. Zu diesem Resultate gelangt man auch ganz direkt. Aus den Gleichungen (8) ergiebt sich nämlich

$$x_\alpha\frac{dx_\beta}{ds}-x_\beta\frac{dx_\alpha}{ds}=c_{\alpha\beta},$$
$$x_\beta\frac{dx_\gamma}{ds}-x_\gamma\frac{dx_\beta}{ds}=c_{\beta\gamma},$$
$$x_\gamma\frac{dx_\alpha}{ds}-x_\alpha\frac{dx_\gamma}{ds}=c_{\gamma\alpha},$$

woraus man erhält:

$$c_{\beta\gamma}\,x_\alpha+c_{\gamma\alpha}\,x_\beta+c_{\alpha\beta}\,x_\gamma=0. \tag{13}$$

Zur vollständigen Durchführung der ganzen Aufgabe wäre jetzt zunächst die Integration der Differentialgleichung (10) erforderlich. Da man aber zu genau derselben Differentialgleichung auch bei der Bestimmung der geodätischen Linien des gewöhnlichen Rotationsellipsoides gelangt, so liegt, mit Rücksicht auf die durch (13) dargestellten linearen Beziehungen zwischen $x_1,\cdots x_{n-1}$, die Vermutung nahe, dass das n-dimensionale Problem sich auf das 3-dimensionale werde zurückführen lassen. Dies lässt sich nun in der That leicht bewerkstelligen. Da von den $n-1$ Grössen $x_1, \cdots x_{n-1}$ je $n-3$ durch die zwei andern linear ausgedrückt werden können, so setzen wir, um die Symmetrie zu wahren,

$$x_\lambda = \alpha_\lambda x + \beta_\lambda y \quad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1). \quad (14)$$

Die Konstanten $c_{\lambda\mu}$ sind dann, wie aus

$$c_{\mu\nu} x_\lambda + c_{\nu\lambda} x_\mu + c_{\lambda\mu} x_\nu = 0$$

folgt, mit den α_λ und β_λ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{\mu\nu} \alpha_\lambda + c_{\nu\lambda} \alpha_\mu + c_{\lambda\mu} \alpha_\nu &= 0, \\ c_{\mu\nu} \beta_\lambda + c_{\nu\lambda} \beta_\mu + c_{\lambda\mu} \beta_\nu &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

verbunden und vermöge dieser durch die α_λ und β_λ ausdrückbar. Da von den $2(n-1)$ neu eingeführten Konstanten α_λ, β_λ nur $2(n-3)$ als willkürliche Integrationskonstanten zu zählen sind, so können wir ihnen noch Beschränkungen auferlegen und verlangen, dass

$$\sum_\lambda{}' \alpha_\lambda^2 = 1, \qquad \sum_\lambda \alpha_\lambda \beta_\lambda = 0, \qquad \sum_\lambda \beta_\lambda^2 = 1 \quad (16)$$

sein soll. Setzen wir dann noch, der bessern Übereinstimmung halber, $x_n = z$, so geht die Aufgabe, die n Grössen $x_1, \cdots x_n$, die der Bedingung $\frac{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{a^2} + \frac{x_n^2}{b^2} - 1 = 0$ unterworfen sind, so als Funktionen von t zu bestimmen, dass das Integral $\int\limits_{t'}^{t''} \sqrt{x_1'^2 + \cdots + x_n'^2}\, dt$ ein Minimum werde, in die folgende Aufgabe über:

Es sollen die 3 Grössen x, y, z, zwischen denen die Gleichung $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ besteht, so als Funktionen von t bestimmt werden, dass das Integral $\int\limits_{t'}^{t''} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$ ein Minimum werde.

Damit ist aber unser Problem auf das 3-dimensionale zurückgeführt.