MATHEMATIK

Die Convergenz der Jacobi'schen ϑ-Reihe mit den Moduln Riemanns.

Von

Elwin Bruno Christoffel in Strassburg.

In der p-fach unendlichen Reihe Jacobi's:

$$\vartheta = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdot\cdot \sum_{m_p} e^{\Phi((m)) + 2(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_p v_p)},$$

$$\Phi((m)) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} a_{\mu,\nu}\, m_\mu\, m_\nu \quad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots p),$$

wo die Summationen nach $m_1, m_2, \ldots m_p$ über alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken sind, substituiert Riemann für die p-Argumente $v_1, v_2, \ldots v_p$ seine Normalintegrale I. G. und für die $\frac{1}{2}\,p\,(p+1)$ Moduln $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ ihre Periodicitätsmoduln an den Querschnitten $b_1, b_2, \ldots b_p$. Von diesen beweist er den Satz:

> Sind $x_1, x_2, \ldots x_p$ reelle Variabeln und ist, durch Trennung des Reellen vom Imaginären:
>
> $$\Phi((x)) = -\varphi((x)) + i\,\psi((x)),$$
>
> so wird die quadratische Form $\varphi((x))$ nur in dem Falle $= 0$, wo die p Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_p$ alle zugleich verschwinden. In allen übrigen Fällen ist sie von Null verschieden und positiv.

Diese Voraussetzung über die Moduln $a_{\mu\nu}$ oder die quadratische Form φ werden wir beibehalten. Dann ist die Convergenz der Jacobischen Reihe eine so augenfällige, dass aus einem Beweise derselben, wenn er allen berechtigten Anforderungen genügen soll, hauptsächlich hervorgehen muss, aus welchem Grunde die Convergenz sich sozusagen von selbst versteht. —

Werden die (reellen) Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_p$ zunächst so beschränkt, dass die Summe ihrer Quadrate: $\Sigma x^2 = 1$ bleibt, so können sie nicht alle $= 0$ werden, also kann φ nicht unter jede positive Zahl sinken. Folglich hat φ bei dieser Beschränkung einen kleinsten Wert α, was $\varphi((x)) \geqq \alpha$ gibt für $\Sigma x^2 = 1$, und dieser niedrigste Wert α von φ ist eine von Null verschiedene, positive Zahl, auf deren genauen Wert es hier nicht ankommt.

Sind sodann $x_1, x_2, \ldots x_p$ irgend welche reelle Werte, und bezeichnet man die Summe ihrer Quadrate durch r^2, so ist:

$\Sigma\left(\frac{x}{r}\right) = 1$, also folgt auch $\varphi\left(\left(\frac{x}{r}\right)\right) \geqq \alpha$, d. i. $\varphi((x)) \geqq \alpha r^2$.

> Jeder reellen quadratischen Form $\varphi((x))$ mit p reellen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_p$, welche die im obigen Satze ausgesprochenen Eigenschaften besitzt, ist eine von Null verschiedene, positive Zahl α in der Weise geordnet, dass für jedes System reeller Argumente $x_1, x_2, \ldots x_p$
>
> $$\varphi((x)) \geqq \alpha\,(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2)$$
>
> ist,

was sich, beiläufig bemerkt, auch umkehren lässt.

Die Anwendung auf obige Convergenzfrage ist sehr einfach. Setzt man noch $v_\mu = \zeta_\mu + i\,\eta_\mu$ für $p = 1, 2, \ldots p$, so wird:

$$\vartheta = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\ldots\sum_{m_p} e^{-\varphi((m)) + i\,\psi((m)) + 2\sum_\mu m_\mu(\zeta_\mu + i\,\eta_\mu)},$$

die zugehörige Modulreihe ist:

$$\Theta = \sum_{m_1}\sum_{m_2}\ldots\sum_{m_p} e^{-\varphi((m)) + \sum_\mu m_\mu \zeta_\mu},$$

und:

$$\operatorname{Mod}\vartheta < \Theta.$$

Aber nun ist $\varphi((m)) \geqq \alpha\,\Sigma m^2$, $-\varphi((m)) \leqq -\alpha\,\Sigma m^2$, das gibt:

$$\Theta \leqq \sum_{m_1}\sum_{m_2}\ldots\sum_{m_p} e^{-\alpha(m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2) + 2(m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 + \cdots + m_p\zeta_p)},$$

und wenn die Summe der convergenten Reihe:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-a m^2 + 2 m \zeta} = f(\zeta)$$

gesetzt wird,

$$\Theta \overline{\overline{<}} f(\zeta_1) f(\zeta_2) \ldots f(\zeta_p).$$

Da aber, wie sofort bewiesen werden soll, für jedes reelle ζ:

$$0 < f(\zeta) < f\left(\frac{a}{2}\right) e^{\frac{\zeta^2}{a}}$$

ist, so folgt endlich:

$$\operatorname{Mod} \vartheta < \Theta < \left[f\left(\frac{a}{2}\right)\right]^p e^{\frac{1}{a}[\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_p^2]},$$

also das Resultat:

Solange von keinem der p Argumente $v_1, v_2, \ldots v_p$ der reelle Teil unendlich wird, ist unter den, über die Moduln $a_{\mu\nu}$ oder die quadratische Form φ gemachten Voraussetzungen 1) die zu ϑ gehörige Modulreihe Θ convergent, also 2) auch die ϑ-Reihe selbst, und zwar ist ihre Summe nicht bedingt durch die Anordnung der Summation. Sie ist durch den vorstehenden Beweis sichergestellt für alle diejenigen Fälle, wo man berechtigt ist, jedem einzelnen Gliede der ϑ-Reihe einen exacten Wert zuzuschreiben.

Für die Theorie der Abel'schen Funktionen reicht dieser Convergenzbeweis — bis auf die angedeutete Schlussfrage — aus; ich übergehe daher den ebenso einfachen Beweis, dass die ϑ-Reihe in allen denjenigen Fällen divergiert, wo φ nicht die im Riemann-schen Falle vorhandenen Eigenschaften besitzt, also entweder φ negativer Werte fähig ist, oder zwar eine stets positive, aber keine vollständige Form ist. —

Die obere Grenze für $f(\zeta)$, welche wir benutzt haben, ergibt sich wie folgt. Bleibt ζ auf reelle Werte beschränkt, so ist

$$\omega(\zeta) = e^{-\frac{\zeta^2}{a}} f(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left[m - \frac{\zeta}{a}\right]^2}$$

stets positiv, ausserdem eine gerade, periodische Funktion von ζ, mit der Periode $\Delta\zeta = a$. Wenn daher $\omega(\zeta) \overline{\overline{<}} \beta$ ist von $\zeta = 0$ bis $\zeta = \frac{a}{2}$, so gilt diese Ungleichheit für alle reellen Werte von ζ, und mit ihr die andere: $f(\zeta) = \omega(\zeta)\, e^{\frac{\zeta^2}{\alpha}} \overline{\overline{<}}\, \beta\, e^{\frac{\zeta^2}{\alpha}}$. Aber

$$f(\zeta) = 1 + \sum_1^\infty e^{-\alpha m^2}\left[e^{2m\zeta} + e^{-2m\zeta}\right]$$

bleibt ebenfalls stets positiv, und zwar nimmt $f(\zeta)$ ununterbrochen zu, wenn ζ von Null an wächst. Folglich ist

$$\text{für } 0 \overline{\overline{<}}\, \zeta < \frac{\alpha}{2} : f(\zeta) < f\left(\frac{\alpha}{2}\right), \text{ aber für } \zeta = \frac{\alpha}{2} : f(\zeta) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right), \text{ ferner}$$

$$\text{„} \quad \text{„} \quad e^{-\frac{\zeta^2}{\alpha}} \overline{\overline{<}}\, 1, \qquad \text{„} \quad \text{„} \quad e^{-\frac{\zeta^2}{\alpha}} < 1,$$

also ist

$$\text{für } 0 \overline{\overline{<}}\, \zeta \leqq \frac{\alpha}{2} : e^{-\frac{\zeta^2}{\alpha}} f(\zeta) = \omega(\zeta) < f\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Nehmen wir daher $\beta = f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, so folgt, für jedes reelle ζ, $\omega(\zeta) < f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ und:

$$f(\zeta) < f\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{\zeta^2}{\alpha}},$$

was oben benutzt wurde. —

Es erübrigt nur noch, ein Wort über die Bedeutung der Zahl α hinzuzufügen. Sie ergibt sich aus der Lehre von den Maxima und Minima. Ist $\Delta(t)$ die Determinante $\Delta(t) = \text{Det}\,(\varphi((x)) - t\,\Sigma x^2))$, so hat die Gleichung $\Delta(t) = 0$ nach bekannten Sätzen nur von Null verschiedene positive Wurzeln, und α ist die kleinste derselben. Die Ungleichheit für φ und mit ihr die für Θ und Mod ϑ gefundene wird nur verstärkt, wenn man diesen genauen Wert von α durch einen kleinern ersetzt, wofern auch dieser von Null verschieden und positiv ist. Solche Zahlen ergeben sich leicht, wenn man $\frac{\partial}{\partial t}\log\left(\frac{1}{\Delta(t)}\right) = \frac{1}{E(t)}$ aus der Faktorenzerfällung von $\Delta(t)$ berechnet: man erkennt dann sofort, dass (auch wenn α mehrfache Wurzel ist) für $t < \alpha$ 1) $\frac{1}{\alpha - t} < \frac{1}{E(t)}$ also 2) $E(t) > 0$ und 3) $t + E(t) < \alpha$, d. h. 4) $t < t + E(t) < \alpha$ ist. Geht man von dem, sicher unter α liegenden Werte $t = 0$ aus, so bildet sich eine Zahlenreihe $\alpha_1 = E(0)$, $\alpha_2 = \alpha_1 + E(\alpha_1)$, $\alpha_3 = \alpha_2 + E(\alpha_2), \ldots$, und es folgt $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha$, womit Zahlen nachgewiesen sind, die an die Stelle von α treten können. —