Zur Theorie der tripelorthogonalen Flächensysteme.

Von

C. F. Geiser.

Vortrag, gehalten in der Sektion für Mathematik, Astronomie und Physik der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, Bern, den 2. August 1898.

Um ein tripelorthogonales Flächensystem:

$$u(x_1, x_2, x_3) = \varrho,\ v(x_1, x_2, x_3) = \sigma,\ w(x_1, x_2, x_3) = \tau \qquad (1)$$

herzustellen, in welchem x_1, x_2, x_3 die kartesischen Koordinaten im Raume, ϱ, σ, τ die Parameter der drei Flächenscharen bedeuten, darf man die erste Flächenschar nicht willkürlich wählen, sondern es muss die Funktion u einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung Genüge leisten. Der Weg, auf welchem diese Differentialgleichung in rein analytischer Weise abgeleitet werden kann, ist durch Schläfli[1]) vorgezeichnet worden; Cayley[2]) giebt unter Beiziehung geometrischer Methoden eine explicite Gestalt derselben. Man gelangt aber zu einer einfacheren Ableitung und zu einer anschaulicheren geometrischen Interpretation der Cayley'schen Resultate, wenn man sie in Beziehung setzt zu der eleganten Form, welche Hesse[3]) dem Beweise des Dupin'schen Theorems gegeben hat.

I.

Die partiellen Differentialquotienten der durch die Gleichungen

$$u(x_1, x_2, x_3,) = \varrho,\ v(x_1, x_2, x_3) = \sigma,\ w(x_1, x_2, x_3) = \tau \qquad (1)$$

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 76, pag. 126.

[2]) Salmon, Analytic Geometry of three Dimensions. 3[d] edit., pag. 281.

[3]) Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. 1. Aufl., pag. 362.

eingeführten Funktionen u, v, w nach x_1, x_2, x_3 sollen mit Indices bezeichnet werden, so dass

$$\frac{\partial u}{\partial x_\varkappa} = u_\varkappa, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda} = u_{\varkappa\lambda}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda \partial x_\mu} = u_{\varkappa\lambda\mu} \text{ etc.}$$

Die Bedingung dafür, dass die Gleichungen (1) ein tripelorthogonales Flächensystem liefern, besteht dann darin, dass die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0, \\ w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_3 u_3 &= 0, \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

identisch erfüllt seien. Indem man jede derselben nach x_1, x_2, x_3 differenziert, erhält man (für $\varkappa = 1, 2, 3$):

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma v_{1\varkappa} w_\varkappa + \Sigma w_{1\varkappa} v_\varkappa = 0, \qquad \Sigma w_{1\varkappa} u_\varkappa + \Sigma u_{1\varkappa} w_\varkappa = 0, \\ &\Sigma v_{2\varkappa} w_\varkappa + \Sigma w_{2\varkappa} v_\varkappa = 0, \qquad \Sigma w_{2\varkappa} u_\varkappa + \Sigma u_{2\varkappa} w_\varkappa = 0, \\ &\Sigma v_{3\varkappa} w_\varkappa + \Sigma w_{3\varkappa} v_\varkappa = 0, \qquad \Sigma w_{3\varkappa} u_\varkappa + \Sigma u_{3\varkappa} w_\varkappa = 0, \\ &\qquad\qquad \Sigma u_{1\varkappa} v_\varkappa + \Sigma v_{1\varkappa} u_\varkappa = 0, \\ &\qquad\qquad \Sigma u_{2\varkappa} v_\varkappa + \Sigma v_{2\varkappa} u_\varkappa = 0, \\ &\qquad\qquad \Sigma u_{3\varkappa} v_\varkappa + \Sigma v_{3\varkappa} u_\varkappa = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Diese neun Gleichungen bilden drei Gruppen. Die drei Gleichungen der ersten Gruppe (in den v, w) werden mit u_1, u_2, u_3 multipliziert und addiert; für die zweite Gruppe verwendet man die Multiplikatoren v_1, v_2, v_3; für die dritte w_1, w_2, w_3. Es entstehen so die Gleichungen:

$$V + W = 0, \quad W + U = 0, \quad U + V = 0, \qquad (4)$$

wo $\quad U = \Sigma u_{\varkappa\lambda} v_\varkappa w_\lambda, \quad V = \Sigma v_{\varkappa\lambda} w_\varkappa u_\lambda, \quad W = \Sigma w_{\varkappa\lambda} u_\varkappa v_\lambda. \qquad (5)$

Aus den Gleichungen (4) folgen die neuen:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0. \qquad (6)$$

Es sind dies in Reproduktion der dort gegebenen Ableitung die Gleichungen (8) der citierten Hesse'schen Vorlesung.

II.

Die Gleichung

$$\begin{aligned} U = {} & u_{11} v_1 w_1 + u_{12} v_1 w_2 + u_{13} v_1 w_3 \\ & + u_{21} v_2 w_1 + u_{22} v_2 w_2 + u_{23} v_2 w_3 \\ & + u_{31} v_3 w_1 + u_{32} v_3 w_2 + u_{33} v_3 w_3 = 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

ist eine identische, die nach den in ihr enthaltenen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 differenziert werden darf. Es ist also

$$u_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0 \tag{2}$$

ebenfalls eine identische Gleichung. Aus dem ersten Gliede $u_1 v_1 w_1$ in (1) erhält man als Beitrag an die linke Seite von (2):

$$\begin{aligned} & u_1 \, (u_{111} v_1 w_1 + u_{11} v_{11} w_1 + u_{11} v_1 w_{11}) \\ + & u_2 \, (u_{112} v_1 w_1 + u_{11} v_{12} w_1 + u_{11} v_1 w_{12}) \\ + & u_3 \, (u_{113} v_1 w_1 + u_{11} v_{13} w_1 + u_{11} v_1 w_{13}), \end{aligned}$$

oder (wo wieder $\varkappa = 1, 2, 3$ ist)

$$v_1 w_1 \, \Sigma u_{11\varkappa} u_\varkappa + u_{11} w_1 \, \Sigma v_{1\varkappa} u_\varkappa + u_{11} v_1 \, \Sigma w_{1\varkappa} u_\varkappa .$$

Hier benutzt man aus I, 3 je die erste Gleichung der zweiten und der dritten Gruppe und erhält:

$$v_1 w_1 \, \Sigma u_{11\varkappa} u_\varkappa - u_{11} w_1 \, \Sigma u_{1\varkappa} v_\varkappa - u_{11} v_1 \, \Sigma u_{1\varkappa} w_\varkappa .$$

Werden alle Glieder von U in gleicher Art behandelt, so nimmt (2) die Form an:

$$\begin{gathered} \Sigma u_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa v_\lambda w_\mu \\ -2 \left\{ \Sigma u_{1\varkappa} v_\varkappa \cdot \Sigma u_{1\varkappa} w_\varkappa + \Sigma u_{2\varkappa} v_\varkappa \cdot \Sigma u_{2\varkappa} w_\varkappa + \Sigma u_{3\varkappa} v_\varkappa \cdot \Sigma u_{3\varkappa} w_\varkappa \right\} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Es ist dies die Gleichung, welche Schläfli (l. c. pag. 127) in der Form giebt:

$$DD'D''f - 2 \, \Sigma D'f_x \cdot D''f_x = 0.$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (1) und (3) sowie aus den Gleichungen I, 2 (also aus einem System von fünf Gleichungen) die Verhältnisse $v_1 : v_2 : v_3$ und $w_1 : w_2 : w_3$, so ergiebt sich eine Gleichung, welche nur noch von der Funktion u abhängt; es ist die gesuchte partielle Differentialgleichung dritten Grades.

III.

Man betrachte jetzt x_1, x_2, x_3 als homogene Dreiseitskoordinaten in einer Ebene; in diesem Koordinatensysteme seien u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3; w_1, w_2, w_3 die Koordinaten dreier Punkte P, Q, R. Die Gleichungen I, 2 sagen dann aus, dass P, Q, R in Bezug auf den Kegelschnitt

$$2\,\mathfrak{K} = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 0 \tag{1}$$

ein Tripel harmonischer Punkte seien[1]).

Führt man den Kegelschnitt

$$2\,K = \Sigma\, u_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda = 0 \tag{2}$$

ein, so zeigt die Gleichung $U = 0$ (II, 1), dass die Punkte Q und R in Bezug auf K konjugierte harmonische Pole sind.

Zur geometrischen Interpretation von II, 3 behandle man die beiden Teile, aus denen ihre linke Seite besteht, gesondert. Rücksichtlich des ersten dient die Kurve dritten Grades

$$3\,\mathfrak{C} = \Sigma\, u_{\varkappa\lambda\mu}\, x_\varkappa\, x_\lambda\, x_\mu = 0. \tag{3}$$

In Bezug auf dieselbe erzeugt der Punkt P eine erste Polare

$$2\,\Pi = u_1 \frac{\partial\,\mathfrak{C}}{\partial\,x_1} + u_2 \frac{\partial\,\mathfrak{C}}{\partial\,x_2} + u_3 \frac{\partial\,\mathfrak{C}}{\partial\,x_3} = \Sigma\,\Pi_{\varkappa\lambda}\, x_\varkappa\, x_\lambda = 0. \tag{4}$$

Die Bedingung dafür, dass Q und R konjugierte harmonische Pole in Bezug auf den Polarkegelschnitt Π seien, wird dann ausgedrückt durch:

$$\Sigma\, u_{\varkappa\lambda\mu}\, u_\varkappa\, v_\lambda\, w_\mu = 0.$$

Rücksichtlich des zweiten Teils von II, 3 bilde man aus

$$\begin{aligned} K_1 &= u_{11}\, x_1 + u_{12}\, x_2 + u_{13}\, x_3,\\ K_2 &= u_{21}\, x_1 + u_{22}\, x_2 + u_{23}\, x_3,\\ K_3 &= u_{31}\, x_1 + u_{32}\, x_2 + u_{33}\, x_3 \end{aligned}$$

die Gleichung eines neuen Kegelschnittes

$$2\,S = K_1{}^2 + K_2{}^2 + K_3{}^2 = 0. \tag{5}$$

Der Punkt Q erzeugt nach demselben die Polare

$$v_1 \frac{\partial\,S}{\partial\,x_1} + v_2 \frac{\partial\,S}{\partial\,x_2} + v_3 \frac{\partial\,S}{\partial\,x_3} = 0 \quad \text{oder}$$

$$K_1\ \Sigma u_{1\varkappa}\, v_\varkappa + K_2\ \Sigma\, u_{2\varkappa}\, v_\varkappa + K_3\ \Sigma\, u_{3\varkappa}\, v_\varkappa = 0.$$

Die Gleichung

$$\Sigma\, u_{1\varkappa}\, v_\varkappa \cdot \Sigma\, u_{1\varkappa}\, w_\varkappa + \Sigma\, u_{2\varkappa}\, v_\varkappa \cdot \Sigma\, u_{2\varkappa}\, w_\varkappa + \Sigma u_{3\varkappa}\, v_\varkappa \cdot \Sigma\, u_{3\varkappa}\, w_\varkappa = 0$$

---

[1]) Wählt man als Dreieckskoordinatensystem dasjenige, welches die ursprünglichen kartesischen Koordinaten aus der ∞ fernen Ebene ausschneiden, so ist $\mathfrak{K}$ der ∞ ferne imaginäre Kreis.

ist die Bedingungsgleichung dafür, dass Q und R konjugiert harmonisch in Bezug auf S seien. Durch Kombination der beiden Resultate ergiebt sich demnach als geometrische Bedeutung der Gleichung II, 3, dass die Punkte Q und R in Bezug auf den Kegelschnitt

$$T = \Pi - 2S = 0 \tag{6}$$

ein Paar konjugierter harmonischer Pole bilden.

IV.

Das Punktenpaar QR ist konjugiert harmonisch in Rücksicht auf jeden der drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, K, T. Sein Träger (die Polare von P nach $\mathfrak{K}$)

$$G = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{1}$$

schneidet also die genannten Kegelschnitte in drei Punktenpaaren einer Involution, deren Doppelpunkte Q und R sind. Es seien nun

$$A = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda = 0,\ B = \Sigma b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda = 0,\ C = \Sigma c_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda \tag{2}$$

drei beliebige Kegelschnitte, die von G in Punktenpaaren einer Involution geschnitten werden. Sei Γ diejenige Kurve dritten Grades, für welche A, B, C erste Polaren sind, Γ' ihre Cayley'sche Kurve, so ist G eine Tangente von Γ'. Unter den ersten Polaren von Γ befindet sich ein Linienpaar, von welchem G ein Bestandteil ist. Führt man also ein lineares Polynom

$$-G' = \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3$$

ein, so müssen sich $\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha', \beta', \gamma'$ derart bestimmen lassen, dass

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = G G' \tag{3}$$

zu einer identischen Gleichung wird. Setzt man die Koeffizienten korrespondierender Glieder in (3) einander gleich und eliminiert $\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha', \beta', \gamma'$, so ergiebt sich die Gleichung, welche bei Cayley (l. c. pag. 274) aus der nämlichen geometrischen Quelle abgeleitet erscheint:

$$\vartheta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & 2a_{23} & 2a_{31} & 2a_{12} \\ b_{11} & b_{22} & b_{33} & 2b_{23} & 2b_{31} & 2b_{12} \\ c_{11} & c_{22} & c_{33} & 2c_{23} & 2c_{31} & 2c_{12} \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Werden hier die Koeffizienten der Kegelschnittpolynome A, B, C durch diejenigen von T, K, $\mathfrak{K}$ ersetzt, so ergiebt sich die partielle Differenzialgleichung für die Funktion u, ausgedrückt durch das Verschwinden einer Determinante sechsten Grades, welche mit ϑ' bezeichnet werden soll.

V.

In der Determinante ϑ' kommen die Koeffizienten von T, welche die Stelle der $a_{\varkappa\lambda}$ in ϑ vertreten, nur in der ersten Horizontalreihe vor. Nach III, 6 ist

$$T = \Pi - 2\,S$$

und hier kann S folgendermassen umgeformt werden: Man bezeichne mit $\mathfrak{A}_{\varkappa\lambda}$ die Unterdeterminanten von

$$\varDelta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

Der Kegelschnitt

$$2\,\mathfrak{A} = \Sigma\,\mathfrak{A}_{\varkappa\lambda}\,x_\varkappa\,x_\lambda = 0 \tag{2}$$

ist dann die Polarfigur (der Polarkegelschnitt) von K in Bezug auf $\mathfrak{K}$. Man setze ferner

$$\left.\begin{aligned} u_{11} + u_{22} + u_{33} &= \delta, \\ \mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{A}_{22} + \mathfrak{A}_{33} &= \varDelta, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} 2\,S &= \delta\,K - \varDelta\,\mathfrak{K} + 2\,\mathfrak{A}, \\ T &= \Pi - \delta\,K + \varDelta\,\mathfrak{K} - 2\,\mathfrak{A}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Führt man diesen Wert von T zur Bildung von ϑ' ein, so zeigt sich, dass mit Hülfe der zweiten und dritten Horizontalreihe diejenigen Terme der ersten, welche von K und $\mathfrak{K}$ herrühren, entfernt werden können. Man darf also T durch

$$T' = \Pi - 2\,\mathfrak{A}$$

ersetzen. Werden die Unterdeterminanten von ϑ' nach den Elementen der ersten Horizontalreihe mit

$$H_{11},\ H_{22},\ H_{33},\ 2\,H_{23},\ 2\,H_{31},\ 2\,H_{12}$$

bezeichnet und werden die beiden von Π und $-2\mathfrak{A}$ herrührenden Teile getrennt, so kommt aus $\vartheta' = 0$ die neue Gleichung:

$$\Sigma H_{\varkappa\lambda} \Pi_{\varkappa\lambda} = 2 \Sigma H_{\varkappa\lambda} \mathfrak{A}_{\varkappa\lambda}. \tag{5}$$

Das ist im Wesentlichen das Schlussresultat der Cayley'schen Entwicklungen.

VI.

Die geometrische Deutung des nur von $\mathfrak{A}$ herrührenden Teils der Gleichung V, 5 zeigt, dass

$$J = \Sigma H_{\varkappa\lambda} \mathfrak{A}_{\varkappa\lambda} \tag{1}$$

verschwindet, wenn die Gerade G die Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, K, $\mathfrak{K}$ in drei Punktenpaaren einer Involution schneidet. Es sind demnach Q und R konjugierte Punkte in der Hessiana derjenigen Kurve dritten Grades, zu deren ersten Polaren $\mathfrak{A}$, K, $\mathfrak{K}$ gehören. Dem Kegelschnittnetz ($\mathfrak{A}$, K, $\mathfrak{K}$) gehört insbesondere das Büschel (K, $\mathfrak{K}$) an, also liegt das gemeinschaftliche Tripel PQR auf der Tripelkurve des Netzes (die mit der genannten Hessiana identisch ist). Analytisch wird diese Kurve durch das Verschwinden der Jacobi'schen Determinante gegeben:

$$\mathfrak{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial K}{\partial x_1} & \frac{\partial K}{\partial x_2} & \frac{\partial K}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

eine Gleichung, die nun erfüllt sein muss, wenn in ihr die laufenden Koordinaten x_1, x_2, x_3 durch die Koordinaten u_1, u_2, u_3 des Punktes P ersetzt werden. Wird dies in den Elementen von $\mathfrak{J}$ ausgeführt, nachdem deren Werte durch Differentiation gebildet sind, so kommt

$$J = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11}u_1 + \mathfrak{A}_{12}u_2 + \mathfrak{A}_{13}u_3 & \mathfrak{A}_{21}u_1 + \mathfrak{A}_{22}u_2 + \mathfrak{A}_{23}u_3 & \mathfrak{A}_{31}u_1 + \mathfrak{A}_{32}u_2 + \mathfrak{A}_{33}u_3 \\ u_{11}u_1 + u_{12}u_2 + u_{13}u_3 & u_{21}u_1 + u_{22}u_2 + u_{23}u_3 & u_{31}u_1 + u_{32}u_2 + u_{33}u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

Durch Entwicklung nach der ersten Horizontalreihe und Anordnung nach den $\mathfrak{A}_{\varkappa\lambda}$ erhält diese Gleichung die Form von (1) und liefert die $H_{\varkappa\lambda}$. Es ist für $\varkappa = 1, 2, 3$

$$\left.\begin{aligned} H_{11} &= u_1 \{ u_3 \Sigma u_{2\varkappa} u_\varkappa - u_2 \Sigma u_{3\varkappa} u_\varkappa \}, \\ 2 H_{23} &= u_3 \{ u_1 \Sigma u_{3\varkappa} u_\varkappa - u_3 \Sigma u_{1\varkappa} u_\varkappa \} \\ &\quad + u_2 \{ u_2 \Sigma u_{1\varkappa} u_\varkappa - u_1 \Sigma u_{2\varkappa} u_\varkappa \} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und analog die übrigen.

Die Gleichung $\mathfrak{J} = 0$ hat aber eine ganz einfache geometrische Bedeutung: Das gemeinschaftliche Tripel $P\,Q\,R$ von K und $\mathfrak{K}$ ist zugleich ein Tripel von $\mathfrak{A}$. Demnach haben alle Kegelschnitte des Netzes ($\mathfrak{A}$, K, $\mathfrak{K}$) dieses Tripel gemein und die Tripelkurve besteht aus den Verbindungsgeraden der Punkte des Tripels. J ist also eine ganze homogene Funktion dritten Grades der u_1, u_2, u_3, welche sich in drei Linearfaktoren auflösen lässt[1]).

VII.

Aus den gefundenen Werten der $H_{\varkappa\lambda}$ und den aus III sich ergebenden

$$\Pi_{\varkappa\lambda} = u_{1\varkappa\lambda} u_1 + u_{2\varkappa\lambda} u_2 + u_{3\varkappa\lambda} u_3 \tag{1}$$

kann man die linke Seite von V, 5 direkt bilden.

$$J' = \Sigma H_{\varkappa\lambda} \Pi_{\varkappa\lambda} \tag{2}$$

ergiebt sich aber auch, indem man in der Determinante dritten Grades, durch welche J in Gleichung VI, 3 dargestellt ist, die $\mathfrak{A}_{\varkappa\lambda}$ durch die $\Pi_{\varkappa\lambda}$ ersetzt, oder, was damit gleichbedeutend ist, indem man in der Determinante VI, 2 statt $\mathfrak{A}$ das Polynom Π einführt und nach vollzogenen Differentiationen an Stelle der x_1, x_2, x_3 überall die u_1, u_2, u_3 setzt. Man bekommt also statt

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_\varkappa} = \Pi_{\varkappa 1} x_1 + \Pi_{\varkappa 2} x_2 + \Pi_{\varkappa 3} x_3 \tag{3}$$

den neuen Ausdruck

$$\Pi_{\varkappa 1} u_1 + \Pi_{\varkappa 2} u_2 + \Pi_{\varkappa 3} u_3, \tag{4}$$

---

[1]) Werden u_1, u_2, u_3 als kartesische Koordinaten im Raume aufgefasst, so liefert die Gleichung $J = 0$ die drei Hauptebenen des Kegels zweiten Grades $\Sigma u_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda = 0$.

der aus $\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x_\varkappa}$ entsteht, wenn x_1, x_2, x_3 durch u_1, u_2, u_3 ersetzt werden. Durch die nämliche Substitution erhält man also auch J' aus

$$\mathfrak{J}' = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial K}{\partial x_1} & \frac{\partial K}{\partial x_2} & \frac{\partial K}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x_3} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$\mathfrak{J}' = 0$ ist die Jacobiana, gebildet aus der Kurve dritten Grades $\mathfrak{C}$ und den beiden Kegelschnitten K und $\mathfrak{K}$. Sie ist vom vierten Grade und besteht aus denjenigen Punkten $\mathfrak{P}$, für welche sich die beiden Polaren nach K und $\mathfrak{K}$ auf der zweiten Polaren nach $\mathfrak{C}$ schneiden[1]). Die Kurve geht durch die Ecken des gemeinschaftlichen Tripels von K und $\mathfrak{K}$ und sie enthält ausserdem die Punkte, in denen eine Seite des Tripels von der ersten Polaren der gegenüberliegenden Ecke rücksichtlich der Kurve $\mathfrak{C}$ geschnitten wird.

Man kann in $\mathfrak{J}'$ die Elemente der letzten Horizontalreihe durch $\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \frac{\partial G}{\partial x_3}$ ersetzen, ohne dass der Wert von $\mathfrak{J}'$ geändert wird. Die Gleichung

$$\mathfrak{J}_1' = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial K}{\partial x_1} & \frac{\partial K}{\partial x_2} & \frac{\partial K}{\partial x_3} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

stellt dann eine Kurve dritten Grades dar. Sie ist das Erzeugnis des zu den Punkten der Punktreihe G gehörigen Strahlbüschels von Polaren nach K und des dazu projektiven Kegelschnittbüschels erster Polaren dieser Punkte nach $\mathfrak{C}$. Die damit erreichte Vereinfachung ist aber nur eine scheinbare, weil jetzt die u_1, u_2, u_3 explicite in $\mathfrak{J}_1'$ auftreten.

---

[1]) Cremona, Introduzione ad una Teoria geometrica delle Curve piane (N^0 93, pag. 72).

Dass an J und J', wie sie im Vorhergehenden aus $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ bestimmt wurden, keine dem eigentlichen Probleme fremden Faktoren zu entfernen sind, um in

$$J' = 2\,J \tag{7}$$

die für u charakteristische partielle Differentialgleichung dritter Ordnung in der reduziertesten Form zu erhalten, erkennt man an der Durchführung eines speziellen Falles. Man kann als solchen den auch schon von Cayley-Salmon (l. c. pag. 279) behandelten wählen, wo

$$u = X_1 + X_2 + X_3 \tag{8}$$

und $X_\varkappa$ eine Funktion von $x_\varkappa$ allein ist. Man findet das von Bouquet zuerst abgeleitete Resultat wieder.

Ein anderer ausgezeichneter Spezialfall ist derjenige, in welchem

$$u\,(x_1\,, x_2\,, x_3) = \varrho$$

ein System von Kegeln mit gemeinschaftlicher Spitze repräsentiert. Wählt man dieselbe im Anfangspunkte der Koordinaten, so muss u eine homogene Funktion nullten Grades in x_1, x_2, x_3 sein; die partielle Differentialgleichung (7) ist unter dieser Bedingung identisch erfüllt.