Das räumliche Sechseck und die Kummer'sche Fläche.

Von

Carl Friedrich Geiser.

Die zuerst von Kummer [1]) untersuchte Fläche vierten Grades mit sechszehn singulären Punkten und sechszehn singulären Tangentialebenen ist von Cayley [2]) und Borchardt [3]) in Zusammenhang mit der Lehre von den Thetafunktionen gebracht worden. Dies hat Herrn Heinrich Weber [4]) Veranlassung geboten, auch seinerseits diesen Zusammenhang zu erforschen und er hat dabei das Resultat gefunden, dass aus gewissen sechs Knotenpunkten die übrigen linear konstruiert werden können. Herr Reye [5]) und Schröter [6]) haben daraufhin diesen Satz zum Gegenstande rein geometrischer Untersuchungen gemacht.

Es sei mir gestattet, hier eine ebenfalls synthetische Betrachtung über den Zusammenhang eines Sechsecks im Raume mit der Kummer'schen Fläche vorzulegen. Dieselbe ist unmittelbar nachdem mir Herr Weber, noch vor dem Erscheinen seiner Abhandlung, auf brieflichem Wege deren Hauptresultate mitgeteilt hatte, durchgeführt und vollendet worden. [7]) Durch die citierten Arbeiten Herrn Reye's und Schröter's ist zwar ein Teil meiner Entwicklungen vorweg genommen; die nachträgliche Veröffentlichung bietet indessen vielleicht doch noch ein gewisses Interesse durch den Umstand, dass sie in einfachster Weise zu der anschaulichen Gruppierung führt, welche Herr Camille Jordan [8]) für die singulären Elemente der Fläche gegeben hat.

---

[1]) Berliner Monatsberichte vom 18. April 1864.
[2]) Crelle's Journal Band 83 Seite 210.
[3]) „ „ „ 83 „ 234.
[4]) „ „ „ 84 „ 332.
[5]) „ „ „ 86 „ 84.
[6]) „ „ „ 100 „ 231.
[7]) Das Nachfolgende ist ein wörtlicher Abdruck der Ausarbeitung, durch welche ich Herrn Weber von meinen Untersuchungen Kenntnis gab.
[8]) Crelle's Journal Band 70, Seite 182.

I.

Sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, die von einander unabhängig im Raume gelegen sind (von denen also namentlich keine vier der nämlichen Ebene angehören), bilden ein vollständiges räumliches Sechseck. Die fünfzehn Verbindungsgeraden der Ecken zu zweien, wie (1 2), (1 3) ..... (5 6) werden Kanten genannt; durch jede Ecke gehen fünf Kanten, auf jeder Kante liegen zwei Ecken. Das Sechseck enthält im Fernern zwanzig Seitenflächen als Verbindungsebenen je dreier Ecken, wie (1 2 3), (1 3 4), ... (4 5 6). Durch jede Ecke gehen zehn, durch jede Kante vier Seitenflächen. Zu jeder Seitenfläche gehört eine andere, ihr gegenüberliegende, so dass die beiden zusammen alle sechs Ecken enthalten; es gibt demnach zehn solcher Paare von Gegenebenen.

Die Schnittgeraden der Seitenflächen zerfallen in drei Abteilungen:

1. in solche, welche zwei Ecken enthalten; es sind dies die fünfzehn Kanten des Sechsecks.

2. in solche, die eine Ecke enthalten (wir nennen sie Halbkanten); ihre Anzahl ist neunzig, durch jede Ecke gehen fünfzehn, in jeder Seitenfläche liegen neun derselben. Greifen wir beispielsweise den Schnitt von (1 2 3) und (1 4 5) heraus, so soll derselbe mit 1 (2 3, 4 5) bezeichnet werden. Analog bilden wir die Bezeichnung der übrigen.

3. in solche, welche keine Ecke enthalten. Es sind dies die Schnitte der Gegenebenenpaare; sie sollen deshalb Gegenseiten heissen. Ihre Anzahl ist zehn.

Von den Schnittpunkten der Seitenflächen interessieren uns hauptsächlich diejenigen, durch welche drei und nur drei der Seitenflächen hindurchgehen. Diese Kategorie besteht ausschliesslich aus denjenigen Schnittpunkten der Halbkanten unter sich, welche nicht gleichzeitig Ecken des Sechsecks sind; wir werden sie als Nebenecken einführen. Ihre Anzahl ist hundert und zwanzig. Von ihnen liegen auf jeder Halbkante vier, in jeder Seitenfläche achtzehn; durch jede Nebenecke gehen drei Seitenflächen und drei Halbkanten. Als Beispiel der im Folgenden anzuwendenden Bezeichnung wählen wir $\binom{1\,2\,3}{4\,5\,6}$; es bedeutet diess den Schnittpunkt der drei Seitenflächen 2 3 4, 3 1 5, 1 2 6 oder der drei Halbkanten 1 (2 6, 3 5), 2 (3 4, 1 6), 3 (1 5, 2 4). Dadurch ergeben sich, den sechs Permutationen der obern drei Zahlen entsprechend, sechs verschiedene Schreibarten einer und derselben Nebenecke.

II.

Aus den zwanzig Seitenflächen lassen sich auf zwölf verschiedene Arten zehn absondern (aus jedem Paare von Gegenebenen des Sechsecks eine), so dass durch jede Ecke fünf, durch jede Kante zwei derselben gehen. Man gelangt in folgender Art zu diesen Gruppen: Indem man zunächst von der Ecke 1 absieht, wird man aus dem übrig bleibenden vollständigen Fünfeck 2 3 4 5 6 zwölf verschiedene einfache Fünfecke (oder was das nämliche bedeutet: einfache Fünfseite) absondern können, von denen je zwei zusammengehören, die keine Seite gemein haben. Die Seiten des einen sind die Diagonalen des andern. Die Ebenen, die von 1 aus nach den Seiten des einen Fünfecks gehen, zusammengenommen mit den Gegenebenen derjenigen, welche von 1 nach den Seiten des zugehörigen Fünfecks führen, bilden eines der verlangten Dekaeder. Diese Gegenebenen sind zugleich diejenigen Seitenflächen des vollständigen Sechsecks, welche von den Seiten des ersten Fünfecks zu den Gegenecken führen [1]), so dass ein einziges einfaches Fünfeck zur Herstellung des Dekaeders genügt.

Als Beispiel mögen die beiden zusammengehörigen Fünfecke 2 3, 3 4, 4 5, 5 6, 6 2 und 2 4, 4 6, 6 3, 3 5, 5 2 dienen. Das erste erzeugt das Dekaeder 1 2 3, 1 3 4, 1 4 5, 1 5 6, 1 6 2, 3 5 6, 2 3 5, 2 4 5, 2 4 6, 3 4 6, das andere ergibt ein gegenüberliegendes Dekaeder 1 2 4, 1 4 6, 1 6 3, 1 3 5, 1 5 2, 4 5 6, 2 5 6, 2 3 6, 2 3 4, 3 4 5.

Alle einfachen Fünfecke, welche das nämliche Dekaeder erzeugen, werden aus einem von ihnen wie folgt abgeleitet: Man lässt eine der fünf Ecken weg und fügt zu der gegenüberliegenden Seite die beiden von deren Endpunkten ausgehenden (nicht nach dieser Ecke gerichteten) Diagonalen, so wie die Geraden, welche die zweiten Endpunkte der genannten Diagonalen mit der sechsten Ecke des Sechsecks verbinden. Man erkennt auch, dass irgend eine der zwölf aus 1 hervorgehenden Gruppen sich gegen alle

---

[1]) In einem einfachen Fünfeck stossen an eine Seite zwei andere; die beiden übrigbleibenden schneiden sich in der Gegenecke der ersten Seite.

sechs Ecken vollkommen gleich verhält, so dass keine andern derartigen Kombinationen gebildet werden können.

Die zehn Ebenen eines Dekaeders schneiden sich ausser in den fünfzehn Kanten noch in dreissig Halbkanten, von denen je fünf durch eine der Ecken gehen. Von den Schnittpunkten der Dekaederebenen, welche nicht zugleich Ecken sind, liegen auf jeder Kante zwei, was zu dreissig Punkten Veranlassung gibt. Ausser diesen treten noch dreissig Nebenecken auf, sie sind so verteilt, dass in jeder Dekaederebene deren neun, auf jeder dem Dekaeder angehörigen Halbkante deren drei liegen.

III.

Aus den beschriebenen dreissig Nebenecken des Dekaeders scheiden wir eine Gruppe von zehn in folgender Weise ab: Eine Halbkante, die durch eine bestimmte Ecke geht und welche als Schnitt zweier Flächen des Dekaeders erscheint, sondert aus demjenigen einfachen Fünfeck der übrigen Ecken, das zur Erzeugung des Dekaeders benutzt werden muss, zwei nicht aufeinanderfolgende Seiten aus, zu deren Bildung vier Ecken nötig sind. Die fünfte Ecke und die ihr gegenüberliegende Seite bestimmen eine Seitenfläche, die auf der gewählten Halbkante eine Nebenecke aus der gesuchten Gruppe ergibt. Da durch dieses Verfahren auf jeder der dreissig zum Dekaeder gehörigen Halbkanten eine Nebenecke hervorgeht, die Nebenecke aber aus drei verschiedenen Halbkanten in durchaus gleicher Art gebildet werden kann, so besteht die Gruppe in der That nur aus zehn Punkten. (Es ist leicht einzusehen, dass in jeder Dekaederebene drei derselben liegen.)

Soll rückwärts aus einer gegebenen Nebenecke die Gruppe, welcher sie angehört, gefunden werden, so beachte man, dass die Nebenecke mit Ausschluss einer beliebigen Ecke des Sechsecks sofort ein unzweideutig das zugehörige Dekaeder erzeugendes einfaches Fünfeck bestimmt; d. h.: aus den zwölf Dekaedern gehen alle hundert und zwanzig Nebenecken und zwar jede nur einmal hervor.

Fügt man hinzu, dass die dem oben zuerst angegebenen, aus 23, 34, 45, 56, 62 hervorgehenden Dekaeder entsprechende Gruppe von den Punkten

$$\binom{1\,2\,3}{5\,4\,6}\ \binom{1\,3\,4}{6\,5\,2}\ \binom{1\,4\,5}{2\,6\,3}\ \binom{1\,5\,6}{3\,2\,4}\ \binom{1\,6\,2}{4\,3\,5}\ \binom{5\,2\,3}{1\,6\,4}\ \binom{6\,3\,4}{1\,2\,5}\ \binom{2\,4\,5}{1\,3\,6}\ \binom{3\,5\,6}{1\,4\,2}\ \binom{4\,6\,2}{1\,5\,3}$$

gebildet ist, so erkennt man sofort eine einfache Methode, um aus ihrem erzeugenden Fünfecke die Nebenecken jeder beliebigen Gruppe direkt hinzuschreiben.

In der Bezeichnung jeder der zehn Nebenecken einer Gruppe sind nämlich die drei obern Zahlen identisch mit denjenigen, die eine dem korrespondierenden Dekaeder angehörige Seitenfläche charakterisieren. Um die Bedeutung der jeweiligen drei untern Zahlen und deren Reihenfolge einzusehen, bemerke man, dass im erzeugenden Fünfeck des gegebenen Beispiels der Seite 2 3 die Ecke 5 und die Diagonale 6 4 gegenüberliegen und zwar die letztere als 6 4 gleichlaufend, als 4 6 ungleichlaufend; die Ecke 1 kommt im Fünfeck nicht vor. Damit ist die Bildung von $\binom{1\,2\,3}{5\,4\,6}$ und $\binom{5\,2\,3}{1\,6\,4}$ erklärt und zugleich dargethan, wie die übrigen acht Punkte der Gruppe entstehen.

IV.

Die zehn Nebenecken einer Gruppe geben mit den sechs Ecken des Sechsecks zusammengenommen ein aus sechszehn Punkten bestehendes System derart, dass sechszehn mal sechs der Punkte in einer Ebene und zwar jeweilen auf der Peripherie eines Kegelschnittes liegen.

Zur Veranschaulichung des Beweises bedienen wir uns des bereits benutzten aus 2 3, 3 4, 4 5, 5 6, 6 2 hervorgehenden Dekaeders und der zugehörigen Nebenecken. In der ersten Seitenfläche (1 2 3) liegen ausser den Ecken 1, 2, 3 noch die Nebenecken $\binom{1\,3\,4}{6\,5\,2}$, $\binom{1\,6\,2}{4\,3\,5}$, $\binom{5\,2\,3}{1\,6\,4}$. Nun bilden die Punkte 1, $\binom{1\,3\,4}{6\,5\,2}$, 3, $\binom{5\,2\,3}{1\,6\,4}$ 2, $\binom{1\,6\,2}{4\,3\,5}$ in der angeschriebenen Reihenfolge ein Pascal'sches Sechseck, dessen Pascallinie die Gegenseite ist, in welcher (1 2 3) und (4 5 6) sich schneiden. In analoger Weise wird in jeder andern Seitenfläche des Dekaeders ein System von sechs Punkten eines Kegelschnittes gefunden.

Um die noch fehlenden sechs Ebenen herzustellen, von denen jede ebenfalls sechs Punkte aus der Gruppe der sechzehn enthält, bemerke man, dass von den zehn Nebenecken der Gruppe fünf auf solchen Halbkanten gelegen sind, welche von der Ecke 1 aus-gehen [1]); die fünf übrigen $\binom{5\,2\,3}{1\,6\,4}$, $\binom{6\,3\,4}{1\,2\,5}$, $\binom{2\,4\,5}{1\,3\,6}$, $\binom{3\,5\,6}{1\,4\,2}$, $\binom{4\,6\,2}{1\,5\,3}$ liegen mit 1 in einer der gesuchten Ebenen.

Um dies darzuthun, suchen wir den Schnitt einer vorläufig willkürlich liegenden Ebene E mit dem räumlichen Sechseck und bezeichnen die Spuren von Kanten, Halbkanten und Seitenflächen in E ebenso wie die Kanten, Halbkanten und Seitenflächen selbst. Es entsteht also in E ein aus (5 2 3), (6 3 4), (2 4 5), (3 5 6), (4 6 2) gebildetes vollständiges Fünfseit, von dessen zehn Ecken fünf durch (2 5), (5 3), (3 6), (6 4), (2 4) gegeben sind; die übrigen bezeichnen wir als $5\,(3\,6,\,2\,4) = \alpha_1$, $6\,(4\,2,\,3\,5) = \alpha_2$, $2\,(5\,3,\,4\,6) = \alpha_3$, $3\,(6\,4,\,5\,2) = \alpha_4$, $4\,(2\,5,\,6\,3) = \alpha_5$. Diese Elemente reichen zur Bestimmung des ebenen Schnittes noch nicht aus, aber die noch fehlenden werden sämtlich bestimmt, wenn festgesetzt wird, es sei E die Ebene von $\binom{5\,2\,3}{1\,6\,4}$, $\binom{6\,3\,4}{1\,2\,5}$, $\binom{2\,4\,5}{1\,3\,6}$, wodurch diese Punkte identisch mit α_1, α_2, α_3 werden, während zugleich die Spur von (1 2 3) durch α_1 willkürlich gezogen sei.

Durch (1 2 3) wird auf (2 3 5) der Punkt (2 3) ausgeschnitten, der mit (2 4) die Spur (2 3 4) bestimmt, welche auf (3 4 6) den Punkt (3 4) erzeugt. Die Verbindungslinie von (3 4) mit α_2 muss (1 3 4) sein, während (3 4) und (3 5) die Spur (3 4 5) ergeben. Im Schnitte von (3 4 5) und (2 4 5) liegt (4 5), was mit α_3 verbunden zu (1 4 5) führt; können wir also zeigen, dass (1 2 3), (1 3 4), (1 4 5) im nämlichen Punkte zusammenlaufen, so ist damit gezeigt, dass die Ecke 1 in der Ebene E liegt.

Zu diesem Zwecke drehen wir (1 2 3) um α_1 herum, so werden nach unsrer Konstruktion (1 2 3) und (2 3 4) zwei projektivisch-perspektivische Büschel mit den Mittelpunkten α_1 und (2 4) beschreiben, deren Schnitt (2 3 5) ist. Ebenso sind die Büschel (2 3 4) und (1 3 4) mit den Mittelpunkten (2 3) und α_2 projektivisch-perspektivisch mit dem Schnitte (3 4 6), demzufolge sind auch die Büschel (1 2 3) und (1 3 4) projektivisch und ihr Erzeugnis muss, wie man sich leicht überzeugt, der Kegelschnitt $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5$ sein.

Im Fernern sind die Büschel (1 3 4) und (3 4 5) mit den Mittelpunkten α_2 und (3 5) wegen des perspektivischen Schnittes

[1]) Es sind dies diejenigen, deren Bezeichnung in der obern Reihe von drei Zahlen die 1 enthält.

(3 4 6) projektivisch, ebenso die Büschel (3 4 5) und (1 4 5) mit den Mittelpunkten (3 5) und α_3 wegen des perspektivischen Schnittes (2 4 5), also auch die Büschel (1 3 4) und (1 4 5), deren Erzeugnis demnach ein Kegelschnitt ist. Man findet als solchen wiederum denjenigen durch α_1 α_2 α_3 α_4 α_5. Es ist damit nachgewiesen, dass (1 2 3), (1 3 4), (1 4 5) jeweilen korrespondierende Strahlen in drei projektivischen Büscheln sind, die sich immer in einem Punkte des bezeichneten Kegelschnittes treffen, d. h. die Punkte $\binom{5\,2\,3}{1\,6\,4}$, $\binom{6\,3\,4}{1\,2\,5}$, $\binom{2\,4\,5}{1\,3\,6}$, 1 liegen in einer und derselben Ebene E.

Man wird aber eben so leicht nachweisen, dass $\binom{6\,3\,4}{1\,2\,5}$, $\binom{2\,4\,5}{1\,3\,6}$, $\binom{3\,5\,6}{1\,4\,2}$, 1 oder $\binom{2\,4\,5}{1\,3\,6}$, $\binom{3\,5\,6}{1\,4\,2}$, $\binom{4\,6\,2}{1\,5\,3}$, 1 in einer Ebene enthalten sind; dies ist nicht anders möglich, als wenn $\binom{3\,5\,6}{1\,4\,2}$ identisch mit α_4, $\binom{4\,6\,2}{1\,5\,3}$ identisch mit α_5 ist, d. h. wenn alle sechs Punkte

$$\binom{5\,2\,3}{1\,6\,4},\ \binom{6\,3\,4}{1\,2\,5},\ \binom{2\,4\,5}{1\,3\,6},\ \binom{3\,5\,6}{1\,4\,2},\ \binom{4\,6\,2}{1\,5\,3},\ 1$$

in einer und derselben Ebene E liegen und dort einem Kegelschnitte angehören.

Die Ebene E soll künftig mit I bezeichnet werden und die ihr entsprechenden von 2, 3, 4, 5, 6 ausgehenden analog mit II, III, IV, V, VI. Damit ergibt sich die nachfolgende Tabelle:

In der Ebene	liegen die Punkte:					
I	$\binom{5\,2\,3}{1\,6\,4}$	$\binom{6\,3\,4}{1\,2\,5}$	$\binom{2\,4\,5}{1\,3\,6}$	$\binom{3\,5\,6}{1\,4\,2}$	$\binom{4\,6\,2}{1\,5\,3}$	1
II	$\binom{1\,4\,5}{2\,6\,3}$	$\binom{6\,5\,3}{2\,4\,1}$	$\binom{4\,3\,1}{2\,5\,6}$	$\binom{5\,1\,6}{2\,3\,4}$	$\binom{3\,6\,4}{2\,1\,5}$	2
III	$\binom{2\,6\,4}{3\,5\,1}$	$\binom{5\,4\,1}{3\,6\,2}$	$\binom{6\,1\,2}{3\,4\,5}$	$\binom{4\,2\,5}{3\,1\,6}$	$\binom{1\,5\,6}{3\,2\,4}$	3
IV	$\binom{3\,2\,5}{4\,6\,1}$	$\binom{6\,5\,1}{4\,2\,3}$	$\binom{2\,1\,3}{4\,5\,6}$	$\binom{5\,3\,6}{4\,1\,2}$	$\binom{1\,6\,2}{4\,3\,5}$	4
V	$\binom{4\,3\,6}{5\,2\,1}$	$\binom{2\,6\,1}{5\,3\,4}$	$\binom{3\,1\,4}{5\,6\,2}$	$\binom{6\,4\,2}{5\,1\,3}$	$\binom{1\,2\,3}{5\,4\,6}$	5
VI	$\binom{5\,4\,2}{6\,3\,1}$	$\binom{3\,2\,1}{6\,4\,5}$	$\binom{4\,1\,5}{6\,2\,3}$	$\binom{2\,5\,3}{6\,1\,4}$	$\binom{1\,3\,4}{6\,5\,2}$	6

V.

Indem man die Ebenen I II III IV V VI als ein vollständiges Sechsflach im Raume zusammenfasst, kann man auf dasselbe die bis jetzt für das vollständige Sechseck 1 2 3 4 5 6 gegebenen Entwicklungen nach dem Prinzip der Dualität übertragen. Man wird also namentlich aus den zwanzig Ecken des Sechsflachs zwölf verschiedene Dekagone bilden. Als Beispiel diene das Dekagon, welches in der Bezeichnung demjenigen Dekaeder entspricht, das dem früher zur Veranschaulichung der Beweise benutzten gegenüberliegt. Seine Ecken sind:

(I II IV) (I IV VI) (I VI III) (I III V) (I V II) (III II IV) (V IV VI) (II VI III) (IV III V) (VI V II).

Von den hundert und zwanzig Nebenflächen des Sechsflachs gehören je zehn zu einem Dekagon; dem eben hingeschriebenen entsprechen die nachfolgenden:

$$\begin{pmatrix}\mathrm{I}&\mathrm{II}&\mathrm{IV}\\ \mathrm{III}&\mathrm{VI}&\mathrm{V}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{I}&\mathrm{IV}&\mathrm{VI}\\ \mathrm{V}&\mathrm{III}&\mathrm{II}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{I}&\mathrm{VI}&\mathrm{III}\\ \mathrm{II}&\mathrm{V}&\mathrm{IV}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{I}&\mathrm{III}&\mathrm{V}\\ \mathrm{IV}&\mathrm{II}&\mathrm{VI}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{I}&\mathrm{V}&\mathrm{II}\\ \mathrm{VI}&\mathrm{IV}&\mathrm{III}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{III}&\mathrm{II}&\mathrm{IV}\\ \mathrm{I}&\mathrm{V}&\mathrm{VI}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mathrm{V}&\mathrm{IV}&\mathrm{VI}\\ \mathrm{I}&\mathrm{II}&\mathrm{III}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{II}&\mathrm{VI}&\mathrm{III}\\ \mathrm{I}&\mathrm{IV}&\mathrm{V}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{IV}&\mathrm{III}&\mathrm{V}\\ \mathrm{I}&\mathrm{VI}&\mathrm{II}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{VI}&\mathrm{V}&\mathrm{II}\\ \mathrm{I}&\mathrm{III}&\mathrm{IV}\end{pmatrix}$$

Diese zehn Nebenflächen bilden mit den sechs Flächen des vollständigen Sechsflachs eine Gruppe von sechszehn Ebenen, von denen sechszehn mal sechs je durch einen Punkt hindurchgehen und dort sechs Tangentialebenen eines Kegels zweiter Klasse bilden. Von den sechszehn so entstehenden Kegelmittelpunkten sind zehn die Ecken des Dekagons, die sechs andern, welche P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 heissen mögen, ergeben sich aus der nachfolgenden Tabelle:

Im Punkte	schneiden sich die Ebenen
P_1	$\begin{pmatrix}\mathrm{III}&\mathrm{II}&\mathrm{IV}\\ \mathrm{I}&\mathrm{V}&\mathrm{VI}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{V}&\mathrm{IV}&\mathrm{VI}\\ \mathrm{I}&\mathrm{II}&\mathrm{III}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{II}&\mathrm{VI}&\mathrm{III}\\ \mathrm{I}&\mathrm{IV}&\mathrm{V}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{IV}&\mathrm{III}&\mathrm{V}\\ \mathrm{I}&\mathrm{VI}&\mathrm{II}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{VI}&\mathrm{V}&\mathrm{II}\\ \mathrm{I}&\mathrm{III}&\mathrm{IV}\end{pmatrix}$
P_2	$\begin{pmatrix}\mathrm{I}&\mathrm{VI}&\mathrm{III}\\ \mathrm{II}&\mathrm{V}&\mathrm{IV}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{V}&\mathrm{III}&\mathrm{IV}\\ \mathrm{II}&\mathrm{VI}&\mathrm{I}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{VI}&\mathrm{IV}&\mathrm{I}\\ \mathrm{II}&\mathrm{III}&\mathrm{V}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{III}&\mathrm{I}&\mathrm{V}\\ \mathrm{II}&\mathrm{IV}&\mathrm{VI}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{IV}&\mathrm{V}&\mathrm{VI}\\ \mathrm{II}&\mathrm{I}&\mathrm{III}\end{pmatrix}$
P_3	$\begin{pmatrix}\mathrm{II}&\mathrm{I}&\mathrm{V}\\ \mathrm{III}&\mathrm{VI}&\mathrm{IV}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{VI}&\mathrm{V}&\mathrm{IV}\\ \mathrm{I}&\mathrm{II}&\mathrm{III}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{I}&\mathrm{IV}&\mathrm{II}\\ \mathrm{III}&\mathrm{V}&\mathrm{VI}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{V}&\mathrm{II}&\mathrm{VI}\\ \mathrm{III}&\mathrm{IV}&\mathrm{I}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{IV}&\mathrm{VI}&\mathrm{I}\\ \mathrm{III}&\mathrm{II}&\mathrm{V}\end{pmatrix}$ III
P_4	$\begin{pmatrix}\mathrm{III}&\mathrm{VI}&\mathrm{I}\\ \mathrm{IV}&\mathrm{V}&\mathrm{II}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{V}&\mathrm{I}&\mathrm{II}\\ \mathrm{IV}&\mathrm{VI}&\mathrm{III}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{VI}&\mathrm{II}&\mathrm{III}\\ \mathrm{IV}&\mathrm{I}&\mathrm{V}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{I}&\mathrm{III}&\mathrm{V}\\ \mathrm{IV}&\mathrm{II}&\mathrm{VI}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{II}&\mathrm{V}&\mathrm{VI}\\ \mathrm{IV}&\mathrm{III}&\mathrm{I}\end{pmatrix}$ IV
P_5	$\begin{pmatrix}\mathrm{IV}&\mathrm{I}&\mathrm{II}\\ \mathrm{V}&\mathrm{III}&\mathrm{VI}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{III}&\mathrm{II}&\mathrm{VI}\\ \mathrm{V}&\mathrm{I}&\mathrm{IV}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{I}&\mathrm{VI}&\mathrm{IV}\\ \mathrm{V}&\mathrm{II}&\mathrm{III}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{II}&\mathrm{IV}&\mathrm{III}\\ \mathrm{V}&\mathrm{VI}&\mathrm{I}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{VI}&\mathrm{III}&\mathrm{I}\\ \mathrm{V}&\mathrm{IV}&\mathrm{II}\end{pmatrix}$ V
P_6	$\begin{pmatrix}\mathrm{V}&\mathrm{III}&\mathrm{I}\\ \mathrm{VI}&\mathrm{II}&\mathrm{IV}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{II}&\mathrm{I}&\mathrm{IV}\\ \mathrm{VI}&\mathrm{III}&\mathrm{V}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{III}&\mathrm{IV}&\mathrm{V}\\ \mathrm{VI}&\mathrm{I}&\mathrm{II}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{I}&\mathrm{V}&\mathrm{II}\\ \mathrm{VI}&\mathrm{IV}&\mathrm{III}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathrm{IV}&\mathrm{II}&\mathrm{III}\\ \mathrm{VI}&\mathrm{V}&\mathrm{I}\end{pmatrix}$

Aber das Sechsflach I II III IV V VI steht auch ohne Rücksicht auf die Dualität mit dem Sechseck 1 2 3 4 5 6, aus dem es abgeleitet worden ist, in einem eigentümlichen Zusammenhang. Derselbe spricht sich namentlich in der gegenseitigen Beziehung aus, die zwischen dem das Sechsflach erzeugenden Dekaeder des Sechsecks und demjenigen Dekagon des Sechsflachs existiert, das dem gegenüberliegenden Dekaeder gleichgebildet ist. Aus der Tabelle, die den Schluss von § 4 bildet, geht nämlich hervor, dass jede der dort gegebenen Nebenecken in denjenigen Flächen des Sechsflaches liegt, deren Bezeichnung in römischer Ziffer übereinstimmt mit einer der drei untern Zahlen in der Bezeichnung der Nebenecke. So liegt z. B. $\begin{pmatrix} 5\,2\,3 \\ 1\,6\,4 \end{pmatrix}$ in jeder der Ebenen I, VI, IV, ist also mit der Ecke (I VI IV) des Sechsflachs identisch. Die Ecken eines gewissen Dekagons im Sechsflach sind also zugleich die Nebenecken eines gewissen Dekaeders im Sechseck.

Berücksichtigt man ferner, dass die Nebenfläche $\begin{pmatrix} \text{III II IV} \\ \text{I V VI} \end{pmatrix}$ die Ecken (II IV I), (IV III V), (III II VI) enthält, welche resp. mit den Nebenecken $\begin{pmatrix} 3\,5\,6 \\ 1\,4\,2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6\,1\,2 \\ 3\,4\,5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\,4\,5 \\ 2\,6\,3 \end{pmatrix}$ identisch sind und fügt man hinzu, dass jede der letztern in der Ebene (1 5 6) liegt, so erkennt man, dass in der nämlichen Art jede Nebenfläche des Dekagons identisch ist mit derjenigen Seitenfläche des erzeugenden Dekaeders, die in arabischen Ziffern durch die drei untern Zahlen in der Bezeichnung der Nebenfläche gegeben ist. Demnach gehen durch den Punkt P_1 die Ebenen (1 5 6), (1 2 3), (1 4 5), (1 6 2), (1 3 4), I, d. h. der Punkt P_1 ist identisch mit 1, ebenso P_2 mit 2, ... und endlich P_6 mit 6.

Fassen wir jetzt die Resultate der bisherigen Untersuchung zusammen, so können wir eine Gruppe von sechszehn Punkten und eine Gruppe von sechszehn Ebenen in folgende Beziehung setzen: Von den beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \text{(V IV VI)} & 1 & 2 & 3 \\ \text{(VI IV I)} & 5 & \text{(II V I)} & \text{(III I V)} \\ \text{(VI V II)} & \text{(I IV II)} & 4 & \text{(III II V)} \\ \text{(IV V III)} & \text{(I III VI)} & \text{(II VI III)} & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (1\,2\,3) & (2\,3\,5) & (1\,3\,4) & (1\,2\,6) \\ \text{V} & \text{I} & (2\,4\,5) & (3\,5\,6) \\ \text{IV} & (1\,4\,5) & \text{II} & (3\,4\,6) \\ \text{VI} & (1\,5\,6) & (2\,4\,6) & \text{III} \end{vmatrix}$$

ist die erste aus sechszehn Punkten, die zweite aus sechszehn Ebenen gebildet. Legt man durch ein Element der ersten die Zeile und die Kolonne, so erhält man sechs neue Elemente, welche sechs Punkte eines Kegelschnittes sind, dessen Ebene durch das korrespondierende Element der zweiten Determinante gegeben ist. Das Verhalten der beiden Determinanten ist polar.

Das vollständige Sechseck im Raum gibt zu zwölf solcher Determinantenpaare Veranlassung.
