

Zur Theorie der Scharen bilinearer Formen.

Von

Georg Frobenius in Berlin.

(Auszug aus einem Briefe an K. Weierstrass.)

Zürich, November 1881.

Bei unserer letzten Unterredung in Berlin haben Sie mich auf ein merkwürdiges Resultat aufmerksam gemacht, welches Sie in der Theorie einer speciellen Art von bilinearen Formen erhalten hatten. Ihrer Aufforderung entsprechend habe ich dasselbe mittelst der Methode hergeleitet, die ich in meiner Arbeit Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen (Crelle's Journal Bd. 84) dargelegt habe, und die im wesentlichen mit der identisch ist, welche Sie in den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1858 entwickelt haben. Erlauben Sie mir, mich bei der Darstellung der Kürze halber der symbolischen Bezeichnung für die Zusammensetzung von bilinearen Formen zu bedienen, die ich in jener Arbeit angewendet habe. Die folgende Deduktion ist dann ganz analog der daselbst Seite 51—53 über die orthogonalen Formen durchgeführten.

Seien:

$$P = \sum_{z,\lambda} p_{z\lambda} x_z y_\lambda, \quad Q = \sum_{z,\lambda} q_{z\lambda} x_z y_\lambda$$

zwei bilineare Formen von n Variabelnpaaren $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$, seien $p_{z\lambda}$ und $p_{\lambda z}$ konjugiert komplexe Grössen und ebenso $q_{z\lambda}$ und $q_{\lambda z}$. Sei die Determinante n -ten Grades $|p_{z\lambda}|$ von Null verschieden, dagegen $|q_{z\lambda}|$ nebst einer gewissen Anzahl von Unterdeterminanten Null. Wenn x_λ und y_λ konjugiert komplexe Werte haben, sei die Form Q niemals negativ. Aus den bekannten Sätzen der Differentialrechnung über Maxima und Minima folgt daraus, worauf Sie mich noch aufmerksam machten, dass Q nur für solche Werte von x_1, \dots, x_n verschwinden kann, für welche die Ableitungen von Q

nach y_1, \dots, y_n sämtlich Null sind. Sei nun:

$$(1) \quad (Q - rP)^{-1} = A r^{-\alpha} + B r^{-\alpha+1} + \dots,$$

und zwar sei die bilineare Form:

$$A = \sum_{z,\lambda} a_{z\lambda} x_z y_\lambda$$

nicht identisch Null. Dann sind auch $a_{z\lambda}$ und $a_{\lambda z}$ konjugiert komplexe Grössen, und ebenso $b_{z\lambda}$ und $b_{\lambda z}$, falls:

$$B = \sum_{z,\lambda} b_{z\lambda} x_z y_\lambda$$

ist. Ihr Resultat¹⁾ besteht nun darin, dass nicht $\alpha > 2$ sein kann. Um dies zu beweisen, nehme ich an, dass $\alpha > 1$ ist, und zeige, dass dann notwendig $\alpha = 2$ sein muss.

Setzt man beide Seiten der Gleichung (1) mit $Q - rP$ zusammen, so erhält man:

$$(2) \quad E = (A r^{-\alpha} + B r^{-\alpha+1} + \dots) (Q - rP),$$

und daraus durch Vergleichung der Koeffizienten von $r^{-\alpha}$ und $r^{-\alpha+1}$, weil $\alpha > 1$ ist:

$$(3) \quad A Q = 0$$

und:

$$(4) \quad A P = B Q.$$

Daher kann BQ nicht identisch verschwinden. Denn sonst wäre $AP = 0$, und weil die Determinante von P von Null verschieden ist, $A = 0$. Mithin kann auch die Form BQB nicht Null sein. Denn der Koeffizient von $x_\nu y_\nu$ in BQB ist:

$$\sum_{z,\lambda} q_{z\lambda} b_{\nu z} b_{\lambda \nu}$$

Dies ist der Wert der Form Q für:

$$x_z = b_{\nu z}, \quad y_z = b_{z\nu} \quad (z = 1, 2, \dots, n),$$

also für konjugiert komplexe Werte von x_z und y_z . Wäre also dieser Ausdruck Null, so müssten auch die n Ausdrücke:

$$\sum_z b_{\nu z} q_{z\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

verschwinden. Wenn dies für $\nu = 1, 2, \dots, n$ der Fall wäre, so müssten alle Koeffizienten der Form BQ verschwinden.

¹⁾ Vgl. auch Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig 1895, Seite 74.

Nachdem so festgestellt ist, dass die Form BQB nicht verschwindet, kann nun Ihre Methode angewendet werden. Aus der Gleichung (1) folgt durch Zusammensetzung mit P :

$$(P^{-1}Q - rE)^{-1} = AP r^{-\alpha} + BP r^{-\alpha+1} + \dots$$

Mithin sind die Formen AP, BP, \dots mit einander vertauschbar (l. c. § 3, IX). Indem man diese Gleichung mit sich selbst zusammensetzt, findet man:

$$(5) (P^{-1}Q - rE)^{-2} = APAP r^{-2\alpha} + 2APBP r^{-2\alpha+1} + \dots$$

Indem man aber jene Gleichung nach r differentiirt, erhält man:

$$(6) (P^{-1}Q - rE)^{-2} = -\alpha AP r^{-\alpha-1} - (\alpha - 1)BP r^{-\alpha} - \dots$$

Aus diesen beiden Entwicklungen folgt zunächst, dass $APAP = 0$ ist. Denn sonst ergäbe die Vergleichung der Exponenten der Anfangsglieder $-2\alpha = -\alpha - 1$, also $\alpha =$ Dagegen ist $APBP$ von Null verschieden, denn nach (4) ist:

$$(AP)(BP) = (BQ)(BP) = (BQB)P,$$

also nicht Null, da die Determinante von P nicht verschwindet. Durch Vergleichung der Exponenten der Anfangsglieder folgt daher

$$-2\alpha + 1 = -\alpha - 1, \quad \alpha = 2.$$

Ich wende mich nun zu einem andern Gegenstand, den Sie mit mir besprochen haben. In der Einleitung meiner Arbeit Theorie der linearen Formen mit ganzen Koeffizienten (Crelle's Journal, Bd. 86.) zeige ich, dass für die Aequivalenz zweier Scharen von bilinearen Formen die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend sind: In einem gewissen Systeme von $2n^2$ homogenen linearen Gleichungen zwischen $2n^2$ Unbekannten $p_{\gamma\alpha}$ und $s_{\delta\gamma}$ muss die Determinante verschwinden; und man muss den willkürlichen Konstanten, die in ihre allgemeinste Lösung eingehen, solche Werte beilegen können, dass die beiden Determinanten n -ten Grades:

$$p = |p_{\gamma\alpha}|, \quad s = |s_{\delta\gamma}|$$

von Null verschieden werden.

Gegen die Bündigkeit des Beweises ist, wie Sie ausführten, zwar nichts einzuwenden. Dennoch ist das Resultat höchst befremdend und bedarf einer weiteren Aufklärung. Damit zwei

Scharen bilinearer Formen aequivalent sind, müssen ihre Determinanten übereinstimmen. Diese sind ganze Funktionen n -ten Grades des Parameters der Schar. Ihre Uebereinstimmung erfordert also n Bedingungen. Statt dessen ergibt sich auf dem von mir eingeschlagenen Wege nur eine Bedingung.

Bei weiterem Nachdenken fand ich die Auflösung dieses Paradoxons, das auch mir schon aufgefallen war, in dem Umstande, dass eine Schar von bilinearen Formen immer eine Substitution in sich selbst zulässt, deren Koeffizienten mindestens n willkürliche Konstanten enthalten. Sind daher zwei Scharen von bilinearen Formen aequivalent, so muss auch die allgemeinste Transformation der einen in die andere mindestens n willkürliche Konstanten enthalten. Ausser der oben erwähnten Determinante vom Grade $2n^2$ müssen folglich auch alle ihre Unterdeterminanten von den Graden $2n^2 - 1, 2n^2 - 2, \dots, 2n^2 - n + 1$ verschwinden. Sonst können sie keine Lösung haben, für welche die beiden Determinanten n -ten Grades p und s von Null verschieden sind. Eine genauere Diskussion jener $2n^2$ linearen Gleichungen wird sich wohl kaum ausführen lassen, wenn man nicht die Schar bilinearer Formen, aus der sie entspringen, auf die reduzierte Form gebracht voraussetzt.
