Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann et son application à l'arithmétique.

Par

Jérôme Franel.

L'intelligence complète du mémoire de Riemann sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée présente, on le sait, des difficultés assez considérables. C'est pour faciliter l'étude de ce mémoire au lecteur désireux de l'approfondir que nous publions ce travail. Nous nous sommes efforcés, tout en étant concis, d'exposer avec la rigueur désirable les principaux résultats dûs à Riemann. Il reste encore un point fondamental à élucider: démontrer que toutes les racines de l'équation $\xi(t) = 0$ sont réelles. Il faut espérer, en raison du grand nombre de géomètres qui s'occupent actuellement de la fonction $\xi(t)$, que cette dernière difficulté sera, elle aussi, bientôt complètement éclaircie. On trouvera, à la suite de la traduction française du mémoire de Riemann que vient de publier M. Laugel (1), une liste des principaux travaux parus sur la question qui nous occupe, ce qui nous dispensera de multiplier les citations.

I.

Théorème I (2). Soient s une variable et $A_1, A_2, \ldots A_n \ldots$ des constantes quelconques. Si le module de

$$\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n^a}$$

---

(1) Chez Gauthier-Villars et fils.

(2) Voir Dedekind, Ueber die Convergenz und Stetigkeit einiger unendlichen Reihen, IX supplément aux Vorlesungen über Zahlenthéorie de Dirichlet.

où α est nul ou positif, reste, pour toute valeur de n, inférieur à un nombre fixe c, la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{n^s} \tag{1}$$

converge pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle (que nous désignerons par $R(s)$) est $> \alpha$.

Posons $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = B_n$, d'où

$$A_n = B_n - B_{n-1}, \quad A_1 = B_1.$$

Je dis que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) \tag{2}$$

est absolument convergente lorsque $R(s) > \alpha$.

En effet, soit $s = x + iy$, x et y étant réels, $x > 0$ et désignons par r_n le module de

$$\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}.$$

On a:

$$r_n^2 = \left[\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right]^2 + 4\,\frac{\sin^2\left[\frac{y}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{n^x(n+1)^x},$$

d'où

$$r_n < \frac{x}{n^{x+1}} + \frac{|y|}{n^{x+1}}.$$

Le module du terme général de la série (2) est donc inférieur à

$$c\,\frac{x+|y|}{n^{x+1-\alpha}},$$

cette série converge dès lors absolument pour $x > \alpha$. Mais si l'on appelle s_n et S_n les sommes des n premiers termes dans les séries (1) et (2) on a

$$s_n = S_n + \frac{B_n}{(n+1)^{x+iy}},$$

et comme $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{B_n}{(n+1)^{x+iy}} = 0$, x étant $> \alpha$, il en résulte $\lim s_n = \lim S_n$, ce qui établit le théorème.

Théorème II. Si la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{n^s}$$

converge pour $s = \alpha + i\beta$, où α et β sont réels et $\alpha > 0$, elle converge encore pour toutes les valeurs de s telles que $R(s) > \alpha$; en outre le module de

$$\frac{A_1 + \cdots + A_n}{n^\alpha}$$

reste, quelque soit n, inférieur à un nombre fixe.

En effet, posons:

$$A_1 + \frac{A_2}{2^{\alpha+i\beta}} + \cdots + \frac{A_n}{n^{\alpha+i\beta}} = S_n, \text{ d'où}$$

$$A_n = (S_n - S_{n-1})\, n^{\alpha+i\beta}, \; A_1 = S_1,$$

on aura:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = S_1(1 - 2^{\alpha+i\beta}) + S_2(2^{\alpha+i\beta} - 3^{\alpha+i\beta}) + \cdots$$

$$\cdots + S_{n-1}\left((n-1)^{\alpha+i\beta} - n^{\alpha+i\beta}\right) + S_n.\, n^{\alpha+i\beta}.$$

Le module de S_n est, pour toute valeur de n, inférieur à un nombre fixe c, celui de

$$(r-1)^{\alpha+i\beta} - r^{\alpha+i\beta} \text{ est } < r^\alpha - (r-1)^\alpha + 2|\beta|\, r^{\alpha-1},$$

de sorte que

$$|A_1 + \cdots + A_n| < c\left(2^\alpha - 1 + 3^\alpha - 2^\alpha + \cdots + n^\alpha - (n-1)^\alpha + n^\alpha\right)$$

$$+ 2c|\beta|(1 + 2^{\alpha-1} + \cdots + n^{\alpha-1})$$

d'où
$$\frac{|A_1 + \cdots + A_n|}{n^\alpha} < c',$$

c' étant une grandeur fixe convenablement choisie.

En vertu du théorème I la série proposée converge donc lorsque $R(s) > \alpha$.

Des résultats qui précédent on tire facilement les conclusions suivantes:

Une série de la forme $\Sigma \frac{A_n}{n^s}$ converge uniformément dans toute région finie de son domaine de convergence; elle représente, dans ce domaine, une branche uniforme de fonction analytique $f(s)$, régulière à distance finie.

Si
$$\frac{A_1 + \cdots + A_n}{n^\alpha} = \frac{B_n}{n^\alpha} \text{ où } \alpha \geqq 0$$
augmente indéfiniment avec n mais de manière que $\frac{B_n}{n^{\alpha+\varepsilon}}$ tende vers 0 avec $\frac{1}{n}$, ε étant une quantité positive aussi petite qu'on le veut, la série $\Sigma \frac{A_n}{n^s}$ converge pour $R(s) > \alpha$.

Réciproquement si la série $\Sigma \frac{A_n}{n^s}$ converge pour $R(s) > \alpha \geqq 0$ $\frac{B_n}{n^{\alpha+\varepsilon}}$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, pour toute valeur positive de ε si petite qu'elle soit.

La série $\Sigma \frac{A_n}{n^s} \log\left(\frac{1}{n}\right)$ a même domaine de convergence que la série $\Sigma \frac{A_n}{n^s} = f(s)$; elle a pour somme la dérivée $f'(s)$.

La série $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{n^s \log n}$, converge également dans la même région et a pour somme
$$\int_{\infty}^{s} (f(s) - A_1)\, d s.$$

II.

Faisons, avec Riemann,
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s} = \Pi\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\right),$$
où le produit s'étend à tous les nombres premiers, puis
$$F(s) = s\frac{(s-1)}{2}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = F(1-s).$$

En posant $s = \frac{1}{2} + i\,t$, $F(s) = \xi(t)$, on a:

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \psi(x)\, x^{-3/4} . \cos\left(\frac{t}{2} \log x\right) dx \tag{1}$$

$$\text{où } \psi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n^2 \pi x}.$$

Les racines de l'équation $F(s) = 0$ ont leur partie réelle comprise entre 0 et 1. Soit N le nombre de ces racines dont la partie imaginaire est comprise entre 0 et ih, h étant une quantité positive donnée. Pour évaluer ce nombre considérons dans le plan de la variable $s = x + iy$ un contour $MABH$ formé du segment MA de l'axe des x dont les extrémités ont pour abscisses $\frac{1}{2}$ et $a > 1$, d'une courbe AB située en entier dans la région du plan définie par l'inégalité $x > 1$ et d'une parallèle à l'axe des x, BH dont l'ordonnée $= h$ et dont le point terminal H a pour abscisse $\frac{1}{2}$. Si l'on part du point M avec une certaine détermination de $\log F\left(\frac{1}{2}\right)$ puis qu'on décrive le contour ainsi défini et ensuite le contour symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$, la différence des valeurs obtenues en H pour $\log F(s)$ sera égale à $2\pi i N$. Dans la partie du plan définie par l'inégalité $x > 1$ l'une quelconque des déterminations de $\log F(s)$ est une fonction uniforme de s.

De l'équation $F(s) = F(1-s)$ et de ce qu'à des valeurs imaginaires conjuguées de la variable correspondent aussi des valeurs imaginaires conjuguées de $F(s)$ résulte que $2\pi N$ est égal à deux fois l'argument de $F(s)$ au point B plus deux fois l'accroissement éprouvé par cet argument lorsqu'on passe de B en H suivant la ligne droite BH, si l'on convient de choisir l'argument de $F(s)$ au point A égal à 0. L'abscisse du point B surpasse l'unité d'aussi peu qu'on le veut. On peut démontrer que l'accroissement éprouvé par l'argument de $F(s)$ lorsqu'on décrit le segment rectiligne BH reste, quelque soit h, inférieur à une grandeur fixe.

De la formule

$$\log \zeta(s) = -\Sigma \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \Sigma \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{p^{2s}} + \cdots$$

résulte d'ailleurs que l'argument de $\zeta(s)$ au point B est, pour toute valeur de h, inférieur à une quantité fixe assignable.

Si donc on néglige des quantités qui restent finies quelque soit h, on aura simplement:

$$2\pi N = 2 \text{ argument de} \left(\pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right) \text{ au point } H$$

c'est-à-dire:

$$2\pi N = -h \log \pi + \log \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{h}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - i\frac{h}{2}\right)}.$$

En appliquant la formule de Stirling on obtient finalement le résultat suivant:

$$(2) \qquad N = \frac{h}{2\pi} \log \frac{h}{2\pi} - \frac{h}{2\pi} + \varphi(h)$$

où $|\varphi(h)|$ reste, quelque soit h, inférieur à une grandeur fixe assignable. Nous admettrons, ce qui est infiniment probable, mais ce qui n'a pu être établi jusqu'à présent, que toutes les racines de l'équation $\xi(t) = 0$ sont réelles(1).

De l'expression trouvée pour N résulte que la fonction $\xi(t)$, considérée comme fonction de t^2, est du genre 0.

Désignons par α l'une quelconque des racines positives de l'équation $\xi(t) = 0$. La série

$$\Sigma \frac{1}{\alpha^m}$$

convergeant pour toute valeur de m supérieure à l'unité on aura:

$$(3) \qquad \xi(t) = \xi(0)\, e^{G(t^2)}\, \Pi\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right),$$

où $G(t^2)$ est une fonction entière (rationnelle ou transcendante) qui s'annule avec t.

Cherchons une limite supérieure du module de $\xi(t)$ en partant de l'équation

(1) M. Gram s'occupe actuellement du calcul numérique de celles de ces racines qui ne dépassent pas une certaine limite. Voir sa note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$, Bulletin de l'Académie royale de Danemark, 1895.

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)\, x^{-3/4} \cos\left(\frac{t}{2}\log x\right) d\,x,$$

on a tout d'abord, pour les valeurs de $x > 1$ $\psi(x) < c\,e^{-\pi x}$, c désignant une constante que l'on peut choisir égale à $1 + \frac{1}{10000}$(1). Le module de l'intégrale est donc inférieur à

$$c\int_1^\infty e^{-\pi x}\, x^{\frac{\varrho}{2}}\, d\,x < c\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)}{\Pi^{1+\frac{\varrho}{2}}},$$

où $\varrho = |t|$, de sorte que $|\xi(t)|$ ne croît pas plus rapidement, avec ϱ, que $c^{\varrho \log \varrho}$.

Faisons, pour un instant,

$$f(t) = \Pi\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right), \text{ d'où}$$

$$\log f(t) = \Sigma \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right).$$

Nous choisissons dans le second membre les valeurs principales des logarithmes, puis nous effectuons, dans le plan de la variable t, une coupure le long de l'axe des quantités réelles.

Dans chacun des demi-plans restants $\log f(t)$ est alors une fonction uniforme de t. Divisons les racines α en deux classes; mettons dans la première celles qui sont $\leqq |t| = \varrho$ et que nous désignerons par α' et dans la seconde celles qui sont $> \varrho$ et que nous appellerons α''. On a:

$$\log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) = \int_0^t \frac{2t\,dt}{t^2 - \alpha^2} = \int_0^\varrho \frac{2z\,e^{2i\varphi}\,dz}{z^2\,e^{2i\varphi} - \alpha^2},$$

φ désignant l'argument de t, d'où:

$$\left|\log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha''^2}\right)\right| < \int_0^\varrho \frac{2z\,dz}{\alpha''^2 - z^2} = \log\left(\frac{\alpha''^2}{\alpha''^2 - \varrho^2}\right)$$

---

(1) Hadamard, Etude sur les propriétés des fonctions entières etc. Journal de C. Jordan t. X 1893, p. 211.

et, par-conséquent,

$$\left|\log\left(1-\frac{t^2}{\alpha''^2}\right)\right| < \frac{\varrho^2}{\alpha''^2}.$$

Il en résulte:

$$\Sigma\left|\log\left(1-\frac{t^2}{\alpha''^2}\right)\right| < \varrho^2\ \Sigma\frac{1}{\alpha''^2}.$$

On trouve facilement, au moyen de la formule (2), que la somme $\Sigma\frac{1}{\alpha''^2}$ est de l'ordre de $\frac{\log\varrho}{\varrho}$.

D'autre part de l'équation

$$\log\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right) = \int_0^\varrho \frac{2z\,e^{2i\varphi}\,dz}{z^2 e^{2i\varphi}-\alpha^2},$$

on tire:

$$\left|\log\left(1-\frac{t^2}{\alpha'^2}\right)\right| < \int_0^\varrho \frac{2z\,dz}{\sqrt{z^4-2\alpha'^2z^2\cos 2\varphi+\alpha'^4}} = \int_0^{\varrho^2}\frac{du}{\sqrt{u^2-2\alpha'^2u\cos 2\varphi+\alpha'^4}}$$

puis:

$$\left|\log\left(1-\frac{t^2}{\alpha'^2}\right) < \frac{1}{2}\log\left(\frac{\varrho^4-2\alpha'^2\varrho^2\cos 2\varphi+\alpha'^4}{\alpha'^4\sin^4\varphi}\right) < \log\left(\frac{2\varrho^2}{\alpha'^2\sin^2\varphi}\right)$$

de sorte que:

$$\Sigma\left|\log\left(1-\frac{t^2}{\alpha'^2}\right)\right| < 2\varrho\ \Sigma\frac{1}{\alpha'} + N'\log\left(\frac{2}{\sin^2\varphi}\right)$$

N' désignant le nombre des racines α'. Le second membre de cette dernière inégalité croissant avec ϱ comme $\varrho\log\varrho$, on en conclut que le module de $f(t)$ est de l'ordre de $e^{\varrho\log\varrho}$. Par conséquent le module de la fonction $e^{G(t^2)}$ croit avec ϱ moins rapidement que e^{ϱ^λ}, λ étant un exposant qui surpasse l'unité d'aussi peu qu'on le veut. La fonction $G(t^2)$ est donc identiquement nulle et la formule (3) se réduit à:

$$\xi(t) = \xi(0)\,\Pi\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right). \tag{4}$$

La fonction $\xi(t)$, considérée comme fonction de t^2, est donc bien du genre 0.

On sait, que M. Hadamard a démontré cette importante proposition comme cas particulier d'un théorème général sur les fonctions entières[1]. En s'appuyant sur le résultat de M. Hadamard, M. de Mangoldt[2] a établi ensuite la formule (2) relative au nombre N des racines comprises entre 0 et h.

Nous avons simplement cherché à développer la pensée de Riemann.

Par des considérations toutes semblables on verra que le module de

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \text{ reste inférieur à } A \log^2 |s|.$$

A étant une constante convenablement choisie, si l'on exclut du plan de la variable s les environs du point $s=1$, la partie négative de l'axe des quantités réelles et la droite $R(s)=\frac{1}{2}$.

III.

De l'équation $\zeta(s) = \Pi \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}$, on tire:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{\log p}{p^s - 1} = \sum \frac{A_n}{n^s}, \tag{1}$$

où A_n est nul quand n est divisible par plusieurs nombres premiers différents et égal à $\log p$ quand n est divisible par le seul nombre premier p.

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $\frac{1}{2\pi i} h^s \frac{ds}{s}$ où h est une quantité positive que, pour simplifier, nous supposerons différente d'un nombre entier puis intégrons le long d'une parallèle à l'axe des y, $x=a$ $(a>1)$ entre les limites $y=-R$ et $y=R$. La série dans le second membre convergeant uniformément dans la région que définit l'inégalité $x>1$, on pourra intégrer terme à terme, de sorte que:

---

(1) Hadamard, Etude sur les propriétés des fonctions entières etc., mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris, Journal de Math. pures et appliquées t. X, 1893.

(2) Mangoldt (H. von). Zu Riemanns Abhandlung „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" Journal de Crelle t. 114.

$$(2) \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}h^s\frac{ds}{s}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n\int_{a-iR}^{a+iR}\left(\frac{h}{n}\right)^s\frac{ds}{s}$$

Or il est aisé de voir(¹) que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a+iR}^{a+iR}e^{su}\frac{ds}{s}-1\right|\leqq\frac{3}{2\pi}\,\frac{e^{ua}}{uR},$$

et

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a+iR}^{a+iR}e^{-su}\frac{ds}{s}\right|\leqq\frac{3}{2\pi}\,\frac{e^{-ua}}{uR},$$

u étant positif. Il en résulte que le second membre de la formule (2) peut se mettre sous la forme:

$$\sum_{n<h}A_n+\varrho+\sigma, \text{ où}$$

$$|\varrho|<\frac{3h^a}{2\pi R}\sum_{n<h}\frac{|A_n|}{n^a\log\left(\frac{h}{n}\right)}<\frac{3h^a}{2\pi R\,.\log\left(\frac{h}{n'}\right)}\sum_{n<h}\frac{\log n}{n^a}$$

$$|\sigma|<\frac{3h^a}{2\pi R}\sum_{n>h}\frac{|A_n|}{n^a\log\left(\frac{n}{h}\right)}<\frac{3h^a}{2\pi R\log\left(\frac{n''}{h}\right)}\sum_{n>h}\frac{\log n}{n^a},$$

n' étant égal à $E(h)=[h]$ et n'' à $n'+1$.

En remarquant que la somme $\sum\limits_{n<h}A_n$, n'est autre chose que la fonction de M. Tschebischeff:

$$\sum\left[\frac{\log h}{\log p}\right]\log p$$

que nous désignerons par $\psi(h)$, il viendra:

$$(3) \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}h^s\frac{ds}{s}=\psi(h)+r$$

où
$$|r|<c\,\frac{h^2\log h}{R},$$

c étant une constante convenablement choisie, indépendante de h et de R.

(¹) Voir le mémoire cité plus haut de M. de Mangoldt.

On peut évaluer l'intégrale:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,h^s\,\frac{ds}{s}$$

d'une autre manière, en intégrant le long du rectangle formé par les quatre droites $x=a$, $y=R$, $x=b$, $y=-R$, b étant une quantité négative, aussi grande qu'on le veut en valeur absolue, et en retranchant du résultat les intégrales relatives aux trois derniers côtés et que nous désignerons respectivement par I_1, I_2 et I_3.

En vertu de la remarque faite à la fin du paragraphe II on aura:

$$|I_1| < \frac{A}{2\pi}\int_b^a \frac{\log^2|s|\,.\,h^x\,dx}{|s|},\quad (s = x + iR)$$

Soit ε une quantité positive quelconque inférieure à l'unité $\frac{\log^2|s|}{|s|^\varepsilon}$ étant constamment $<\frac{4}{\varepsilon^2 e^2}$, il en résultera:

$$(4)\qquad |I_1| < \frac{2A}{\pi\,\varepsilon^2 e^2}\int_b^a \frac{h^x\,dx}{|s|^{1-\varepsilon}} < \frac{2A}{\pi\,\varepsilon^3 e^2}\cdot\frac{h^a}{R^{1-\varepsilon}.\log h},$$

inégalité qui subsiste évidemment pour l'intégrale I_3.

Semblablement:

$$|I_2| < \frac{A\,h^b}{2\pi}\int_{-R}^{+R}\log^2|s|\,\frac{dy}{|s|},\quad (s = b + iy)$$

ou encore:

$$(5)\qquad |I_2| < \frac{4A}{\pi e^2}\,h^b\,.\,R$$

Quant à l'intégrale I relative au rectangle elle s'obtient immédiatement par l'application du théorème de Cauchy sur les résidus. Elle a pour expression:

$$(6)\qquad I = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + h + \frac{1}{2}\sum\frac{h^{-2n}}{n} - \sum_{\alpha<R}\left(\frac{h^{\frac{1}{2}+i\alpha}}{\frac{1}{2}+i\alpha} + \frac{h^{\frac{1}{2}-i\alpha}}{\frac{1}{2}-i\alpha}\right)$$

La somme $\sum\frac{h^{-2n}}{n}$ qui doit s'étendre aux valeurs entières et positives de $n < -\frac{b}{2}$ est inférieure à $-\log\left(1-\frac{1}{h^2}\right)$.

Maintenant dans l'équation

$$(7) \qquad \psi(h) + r = I - I_1 - I_2 - I_3,$$

supposons, pour préciser, $R = h^2$ puis choisissons:

$$a < \frac{5}{2} \text{ et } \varepsilon < \frac{3}{4} - \frac{a-1}{4}.$$

Le module de I_2 pourra être rendu aussi petit qu'on le veut en prenant la quantité négative b suffisamment grande en valeur absolue et les modules de r, I_1 et I_3 croîtront avec h moins rapidement que $h^{\frac{1}{2}}$.

Enfin la somme:

$$\sum_{\alpha < R} \left(\frac{h^{\frac{1}{2}+i\alpha}}{\frac{1}{2}+i\alpha} + \frac{h^{\frac{1}{2}-i\alpha}}{\frac{1}{2}-i\alpha} \right)$$

croît, avec h, moins vite que $h^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha < R} \frac{1}{\alpha}$, c'est-à-dire moins vite que $h^{\frac{1}{2}} . \log^2 h$, en vertu de la formule (2) du second paragraphe et de l'équation $R = h^2$.

La fonction de Tschebischeff $\psi(h)$ peut donc se mettre sous la forme:

$$(8) \qquad \psi(h) = h + h^{\frac{1}{2}} \log^2(h) . \varphi(h),$$

où $|\varphi(h)|$ est, pour toute valeur de h, inférieur à une constante assignable. Si $\delta(h)$ désigne la somme des logarithmes népériens des nombres premiers $< h$ on a:

$$\psi(h) = \delta(h) + \delta\left(h^{\frac{1}{2}}\right) + \delta\left(h^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots$$

d'où:

$$\delta(h) = \Sigma \mu(m) \psi\left(h^{\frac{1}{m}}\right),$$

le coefficient $\mu(m)$ étant égal à la somme des racines primitives de l'équation $x^m = 1$.

On peut donc mettre aussi $\delta(h)$ sous la forme:

$$(9) \qquad \delta(h) = h + h^{\frac{1}{2}} . \log^2(h) . \lambda(h),$$

ou $|\lambda(h)|$ reste inférieur, quelque soit h, à une grandeur fixe assignable. De cette formule (9) et des théorêmes du premier paragraphe résulte que la série

$$\sum \frac{B_n}{n^s}$$

où $B_n = 1 - \log p$ quand n est un nombre premier p et égal à l'unité quand n est un nombre composé, est convergente pour toutes les valeurs de s dont la partie réelle est $> \frac{1}{2}$, les termes étant rangés par ordre des nombres n croissants. Sous cette dernière condition la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n^s \log n}$$

converge dans le même domaine, de sorte que

$$\sum_{n=2}^{n=E(h)} \frac{B_n}{\log n}$$

est de l'ordre de $h^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, où ε est positif mais aussi petit qu'on le veut. Mais cette dernière somme n'est autre chose que

$$\sum_{n=2}^{n=E(h)} \frac{1}{\log n} - F(h),$$

$F(h)$ désignant le nombre des nombres premiers inférieurs à h.

On peut donc faire:

$$F(h) = \int_2^h \frac{dx}{\log x} + h^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \cdot F_1(h), \tag{10}$$

ε étant une quantité positive mais aussi petite qu'on le veut et $F_1(h)$ tendant vers 0 quand h augmente indéfiniment.

La démonstration complète de ce théorème fondamental est ainsi ramenée à cette autre proposition: toutes les racines de l'équation $\xi(t) = 0$ sont réelles.

Connaissant l'expression asymptotique de $F(h)$ on pourra calculer avec une approximation correspondante la somme $\Sigma\varphi(p)$, étendue à tous les nombres premiers $< h$, $\varphi(x)$ étant une fonction donnée de la variable x.