Darstellung der Fresnel'schen Wellenfläche durch elliptische Funktionen.

Von

Heinrich Weber in Strassburg.

Während ich diese Zeilen schreibe, sind fünfundzwanzig Jahre verflossen, seit ich der Züricher Naturforschenden Gesellschaft als Mitglied beigetreten bin. Es gereicht mir zur Freude, hier der Gesellschaft für die mannigfache Anregung und Förderung, die ich bei ihr gefunden habe, meinen Dank auszusprechen, und gerne komme ich daher der ehrenvollen Aufforderung nach, zu dem Jubelbande der Schriften der Gesellschaft einen Beitrag zu liefern.

In meiner Abhandlung über die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch Theta-Funktionen zweier Variablen (Crelles Journal für Mathematik Bd. 84) habe ich gezeigt, wie man eine Darstellung der Fresnel'schen Wellenfläche durch elliptische Funktionen erhält, wenn man diese Fläche als speciellen Fall einer Kummer'schen Fläche auffasst, für den die hyperelliptischen Theta-Funktionen in zwei elliptische Theta-Funktionen zerfallen. Von dieser Darstellung hat Volterra bei einer physikalischen Untersuchung Gebrauch gemacht (Acta mathematica, Bd. 16, 1892, 93). Auch eine Arbeit von Humbert (American Journal, Bd. XIV 1894) beschäftigt sich mit diesem Gegenstand.

Die damals von mir gegebene Darstellung war noch insofern unvollständig, als dabei nicht klar der Unterschied zwischen den beiden Mänteln der Wellenfläche hervortrat, und überhaupt ein deutlicher Einblick in die geometrische Bedeutung der ganzen Darstellung fehlte. Ich habe daher nach einer selbständigen Ableitung dieser Darstellung gesucht, wobei sich eine eindeutige Darstellung eines jeden der beiden Mäntel der Wellenfläche durch elliptische Funktionen ergab.

so gelten nach der Bedeutung von p, q die in Bezug auf t identischen Gleichungen:

$$\Sigma \frac{\xi^2}{a-t} - 1 = \frac{t\,(t-p)\,(t-q)}{\varphi\,(t)}, \tag{8}$$

$$\Sigma \frac{\xi^2}{a\,(a-t)} = \frac{(t-p)\,(t-q)}{\varphi\,(t)}. \tag{9}$$

Mit Benutzung der Bezeichnung:

$$\varDelta = (c-b)\,(a-c)\,(b-a) \tag{10}$$

erhält man aus jeder der Gleichungen (8) oder (9), indem man $t = a, b, c$ setzt:

$$\begin{aligned} \varDelta\,\xi^2 &= a\,(b-c)\,(a-p)\,(a-q), \\ \varDelta\,\eta^2 &= b\,(c-a)\,(b-p)\,(b-q), \\ \varDelta\,\xi^2 &= c\,(a-b)\,(c-p)\,(c-q). \end{aligned} \tag{11}$$

Hieraus erhält man eine Reihe von Formeln, die wir weiterhin brauchen werden, und die, obschon sie hinlänglich bekannt sind, hier zusammen gestellt werden sollen.

Aus (11) erhält man zunächst:

$$\Sigma \frac{\xi^2}{(a-p)\,(a-q)} = 0, \tag{12}$$

$$\Sigma \frac{\xi^2}{a\,(a-p)\,(a-q)} = 0, \tag{13}$$

ferner, wenn man in (9) $t = 0$ setzt:

$$\Sigma \frac{\xi^2}{a^2} = \frac{p\,q}{a\,b\,c}, \tag{14}$$

und wenn man (8) und (9) in Bezug auf t differentiiert und dann $t = p$ und $t = q$ setzt:

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{\xi^2}{(a-p)^2} &= \frac{p\,(p-q)}{\varphi\,(p)}, \\ \Sigma \frac{\xi^2}{(a-q)^2} &= \frac{-q\,(p-q)}{\varphi\,(q)}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{\xi^2}{a\,(a-p)^2} &= \frac{p-q}{\varphi\,(p)}, \\ \Sigma \frac{\xi^2}{a\,(a-q)^2} &= -\frac{p-q}{\varphi\,(q)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Endlich erhält man durch logarithmische Differentiation von (11):

$$-2\,d\,\xi = \frac{\xi}{a-p}\,d\,p + \frac{\xi}{a-q}\,d\,q,$$

Ich gehe von der bekannten geometrischen Konstruktion aus, nach der man die Punkte der Wellenfläche aus einem Ellipsoid erhält, wenn man in sämtlichen Zentralschnitten des Ellipsoids die Hauptachsen aufsucht und diese vom Mittelpunkt aus normal zu der Schnittebene nach beiden Seiten aufträgt. Die grössere der beiden Hauptachsen des Schnittes gibt den äusseren, die kleinere den inneren Mantel.

Die Gleichung des Ellipsoids, das wir das erzeugende Ellipsoid der Wellenfläche nennen wollen, mag, auf die Hauptachsen bezogen, so angenommen sein:

$$\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} = 1, \tag{1}$$

so dass $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ die Halbachsen sind, über deren Grössenfolge wir die Annahme machen wollen:

$$a > b > c. \tag{2}$$

Wir bedienen uns in der Folge des Summenzeichens Σ, um eine Summe aus drei Gliedern zu bezeichnen, die aus dem ersten, explizite hingeschriebenen durch cyklische Vertauschung der Buchstaben ξ, η, ζ; x, y, z; a, b, c entstehen, sodass die Gleichung des Ellipsoids auch so dargestellt werden kann:

$$\Sigma \frac{\xi^2}{a} = 1. \tag{3}$$

Um die Punkte des Ellipsoids durch elliptische Koordinaten darzustellen, bezeichnen wir mit p, q die beiden von Null verschiedenen Wurzeln der in Bezug auf λ kubischen Gleichung:

$$\Sigma \frac{\xi^2}{a-\lambda} = 1, \tag{4}$$

oder die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\Sigma \frac{\xi^2}{a\,(a-\lambda)} = 0, \tag{5}$$

so dass:

$$a > p > b > q > c \tag{6}$$

und $p =$ konst., $q =$ konst. die Gleichungen der beiden Schaaren der Krümmungslinien des Ellipsoids sind.

Setzen wir noch zur Abkürzung, indem wir mit t eine Variable bezeichnen,

$$\varphi(t) = (a-t)(b-t)(c-t), \tag{7}$$

und wenn man diese Gleichung und die beiden entsprechenden ins Quadrat erhebt und addiert, so findet sich für das Quadrat des Linienelementes auf dem Ellipsoid mit Benutzung von (12), (15):

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad d\sigma^2 &= d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 \\
&= dp^2 \frac{1}{4} \Sigma \frac{\xi^2}{(a-p)^2} + dq^2 \frac{1}{4} \Sigma \frac{\xi^2}{(a-q)^2} \\
&= (p-q) \frac{1}{4} \left\{ \frac{p\,dp^2}{\varphi(p)} - \frac{q\,dq^2}{\varphi(q)} \right\}.
\end{aligned}
$$

Wir bestimmen nun eine durch den Mittelpunkt des Ellipsoids (1) gehende Ebene E durch die Koordinaten ξ, η, ζ des Berührungspunktes einer zu E parallelen Tangentialebene an das Ellipsoid. und setzen demnach, wenn X, Y, Z die Koordinaten eines variablen Punktes dieser Ebene bedeuten, ihre Gleichung:

$$\frac{X\xi}{a} + \frac{Y\eta}{b} + \frac{Z\zeta}{c} = 0$$

Um die Hauptachsen der Schnittkurve dieser Ebene mit dem erzeugenden Ellipsoid zu finden, haben wir also das Maximum r_1^2 und das Minimum r_2^2 der Funktion

$$(18)\qquad \Sigma X^2 = r^2$$

unter den Bedingungen

$$(19)\qquad \Sigma \frac{X^2}{a} = 1, \quad \Sigma \frac{X\xi}{a} = 0$$

zu suchen, und dafür erhält man nach der Multiplikatoren-Methode die Gleichungen:

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
(a-\lambda)\, X &= \mu\,\xi, \\
(b-\lambda)\, Y &= \mu\,\eta, \\
(c-\lambda)\, Z &= \mu\,\zeta.
\end{aligned}
$$

Die fünf Gleichungen (19), (20) dienen zur Bestimmmung der fünf Unbekannten X, Y, Z, λ, μ.

Multipliziert man die Gleichungen (20) mit:

$$\frac{X}{a}, \quad \frac{Y}{b}, \quad \frac{Z}{c},$$

und addiert, so ergiebt sich aus (18) und (19):

(21) $$\lambda = r^2,$$

und wenn man die drei aus (20) folgenden Gleichungen:

(22) $$X = \frac{\mu \xi}{a - \lambda}, \quad Y = \frac{\mu \eta}{b - \lambda}, \quad Z = \frac{\mu \zeta}{c - \lambda}$$

mit

$$\frac{\xi}{a}, \quad \frac{\eta}{b}, \quad \frac{\zeta}{c}$$

multipliziert und addiert:

(23) $$\Sigma \frac{\xi^2}{a(a - \lambda)} = 0.$$

Diese Gleichung stimmt mit (5) überein, und daraus und aus (21) folgt:

(24) $$r_1^2 = p, \quad r_2^2 = q.$$

Die Richtungskosinus der Normalen der Ebene E stehen in dem Verhältnis:

$$\frac{\xi}{a} : \frac{\eta}{b} : \frac{\zeta}{c},$$

und diese Kosinus selbst sind daher nach (14):

$$\frac{\xi}{a}\sqrt{\frac{abc}{pq}}, \quad \frac{\eta}{b}\sqrt{\frac{abc}{pq}}, \quad \frac{\zeta}{c}\sqrt{\frac{abc}{pq}}.$$

Auf dieser Normalen tragen wir nun in einer der beiden Richtungen die Strecken:

(25) $$r_1 = \sqrt{p}, \quad r_2 = \sqrt{q}$$

auf und erhalten zwei Punkte, die dem äusseren und inneren Mantel der Wellenfläche angehören, deren Koordinaten so ausgedrückt werden können:

(26) $$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\xi}{ar_2}\sqrt{abc}, & x_2 &= \frac{\xi}{ar_1}\sqrt{abc}, \\ y_1 &= \frac{\eta}{br_2}\sqrt{abc}, & y_2 &= \frac{\eta}{br_1}\sqrt{abc}, \\ z_1 &= \frac{\zeta}{cr_2}\sqrt{abc}, & z_2 &= \frac{\zeta}{cr_1}\sqrt{abc}, \end{aligned}$$

und wenn man den Punkt (ξ, η, ζ) das ganze erzeugende Ellipsoid durchlaufen lässt, so durchläuft $(x_1\, y_1, z_1)$ den äusseren, (x_2, y_2, z_2) den inneren Mantel der Wellenfläche.

Die beiden Mäntel hängen in den Knotenpunkten zusammen, in denen

$$r_1 = r_2 = \sqrt{b}$$

ist. Hier ist $p = q = b$, also nach (11):

$$\xi = \sqrt{\frac{a(a-b)}{a-c}}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \sqrt{\frac{c(b-c)}{a-c}},$$

und folglich:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = \sqrt{\frac{c(a-b)}{a-c}}, \\ y_1 &= y_2 = 0, \\ z_1 &= z_2 = \sqrt{\frac{a(b-c)}{a-c}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Aus (26) ergibt sich mit Hilfe von (3) und (14):

$$\Sigma x_1^2 = p, \quad \Sigma a\, x_1^2 = \frac{a\, b\, c}{q}, \tag{28}$$

$$\Sigma x_2^2 = q, \quad \Sigma a\, x_2^2 = \frac{a\, b\, c}{p}. \tag{29}$$

Auf dem äussern Mantel der Wellenfläche werden also die Kurven $p =$ konst. von einer Schar konzentrischer Kugeln ausgeschnitten, deren innerste $p = b$ die Fläche in zwei durch die Knotenpunkte gehenden Kreisbögen berührt.

Die Kurven $q =$ konst. werden von ähnlichen Ellipsoiden ausgeschnitten, deren äusserstes die Fläche in zwei Ellipsenbögen, die der Ellipse

$$a\, x^2 + c\, z^2 = a\, c$$

angehören, berührt.

Aehnliches gilt für den inneren Mantel, auf dem die Kurven $q =$ konst. sphärisch, die Kurven $p =$ konst. ellipsoidisch sind.

Um die Gleichung der Wellenfläche in rechtwinkligen Koordinaten abzuleiten, kann man in der Gleichung (5):

$$\Sigma \frac{\xi^2}{a(a-p)} = 0$$

aus (26) setzen:

$$\xi : \eta : \zeta = ax : by : cz$$

und aus (28):

$$p = x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2, \tag{30}$$

wodurch sich diese Gleichung in der Form ergibt:

$$\frac{ax^2}{a-\varrho^2} + \frac{by^2}{b-\varrho^2} + \frac{cz^2}{c-\varrho^2} = 0, \tag{31}$$

oder auch, indem man

$$\frac{a}{\varrho^2(a-\varrho^2)} = \frac{1}{a-\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}$$

setzt, mit x^2 multipliziert und die Summe Σ nimmt, mit Rücksicht auf (30) die gewöhnliche Form dieser Gleichung:

$$\frac{x^2}{a-\varrho^2} + \frac{y^2}{b-\varrho^2} + \frac{z^2}{c-\varrho^2} = 1. \tag{32}$$

Nach (11), (25), (26) lassen sich die Koordinaten der Punkte der Wellenfläche durch die beiden unabhängigen Veränderlichen p, q ausdrücken. Man erhält für den äusseren Mantel:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{(a-b)(b-c)}{bc}}\, x_1 &= \sqrt{a-p}\, \sqrt{\frac{a-q}{q}}, \\
\sqrt{\frac{(b-c)(a-c)}{ac}}\, y_1 &= \sqrt{p-b}\, \sqrt{\frac{b-q}{q}}, \\
\sqrt{\frac{(a-c)(b-c)}{ab}}\, z_1 &= \sqrt{p-c}\, \sqrt{\frac{q-c}{q}},
\end{aligned} \tag{33}$$

und für den inneren Mantel:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{(a-b)(a-c)}{bc}}\, x_2 &= \sqrt{\frac{a-p}{p}}\, \sqrt{a-q}, \\
\sqrt{\frac{(b-c)(a-c)}{ac}}\, y_2 &= \sqrt{\frac{p-b}{p}}\, \sqrt{b-q}, \\
\sqrt{\frac{(a-c)(b-c)}{ab}}\, z_2 &= \sqrt{\frac{p-c}{p}}\, \sqrt{q-c}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Wir haben die Quadratwurzeln so dargestellt, dass sie alle reell werden. Gibt man allen das positive Zeichen, so erhält man die Punkte des positiven Oktanten.

Durch logarithmische Differentiation der ersten Gleichung (33) folgt:

$$-2\,dx_1 = \frac{x_1\,dp}{a-p} + \frac{a\,x_1\,dq}{q\,(a-q)},$$

oder nach (26):

$$-\,dx_1 = \frac{\sqrt{abc}}{2\sqrt{q}}\left(\frac{\xi\,dp}{a\,(a-p)} + \frac{\xi\,dq}{q\,(a-q)}\right),$$

woraus nach (13) für das Quadrat des Linienelementes auf dem äusseren Mantel:

$$d\,s_1^2 = \frac{abc}{4q}\left\{dp^2\,\Sigma\,\frac{\xi^2}{a^2\,(a-p)^2} + \frac{dq^2}{q^2}\,\Sigma\,\frac{\xi^2}{(a-q)^2}\right\}$$

und endlich nach (17):

$$d\,s_1^2 = \frac{abc}{q^3}\left(d\,\sigma^2 - \frac{d\,p^2}{4}\,\Sigma\,\frac{\xi^2\,(a^2-q^2)}{a^2\,(a-p)^2}\right), \tag{35}$$

und ebenso für den inneren Mantel:

$$d\,s_2^2 = \frac{abc}{p^3}\left(d\,\sigma^2 - \frac{dq^2}{4}\,\Sigma\,\frac{\xi^2\,(a^2-p^2)}{a^2\,(a-q)^2}\right). \tag{36}$$

Hieraus ergibt sich, dass die Kurvenscharen $p =$ konst. $q =$ konst. auf beiden Mänteln orthogonale Scharen bilden. Die durch diese Kurvenscharen vermittelte Abbildung der Wellenfläche auf das Ellipsoid ist aber nicht in den kleinsten Teilen ähnlich.

Die Formeln (33), (34) sind nun geeignet, uns die Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 durch elliptische Funktionen darzustellen. Man braucht dazu Funktionen mit zwei verschiedenen Moduln, und bedient sich am besten der Jacobi'schen Bezeichnung.

Wir betrachten zunächst den äusseren Mantel, und wenden zwei verschiedene lineare Substitutionen an, die durch die Zusammengehörigkeit der Variablen x, y, wie sie die folgende Zusammenstellung zeigt, charakterisiert sind:

$$\text{I.}\qquad \begin{array}{llllll} x) & a, & b, & c, & \infty \\ y) & 0, & 1, & \frac{1}{\varkappa^2}, & \infty \end{array}$$

$$\text{II.}\qquad \begin{array}{llllll} x) & a, & b, & c, & 0 \\ y) & \frac{1}{\lambda^2}, & 1, & 0, & \infty, \end{array}$$

worin $\varkappa^2$, λ^2 die Moduln zweier elliptischer Integrale sind.

Die Tabelle I, II giebt dann folgende Transformation:

$$\text{I.}\qquad \frac{a-x}{a-b} = y, \qquad \varkappa^2 = \frac{a-b}{a-c},$$

$$\frac{x-b}{a-b} = 1-y, \quad \varkappa'^2 = \frac{b-c}{a-c},$$

$$\frac{x-c}{a-c} = 1 - \varkappa^2 y,$$

$$\int_a^x \frac{\sqrt{a-c}\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\varkappa^2 y)}} = 2u;$$

$$\text{II.}\qquad \frac{a-x}{a-c}\frac{c}{x} = 1 - \lambda^2 y, \quad \lambda^2 = \frac{(b-c)\,a}{(a-c)\,b} = \frac{\varkappa'^2 a}{b},$$

$$\frac{b-\lambda}{b-c}\frac{c}{x} = 1-y, \qquad \lambda'^2 = \frac{(a-b)\,c}{(a-c)\,b} = \frac{\varkappa^2 c}{b},$$

$$\frac{x-c}{b-c}\frac{b}{x} = y,$$

$$\int_c^x \frac{\sqrt{(a-c)\,b}\,dx}{\sqrt{x(a-x)(b-x)(x-c)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\lambda^2 y)}} = 2v.$$

Um dies auf die Darstellung des äusseren Mantels anzuwenden, hat man $x = p$ in I und $x = q$ in II zu setzen, und findet so nach (33):

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{b}\; sn(u, \varkappa)\, dn(v, \lambda), \\ y_1 &= \sqrt{a}\; k\, cn(u, \varkappa)\, cn(v, \lambda), \qquad (35) \\ z_1 &= \sqrt{a}\; dn(u, \varkappa)\, sn(v, \lambda). \end{aligned}$$

Man erhält hieraus alle Punkte des äusseren Mantels des Oktanten, und jeden nur einmal, wenn man u und v als unabhängige Variable die Intervalle 0 bis K und 0 bis L durchlaufen lässt, wenn K und L die vollständigen elliptischen Integrale

$$K = \frac{1}{2} \int_b^a \frac{\sqrt{a-c}\, dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}},$$

$$L = \frac{1}{2} \int_c^b \frac{\sqrt{(a-c)\,b}\, dx}{\sqrt{x\,(a-x)(b-x)(x-c)}}$$

bedeuten.

Die entsprechenden Ausdrücke für den inneren Mantel kann man auf dem gleichen Wege herleiten. Man kann aber auch die Formeln (35) auf den inneren Mantel anwenden, wenn man $x = q$ in I. und $x = p$ in II. setzt. Dies kommt darauf hinaus, dass man die Variablen u, v in (35), nicht die Intervalle 0, K und 0, L, sondern die Intervalle $K, K + i K'$ und $L, L + i L'$ durchlaufen lässt, (wenn K', L' wie gewöhnlich die vollständigen Integrale für die komplementären Moduln $\varkappa'$ und λ' bedeuten). Dann erhalten u, v imaginäre Werte und man kann die reellen Ausdrücke durch die bekannten Transformationsformeln der elliptischen Funktionen finden, wenn man u, v durch $K + i K' - i u$, $L + i L' - i v$ ersetzt, und dann u von 0 bis K', v von 0 bis L' gehen lässt. So ergeben sich mit Anwendung der bekannten Formeln:

$$sn\,(K + i K' - i u) = \frac{1}{\varkappa}\, dn\,(u, \varkappa'),$$

$$cn\,(K + i K' - i u) = \frac{i \varkappa'}{\varkappa}\, cn\,(u, \varkappa'),$$

$$dn\,(K + i K' - i u) = \varkappa'\; sn\,(u, \varkappa'),$$

für x_2, y_2, z_2 die Ausdrücke:

$$x_2 = \sqrt{c}\; dn\,(u, \varkappa')\, sn\,(v, \lambda'),$$

$$y_2 = \sqrt{c}\; \varkappa\; cn\,(u, \varkappa')\, cn\,(v, \lambda'),$$

$$z_2 = \sqrt{b}\; sn\,(u, \varkappa')\, dn\,(v, \lambda').$$

Freudenstadt im August 1895.