Zwei involutorische Transformationen mit Anwendungen.

Von

G. Stiner in Frauenfeld.

(Mit zwei Tafeln.)

---

1. Die Pole einer Geraden g in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schar bilden eine gerade Punktreihe, deren Träger g^* heissen soll. Die beiden Geraden g und g^* bilden ein Paar konjugierte Strahlen für alle Kegelschnitte der Schar. Dreht sich g um einen festen Punkt D, so umhüllt g^* einen Kegelschnitt K^*. Die Strahlen g durch D sind ihren konjugierten Tangenten g^* von K^* projektiv zugeordnet; der Schnittpunkt G von g und g^* beschreibt daher eine Kurve dritter Ordnung C_3, für welche D ein Doppelpunkt ist.[1]) Diese C_3 geht durch die Ecken des Vierseits der Grundtangenten $t_1 \,..\, t_4$ der Kegelschnittschar; die 3 Paare gegenüberliegender Ecken dieses Vierseits sollen in Zukunft bezeichnet werden durch $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$.

Kennt man zu 3 von einander unabhängigen Strahlen durch D die konjugierten Geraden, so kann man daraus beliebig viele neue Paare gg^* und damit beliebig viele neue Punkte der C_3 ableiten mit Hülfe des Hesse'schen Satzes über Paare konjugierter Punkte resp. Geraden

---

[1]) Man vergl. Schröter: „Ueber die Erzeugnisse krummer projekt. Gebilde." Journal für Math. Bd. 54. Ferner: Sporer: „Ueber eine besondere mit dem Kegelschnittbüschel in Verbindung stehende Kurve" Zeitschr. f. Math. und Phys. 38. Jahrg. pag. 34.

bezüglich eines Kegelschnittes.[1]) Sind nämlich g_λ g_μ zwei dieser Strahlen, $g_\lambda{}^*$ $g_\mu{}^*$ die konjugierten, so erhält man daraus ein neues Paar gg^*, wenn man einerseits den Schnittpunkt $g_\lambda{}^*$ $g_\mu{}^*$ mit D, anderseits den Schnittpunkt g_λ $g_\mu{}^*$ mit dem Schnittpunkt $g_\lambda{}^*$ g_μ verbindet. Die Punkte G_λ, G_μ, G der C_3, welche aus den 3 Paaren $g_\lambda g_\lambda{}^*$, $g_\mu g_\mu{}^*$, $g\, g^*$ hervorgehen, bilden ein Tripel der Kurve.

Eine Kegelschnittschar gibt auf diese Weise Veranlassung zu einem zweifach unendlichen System von Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, entsprechend den zweifach unendlich vielen möglichen Lagen des Punktes D. Alle diese Kurven gehen durch die 6 Punkte $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$.

2. Ein beliebiger Punkt P in der Ebene der Kegelschnittschar kann im Allgemeinen aufgefasst werden als Schnittpunkt eines einzigen Paares $p\, p^*$ konjugierter Geraden. Eine Ausnahme bilden nur die Ecken des Vierseits der Grundtangenten. Diese 6 Punkte haben in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schar dieselbe Involution harmonischer Polaren; in ihnen schneiden sich daher unendlich viele Paare konjugierter Geraden.

Soll eine der zweifach unendlich vielen C_3, welche durch die Kegelschnittschar bestimmt sind, einen gegebenen Punkt P einfach enthalten, so muss der zugehörige Doppelpunkt auf einer der beiden sich in P schneidenden Geraden $p\, p^*$ liegen. Man erhält diese als Doppelstrahlen derjenigen Strahleninvolution, welche entsteht, wenn man P mit den Gegenecken des Vierseits

---

[1]) Man vergl. Schröter, Theorie der Kegelschnitte, II. Aufl. pag. 153.

$t_1 \, .. \, t_4$ verbindet. Die Geraden $p\,p^*$, $t_1 \, .. \, t_4$ bilden zusammen die Steiner'sche Kurve sechster Ordnung, den Ort der Doppelpunkte für die durch die 7 Punkte $A\,\mathfrak{A}$ $B\,\mathfrak{B}$ $C\,\mathfrak{C}$ P gehenden Kurven dritter Ordnung.

Soll C_3 ausser P auch noch einen gegebenen Punkt Q enthalten, so muss ihr Doppelpunkt auf den in analoger Weise bestimmten Strahlen $q\,q^*$ liegen. Daraus folgt, dass die Schnittpunkte von p und p^* mit q und q^* die Doppelpunkte $D_1 \, .. \, D_4$ derjenigen Kurven des Systems sind, welche durch die Punkte P und Q gehen. Aus dem Hesse'schen Satz folgt, dass die 4 zu den Doppelpunkten $D_1 \, .. \, D_4$ gehörenden Kurven dritter Ordnung noch einen weitern Punkt gemein haben, den dritten Diagonalpunkt P' des durch die Punkte $D_1 \, .. \, D_4$ bestimmten Vierecks.

Die Punkte Q P P′ bilden für alle 4 Kurven ein Tripel; die 9 Punkte $A\,\mathfrak{A}$ $B\,\mathfrak{B}$ $C\,\mathfrak{C}$ Q $P\,P'$ bilden eine Gruppe von 9 associierten Punkten.

3. Lässt man den Punkt Q fest, so gehört im Allgemeinen zu jeder Lage von P eine einzige Lage von P'. Die beiden Punkte P und P' entsprechen sich vertauschbar und es ist durch obige Konstruktion eine involutorische Transformation definiert, welche untersucht werden soll. In dieser Form erscheint die Aufgabe als Spezialfall eines von Herrn Prof. Geiser behandelten Problems.[1]) Es wird sich aber zeigen, dass die Definition für diese Transformation in eine andere Fassung gebracht werden kann, wodurch man eine selbständige Transformation bekommen wird.

---

[1]) Man vergl.: „Über zwei geometrische Probleme“, Journal für Math. Bd. 67. pag. 78.

Die Linie $Q\,P'$ ist zufolge der Konstruktion von P' mit Hilfe des Hesse'schen Satzes der vierte harmonische Strahl zu $Q\,P$ in Bezug auf q und q^*. Ebenso ist $P\,P'$ der vierte harmonische Strahl zu $P\,Q$ in Bezug auf p und p^*. Weil $q\,q^*$ und $p\,p^*$ die Doppelstrahlen der Involutionen sind, durch welche die Gegeneckenpaare des gegebenen Vierseits $t_1 \ldots t_4$ aus Q und P projiciert werden, so folgt, dass $Q\,P'$ der entsprechende Strahl ist zu $Q\,P$ in der Involution am Punkte Q, ebenso $P\,P'$ der entsprechende Strahl zu $P\,Q$ in der Involution am Punkte P. Ist also P gegeben, so findet man P' durch zweimalige Anwendung der Linealkonstruktion der Involution. Die aufgestellte Transformation kann nun so definiert werden:

Sind gegeben ein festes Vierseit und ein fester Punkt Q, so gehört zu jedem Punkt P der Ebene involutorisch ein Punkt P', welcher bestimmt ist, als Schnittpunkt eines Strahls p_Q mit einem Strahl p_P, wobei p_Q und p_P die entsprechenden Strahlen sind zu $Q\,P = p$ in den an den Punkten Q und P durch das Vierseit bestimmten Involutionen.

In Rücksicht auf die Kegelschnitte der durch das Vierseit bestimmten Schar, kann die Abhängigkeit zwischen P und P' so ausgedrückt werden:

Die Gerade $Q\,P$ bestimmt einen Kegelschnitt der Schar; die zweiten Tangenten aus Q und P an diesem Kegelschnitt schneiden sich in dem Punkt P'.

Die 3 Punkte $Q\,P\,P'$ bilden demnach immer die Ecken eines Dreiseits, welches einem Kegelschnitt der durch das Vierseit bestimmten Schar umschrieben ist.

Für die Untersuchung der durch die Punktepaare PP' bestimmten involutorischen Verwandtschaft handelt es sich zunächst um die Bestimmung der Fundamental- oder Ausnahmepunkte: Fällt P in eine Ecke, z. B. A, des gegebenen Vierseits, so zerfällt der durch $Q\,P$ bestimmte Kegelschnitt der Schar in das Punktepaar $A\mathfrak{A}$ und man sieht hieraus, dass der Ecke A in der Transformation die sämtlichen Punkte der Geraden $Q\,\mathfrak{A}$ zugeordnet sind. Fällt P mit Q zusammen, so beschreibt P' diejenige Kurve, welche der Ort des Berührungspunktes der Tangenten aus Q mit den Kegelschnitten der Schar ist, also die Kurve dritter Ordnung, welche in Q einen Doppelpunkt hat und durch die Ecken des Vierseits geht. Zu jeder andern Lage von P gehört eine einzige Lage von P'.

Zu bemerken ist noch, dass die Punkte der Doppelstrahlen $q\,q^*$ der an Q durch das Vierseit bestimmten Involution sich selbst entsprechen. Man hat es also hier zu thun mit einer involutorischen Transformation, die zwei sich punktweise selbst entsprechende Gerade besitzt.[1])

Es ist noch die Kurve zu untersuchen, welche P' beschreibt, wenn P irgend eine Gerade g durchläuft. Mit Hülfe der von Hrn. Prof. Geiser bewiesenen allgemeinen Sätze oder auch mit Hülfe von Sätzen über allgemeine involutorische Transformationen lässt sich ohne Weiteres zeigen, dass der Ort von P' eine Kurve vierter Ordnung ist, die in Q einen dreifachen Punkt besitzt und durch die Ecken des Vierseits geht. Dieser Satz soll direkt

---

[1]) Man vergl.: Bertini „Sopra una classe di trasformaz. univoche involutorie“, Annali di Mat. Serie II, Bd. 8, pag. 11 und die zugehörige Berichtigung auf pag. 146.

bewiesen werden aus der im vorigen Art. gegebenen Konstruktion von P' durch Involution.

Wenn P eine Gerade g durchläuft, so beschreibt der Strahl $QP = p$ das Büschel vom Scheitel Q. P' liegt dann immer auf demjenigen Strahl p_Q, welcher p korrespondiert in der an Q durch das Vierseit erzeugten Involution. Es bleibt die Frage: welche Kurve wird umhüllt von der Geraden p_P, der korrespondierenden zu p in der an P durch das Vierseit erzeugten Involution?

4. Der bequemern Vorstellung wegen soll die duale Aufgabe gelöst werden: Gegeben eine Punktreihe q, ein Punkt G und ein Viereck $T_1 \,.\,.\, T_4$. Man verbinde irgend einen Punkt P auf q mit G durch eine Gerade p und suche auf dieser Geraden zu P den korrespondierenden Punkt P_1, in der Involution, welche durch die Gegenseiten des Vierecks auf p abgeschnitten wird. Welches ist der Ort von P_1, wenn P die Gerade q durchläuft?

In Rücksicht auf das durch $T_1 \,.\,.\, T_4$ bestimmte Kegelschnittbüschel kann die Aufgabe auch so formuliert werden: Ein Punkt P auf q bestimmt einen Kegelschnitt des Büschels. Man suche den zweiten Schnittpunkt P_1 der Geraden GP mit diesem Kegelschnitt. Welches ist der Ort von P_1, wenn P die Gerade q durchläuft? P_1 soll in Zukunft die Projektion von P auf den durch P bestimmten Kegelschnitt des Büschels heissen. Diese Konstruktion des Ortes von P_1 ist die von Hrn. Zimmermann ohne Beweis gegebene Konstruktion der C_3 mit einem Doppelpunkt.[1]) Der Beweis wird wohl am einfachsten so geliefert: Irgend ein Kegelschnitt des Büschels

[1]) Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über die Kegelschnitte und die C_3 mit einem Doppelpunkt. Greifswald 1882.

trifft die Gerade q in 2 Punkten P und R. Die Verbindungslinien der Projektionen P_1 und R_1 gehen für alle Kegelschnitte des Büschels durch einen festen Punkt S, welcher der vierte harmonische ist zu G und seinem konjugierten bezüglich des Kegelschnittbüschels in Bezug auf den Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit q. Die Strahlenpaare $G\,P$ und $G\,R$ bilden eine Involution, welche projektiv ist zum Büschel der Linien $P_1\,R_1$. Der Ort von P_1 und R_1 ist demnach das Erzeugnis von einzweideutigen Strahlbüscheln, also eine C_3 mit einem Doppelpunkt in G und einem einfachen Punkt in S.

Nach dem Prinzip der Dualität schliesst man hieraus, dass die Enveloppe der Linien p_P in Art. 3 eine Kurve dritter Klasse ist, welche g zu einer Doppeltangente hat.

5. Kehren wir zur Konstruktion des Ortes von P' in Art. 3 zurück, so sehen wir, dass p_P eine Kurve dritter Klasse mit Doppeltangente umhüllt, während p_Q ein Strahlbüschel beschreibt. Entsprechende Gerade p_P und p_Q sind einander projektiv zugeordnet, denn die Schnittpunktepaare von p_P und p_Q mit der Doppeltangente g bilden eine Involution. Daraus folgt, dass der Ort von $P' = p_P\,p_Q$ eine Kurve vierter Ordnung ist, welche in Q einen dreifachen Punkt hat.[1])

Es sollen noch einige spezielle Punkte der C_4 betrachtet werden. a) Wenn P auf die Verbindungslinie von Q mit einer Ecke des gegebenen Vierseits fällt, z. B. auf $Q\,A$, so liegt nach Art. 3 der entsprechende Punkt P' in $\mathfrak{A}$, der Gegenecke zu A. b) der vierte Schnittpunkt einer Seite t_i des gegebenen Vierseits mit

---

[1]) Man vergl. dazu die Dissertation d. Verf., Zürich 1890, namentlich rücksichtlich der Tangentenkonstr.

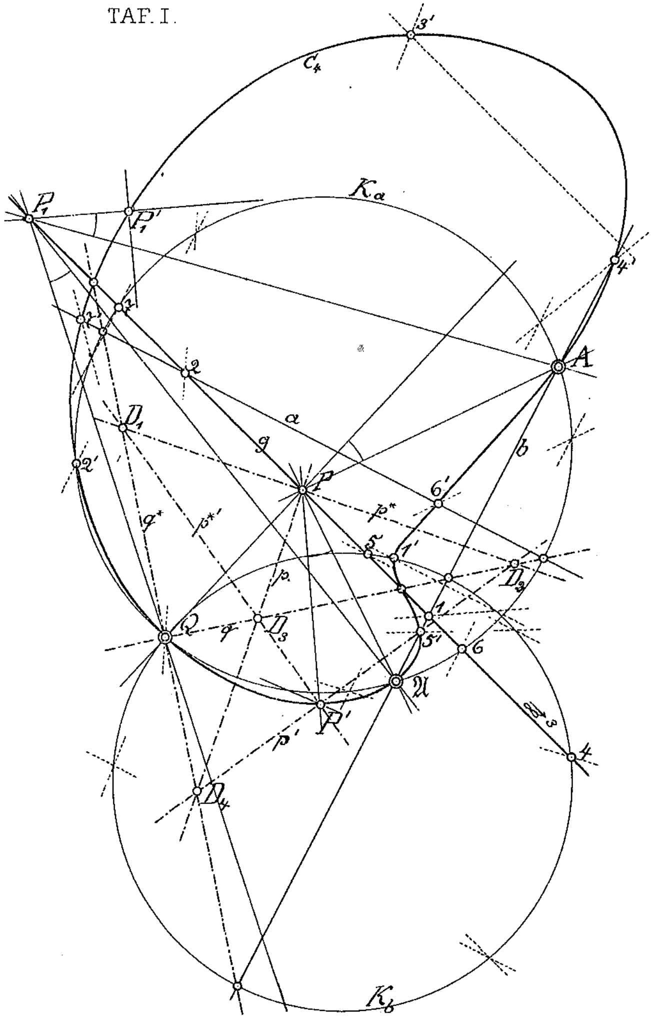
C_4 ergibt sich, wenn man t_i schneidet mit dem korrespondierenden Strahl in der Involution an Q zur Verbindungslinie von Q mit dem Schnittpunkt $t_i g$. c) Die 4 Schnittpunkte von C_4 mit g zerfallen in 2 Gruppen: 2 der Punkte sind die Berührungspunkte der Geraden g mit der oben konstruierten Kurve dritter Klasse, für welche g Doppeltangente ist; sie werden gefunden als Schnittpunkte von g mit den Tangenten aus Q an denjenigen Kegelschnitt der Schar, welcher g berührt. Die beiden andern Punkte sind die Schnittpunkte von g mit den Doppelstrahlen der Involution an Q. Zugleich folgt, dass die 4 Schnittpunkte von g und C_4 eine harmonische Gruppe bilden.

Die einfachste konstruktive Durchführung des Entwickelten ist möglich in dem Falle, wo die imaginären Kreispunkte ein Paar Gegenecken des gegebenen Vierseits, die Kegelschnitte der Schar also confokal sind. Die reellen Ecken des Vierseits seien A und $\mathfrak{A}$; die beiden letzten Ecken B und $\mathfrak{B}$ liegen dann auf dem Mittellot der Strecke $A\,\mathfrak{A}$. Die Involution, welche dieses Vierseit an irgend einem Punkt P erzeugt, ist eine symmetrische; die Doppelstrahlen $p\,p^*$ derselben sind die Halbierungslinien des Winkels $A\,P\,\mathfrak{A}$. Die 4 Doppelpunkte der 4 C_3, welche durch die Ecken des Vierseits und 2 gegebene Punkte Q und P gehen, bilden hier ein orthogonales Viereck; die C_3 sind Quetelet'sche Fokalen. (Vergl. Taf. I.)

Geht die Gerade g durch eine Ecke des Vierseits, so zerfällt C_4 in die Gerade aus Q nach der Gegenecke und in eine C_3. Die zugehörige Kurve dritter Klasse, die Enveloppe der Geraden p_P zerfällt in ein Strahlbüschel und in einen Kegelschnitt, der die C_3 3 mal berührt.

Stiner: Zwei involutor. Transformationen.

TAF. I.



Hofer & Burger, Zürich.

Geht g durch 2 Gegenecken des Vierseits, d. h. ist sie eine Diagonale desselben, so zerfällt C_4 in die Geraden aus Q nach den beiden Ecken und in einen Kegelschnitt, von dem man 5 Punkte kennt. Daraus folgt die Bestimmung der 2 letzten Schnittpunkte einer Diagonale mit C_4.

Ist endlich g eine Seite t_i des Vierseits, so zerfällt C_4 in diese Gerade t_i und in die Verbindungslinien von Q mit den nicht auf t_i liegenden Ecken des Vierseits.

6. In Art. 4 wurde eine involutorische Transformation in Bezug auf ein Viereck aufgestellt, deren Anwendung auf die Kurventheorie noch gezeigt werden soll. Es seien gegeben ein Viereck $F_1\ F_2\ F_3\ F_4$ und ein fester Punkt F. Die Punkte F_i mögen Fundamentalpunkte, F möge Hauptpunkt heissen. Einem Punkt P ist involutorisch zugeordnet ein Punkt P', der entsprechende zu P in der Involution, welche abgeschnitten wird auf der Geraden FP durch die Gegenseitenpaare des Vierecks. Entsprechende Punktepaare PP' liegen also immer auf einem Kegelschnitt des durch das Viereck bestimmten Büschels. Die Zuordnung ist eine eindeutige, ausgenommen für die Fundamentalpunkte und den Hauptpunkt. Einem Fundamentalpunkt F_i sind zugeordnet die sämtlichen Punkte der Verbindungslinie $F\,F_i$. Dem Hauptpunkt entsprechen sämtliche Punkte des durch $F\,F_1\,..\,F_4$ bestimmten Kegelschnittes.

Die Kurve Γ der sich selbst entsprechenden Punkte der Transformation[1]) ist der Ort der Berührungspunkte der Tangenten aus F an die Kegelschnitte des Büschels, also eine allgemeine Kurve dritter Ordnung.[2])

[1]) Man vergl. Bertini a. a. O. pag. 11.

[2]) Man vergl. Disteli: „Über eine einfache planare Darstellung der Gestalten der ebenen C_3“. Zeitschrift für Math. und Phys., 36. Jahrg., pag. 138.

Wenn P eine beliebige Gerade g durchläuft, so beschreibt der korrespondierende Punkt P' eine Kurve dritter Ordnung, welche einfach durch die Fundamentalpunkte geht und den Hauptpunkt zum Doppelpunkt hat. Die Tangenten des Doppelpunktes sind die Verbindungslinien von F mit den Schnittpunkten von g mit dem durch $F F_1 \,..\, F_4$ bestimmten Kegelschnitt. Die C_3 hat also einen eigentlichen Doppelpunkt, einen Rückkekrpunkt oder einen isolierten Doppelpunkt, je nachdem g diesen Kegelschnitt schneidet, berührt oder nicht schneidet.

7. Diese Konstruktion der C_3 ist namentlich geeignet, die Kurve zu konstruieren aus dem Doppelpunkt und 6 einfachen Punkten. Dieselbe erfordert nur die Anwendung des Pascal'schen Satzes oder der Linealkonstruktion der Involution. Man macht den Doppelpunkt zum Hauptpunkt F und irgend 4 der gegebenen Punkte zu Fundamentalpunkten $F_1 \,..\, F_4$ der Transformation. Sucht man nun zu den 2 letzten Punkten A und B die korrespondierenden A' und B', so bestimmen letztere eine Gerade g. Konstruiert man jetzt zu irgend einem Punkt C' von g den entsprechenden, so liegt C auf der gegebenen C_3. Diese Konstruktion enthält die Bedingung, welche bestehen muss zwischen dem Doppelpunkt und 7 Punkten einer C_3, also das Analoge zum Pascal'schen Satz für die Kegelschnitte. Sie lautet: Legt man durch irgend 4 von den 7 Punkten die Kegelschnitte nach den 3 übrigen ABC und aus dem Doppelpunkt die Geraden nach ABC, so schneidet jede dieser Geraden ihren zugehörigen Kegelschnitt in einem neuen Punkt. Diese 3 neuen Punkte A' B' C' liegen in einer Geraden.

Mit Hülfe dieser Beziehung löst man auch die Aufgaben: den dritten Schnittpunkt einer Geraden mit einer C_3 zu finden, wenn man 2 Schnittpunkte kennt und die beiden letzten oder den letzten der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einer C_3 zu bestimmen, wenn die übrigen bekannt sind.

Man erhält die Tangente der C_3 im Fundamentalpunkt F_i, wenn man die Tangente konstruiert in F_i an den Kegelschnitt des Büschels, welcher durch den Schnittpunkt von g mit der Verbindungslinie $F F_i$ geht.

Man findet die Paare von konjugierten Punkten der C_3, wenn man die korrespondierenden Punkte in der Transformation sucht zu den Paaren der Involution harmonischer Pole auf g bezüglich des durch $F F_1 \, .. \, F_4$ bestimmten Kegelschnittes.

8. Lässt man in der angenommenen Transformation den Punkt P nicht eine Gerade, sondern eine Kurve n^{ter} Ordnung durchlaufen, so beschreibt der korrespondierende Punkt P' eine Kurve von der Ordnung $3n$, welche die Fundamentalpunkte zu n-fachen und den Hauptpunkt zu einem $2n$-fachen Punkt hat. Jedem p-fachen Punkt von C_n entspricht ein p-facher Punkt der transformierten Kurve. Geht die Originalkurve r-fach durch den Fundamentalpunkt F_i, so zerfällt die transformierte Kurve in die r-fach gezählte Gerade $F F_i$ und in eine Kurve von der Ordnung $3n - r$. Geht die Originalkurve s-fach durch den Hauptpunkt, so zerfällt die Transformierte in den s-fach gelegten Kegelschnitt durch $F F_1 \, .. \, F_4$ und in eine Kurve von der Ordnung $3n - 2s$.

Unsere Transformation soll nun verwendet werden, entsprechend der Anwendung des Pascal'schen Theorems auf die Kegelschnitte, um einzelne Gruppen von Kurven zu konstruieren aus den notwendigen Bestimmungs-

Elementen. Die Anwendung soll beschränkt werden auf die Gruppen von Kurven vom Geschlecht Null, welche der Verfasser bereits in seiner Inaugural-Dissertation mit Hülfe collinear verwandter ebener Systeme konstruiert hat.

9. Wenn eine Originalkurve von der n^{ten} Ordnung im Hauptpunkt F einen $n-1$ fachen Punkt hat, so zerfällt die transformierte Kurve nach Art. 7 in den $n-1$fach gelegten Kegelschnitt K durch $F F_1 \ldots F_4$ und in eine Kurve von der Ordnung $3n - 2(n-1)$, welche in F einen Punkt hat von der Vielfachheit $2n - (n-1)$ und in F_i einen Punkt von der Vielfachheit $n - (n-1)$, also in eine Kurve von der Ordnung $n+2$, welche in F einen $n+1$ fachen Punkt hat und einfach durch die Fundamentalpunkte geht. Ist demnach umgekehrt eine Kurve r^{ter} Ordnung durch den $r-1$ fachen Punkt F und die zur Bestimmung notwendigen $2r$ einfachen Punkte gegeben, so wählt man F zum Hauptpunkt und irgend 4 der einfachen Punkte zu Fundamentalpunkten der Transformation. Man sucht nun zu den übrigen $2r-4$ gegebenen einfachen Punkten $P_2 \ldots P_{2r-4}$ die transformierten Punkte $P'_1 \ldots P'_{2r-4}$. Dann gibt es eine Kurve von der Ordnung $r-2$, C'_{r-2}, welche den Hauptpunkt zu einem $r-3$ fachen Punkt hat und einfach durch die $2(r-2)$ Punkte P'_i geht. Konstruiert man zu irgend einem Punkt P' dieser Kurve den transformierten, so liegt dieser auf der gegebenen C_r. Dadurch wird die Konstruktion einer Kurve r^{ter} Ordnung mit einem $r-1$ fachen Punkt zurückgeführt auf die Konstruktion einer Kurve $r-2^{\text{ter}}$ Ordnung mit der analogen Singularität.

Diese Konstruktion enthält zugleich die einfache Bedingung, welche bestehen muss zwischen dem $r-1$fachen Punkt und $2r+1$ einfachen Punkten der C_r. Sie lautet:

Legt man durch beliebige 4 einfache Punkte der C_r die Kegelschnitte nach den $2r-3$ übrigen Punkten P_i und die Geraden aus dem $r-1$fachen Punkt F nach denselben Punkten, so trifft jede dieser Geraden FP_i den nach demselben Punkt P_i gehenden Kegelschnitt in einem neuen Punkt P_i'; die $2r-3$ Punkte, welche man so erhält, liegen auf einer Kurve von der Ordnung $r-2$, für welche F ein $r-3$facher Punkt ist.

Die Konstruktion einer Kurve vierter Ordnung mit einem 3fachen Punkt ist dadurch zurückgeführt auf diejenige eines Kegelschnittes; diejenige einer Kurve fünfter Ordnung mit einem 4fachen Punkt auf die einer Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt u. s. f.

10. Wenn eine Originalkurve von der Ordnung n in F einen $n-2$fachen Punkt besitzt und einfach durch die beiden Fundamentalpunkte F_3 und F_4 geht, so zerfällt die transformierte Kurve nach Art. 8 in den $n-2$fach gelegten Kegelschnitt durch $FF_1 \,.\,. F_4$, in die beiden Geraden FF_3 und FF_4 und in eine Kurve von der Ordnung $3n-2(n-2)-2=n+2$, welche in F einen $(2n-n+2-2)$fachen, d. i. $n$fachen Punkt, in F_1 und F_2 je einen $(n-n+2)$fachen, d. i. 2fachen Punkt und in F_3 und F_4 je einen $(n-n+2-1)$fachen, d. i. einfachen Punkt aufweist. Hat überdies die Originalkurve noch $n-2$ Doppelpunkte, so entstehen aus dieser auch wieder Doppelpunkte der abgeleiteten Kurve. Letztere ist also dann eine Kurve von der $(n+2)^{\text{ten}}$ Ordnung mit einem $n$fachen Punkt und n Doppelpunkten. Ist jetzt umgekehrt eine Kurve r^{ter} Ordnung mit einem $r-2$fachen Punkt F, $r-2$ Doppelpunkten $F_1\ F_2\ D_1 \,.\,. D_{r-4}$ und den notwendigen und hinreichenden 5 einfachen Punkten

$F_3\ F_4\ P_1\ P_2\ P_3$ gegeben, so wähle man den $r-2$fachen Punkt F zum Hauptpunkt, 2 Doppelpunkte, z. B. F_1 und F_2 und 2 einfache Punkte, z. B. F_3 und F_4 zu Fundamentalpunkten der Transformation. Dann suche man zu den Punkten $D_1 \,.\,.\, D_{r-4}$ und $P_1 \,.\, P_3$ die korrespondierenden $D'_1 \,.\,.\, D'_{r-4}$ und $P'_1 \,.\, P'_3$. Nun gibt es eine einzige Kurve von der Ordnung $r-2$, welche in F einen $r-4$fachen Punkt hat, durch die $r-4$ Punkte $D'_1 \,.\,.\, D'_{r-4}$ doppelt und durch die 5 Punkte $F_3\ F_4\ P'_1 \,.\, P'_3$ einfach geht. Die Transformierte dieser Kurve ist die gesuchte C_r. Auch hier wird die Konstruktion einer Kurve r^{ter} Ordnung zurückgeführt auf die Konstruktion einer Kurve von der Ordnung $r-2$ mit den analogen Singularitäten.

Für eine Kurve vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten ergibt sich z. B. folgende Beziehung zwischen den 3 Doppelpunkten und 6 einfachen Punkten: Legt man durch 2 Doppelpunkte und 2 einfache Punkte P_1 und P_2 die Kegelschnitte nach den 4 übrigen Punkten $P_3 \,.\,.\, P_6$, und aus dem dritten Doppelpunkt die Geraden nach $P_3 \,.\,.\, P_6$, so schneidet jede dieser Geraden den durch denselben Punkt gehenden Kegelschnitt in einem neuen Punkt; die vier so erhaltenen Punkte liegen mit P_1 und P_2 auf einem Kegelschnitt.

Es folgen daraus interessante Beziehungen namentlich für die rationalen bizirkularen Kurven. Einige Eigenschaften der Bernoulli'schen Lemniskate sollen am Schluss der Arbeit entwickelt werden.

Für $r \geqq 6$ lässt sich ein noch bequemerer Weg einschlagen. Wählt man hier den $r-2$fachen Punkt als Hauptpunkt und irgend 4 Doppelpunkte der Kurve als Fundamentalpunkte einer Transformation, so ist die Transformierte der C_r eine Kurve von der Ordnung $r-4$

mit einem $r-6$fachen Punkt in F und $r-6$ Doppelpunkten. Man kann also umgekehrt jede C_r konstruieren mit Hülfe einer Kurve $r-4^{\text{ter}}$ Ordnung, welche mit den analogen Singularitäten behaftet ist, vorausgesetzt $r \geqq 6$.

Für $r=5$ kann die Konstruktion zurückgeführt werden auf diejenige eines Kegelschnittes durch 5 Punkte.

11. Von den Kurven vom Geschlecht Null, deren höchste Singularität ein $n-3$facher Punkt ist, soll nur die einfachste konstruiert werden, die Kurve fünfter Ordnung mit 6 Doppelpunkten.

Wählt man als Originalkurve bei der Transformation eine Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt D, welche durch die 4 Fundamentalpunkte geht, so zerfällt die Transformierte neunter Ordnung in die Geraden aus dem Hauptpunkt nach den 4 Fundamentalpunkten und in eine Kurve fünfter Ordnung, welche den Hauptpunkt, die 4 Fundamentalpunkte und den Punkt D' zu Doppelpunkten hat, also in eine Kurve fünfter Ordnung mit 6 Doppelpunkten.

Es seien nun von einer Kurve fünfter Ordnung die 6 Doppelpunkte willkürlich gegeben; dann ist die Kurve eindeutig bestimmt durch Angabe von 2 einfachen Punkten A und B. Nimmt man jetzt F zum Hauptpunkt und $F_1 \,..\, F_4$ zu Fundamentalpunkten einer ersten Transformation, so gibt es eine bestimmte Kurve dritter Ordnung, C_3', welche D' zum Doppelpunkt hat und einfach durch die 6 Punkte $F_1 \,..\, F_4$ A' und B' geht. Betrachtet man diese Kurve als Originalkurve, so ist nach dem Vorangehenden die Transformierte die gesuchte C_5.

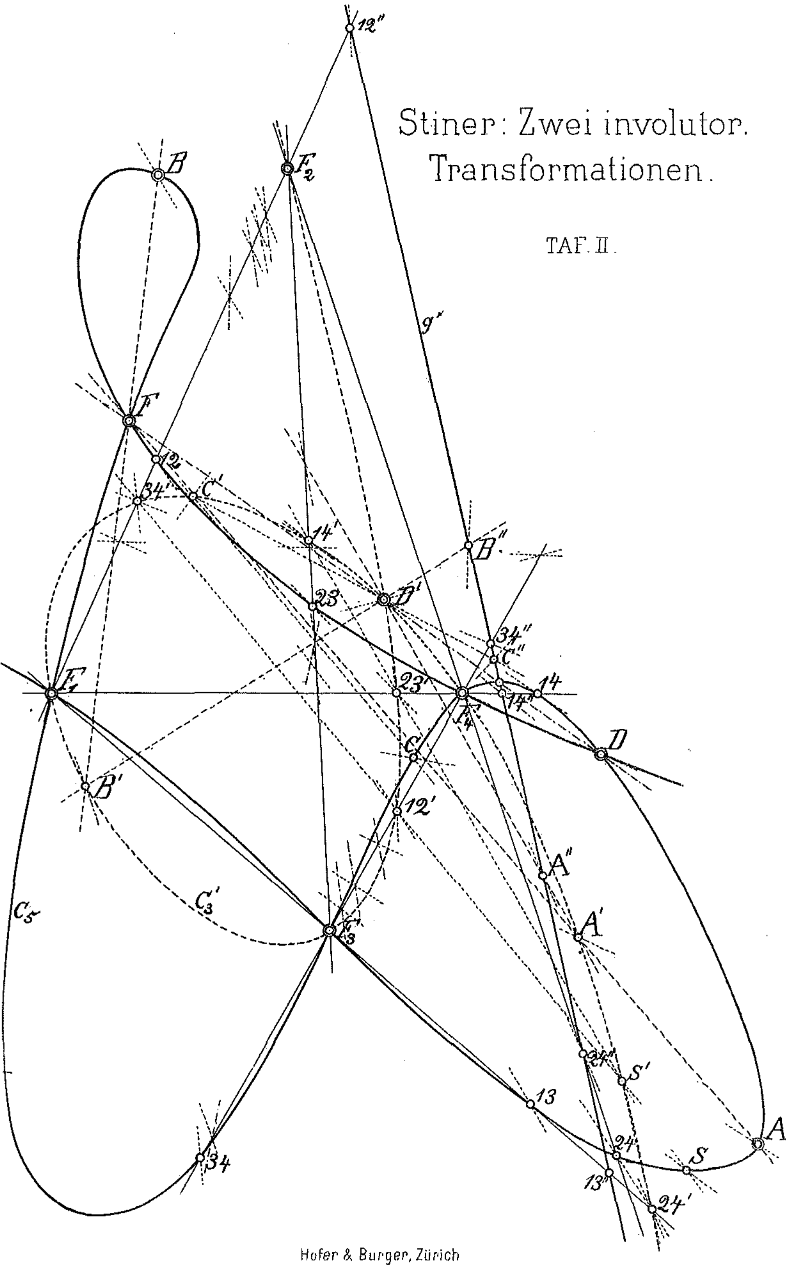
Zur Konstruktion von C_3' wird man zweckmässig $F_1 \,..\, F_4$ zu Fundamentalpunkten und D' zum Hauptpunkt einer zweiten Transformation machen. Die korrespondierenden A'' und B'' zu A' und B' in dieser zweiten Transformation bestimmen dann eine Gerade g''. Einem Punkt P'' auf g'' korrespondiert in der zweiten Transformation ein Punkt P' von C_3' und diesem in der ersten Transformation ein Punkt P von C_5. Sind also die geringen vorbereitenden Konstruktionen von $D'\ A'\ B'\ A''\ B''$ gemacht, so findet man einen beliebigen neuen Punkt der C_5 durch blosse zweimalige Anwendung des Pascal'schen Satzes. (Vergl. Taf. II.) Zu bemerken ist noch, dass immer die Punkte $P\,P'\,P''$ mit $F_1\ .\ .\ F_4$ auf einem Kegelschnitt liegen. Es ist damit für die Kurve fünfter Ordnung mit 6 Doppelpunkten eine Konstruktion gefunden, welche sich zur wirklichen Durchführung eignet. Sie hat jedoch denselben Nachteil, wie die vom Verfasser in seiner Dissertation gegebene Konstruktion derselben Kurve; sie ist nicht anwendbar auf den Fall, wo alle 6 Doppelpunkte imaginär sind, ein Fall, auf dessen konstruktive Durchführung aus Genauigkeitsrücksichten überhaupt wohl verzichtet werden muss.

Bemerkenswert ist noch der Umstand, dass die Linie g'' unverändert bleibt, wenn man D und F mit einander vertauscht, d. h. wenn man bei sonst gleichen Verhältnissen D als Hauptpunkt der ersten Transformation nimmt.

Mit Hülfe der Transformation konstruiert man in einfacher Weise die fünften Schnittpunkte der Seiten des Fundamentalvierecks mit der C_5. Sind $F_i\,F_k$ und $F_l\,F_m$ 2 Gegenseiten des Fundamentalvierecks, so erhält man den fünften Schnittpunkt P_{ik} der Seite $F_i\,F_k$ mit C_5, indem man $F_i\,F_k$ schneidet mit g'', diesen Punkt P_{ik}'' von D' aus projiciert auf $F_l\,F_m$ und endlich diese Projektion P_{ik}' von F aus auf $F_i\,F_k$ projiciert.

Stiner: Zwei involutor. Transformationen.

TAF. II.



Hofer & Burger, Zürich

Dieser letzte Punkt ist P_{ik}. Die Verbindungslinien der 3 Punktpaare $P_{ik}\,P_{lm}$ sind 3 Tangenten des die C_5 5 mal berührenden Kegelschnittes, welcher den 4 Doppelpunkten $F_1\ ..\ F_4$ zugeordnet ist.[1]) Konstruiert man zu 2 Punkten P'' und $P^{*''}$ auf g'', welche demselben Kegelschnitt des Büschels $F_1\ ..\ F_4$ angehören, die entsprechenden P und P^* auf C_5, so ist deren Verbindungslinie eine neue Tangente dieses Kegelschnittes.

Es soll noch gezeigt werden, wie die 5 Schnittpunkte irgend einer Geraden g mit der C_5 zu bestimmen sind. Man sucht zu g die entsprechende Kurve dritter Ordnung in der ersten Transformation; sie heisse G_3'. G_3' und C_3' gehen durch die Fundamentalpunkte; ausser diesen haben sie also noch 5 Punkte $P_1' \ldots . P_5'$ gemein. Die Schnittpunkte der 5 Verbindungslinien $F\,P_i'$ mit g sind die gesuchten Schnittpunkte $P_1 \ldots P_5$. Nun kann man nach einem bekannten Verfahren den Kegelschnitt der Punkte $P_1' \ldots . P_5'$ angeben: Man suche die Schnittpunkte G_{ik}' von G_3' mit den Seiten $F_i\,F_k$ des Fundamentalvierecks. G_{ik}' wird gefunden, wenn man den Schnittpunkt von g mit $F_l\,F_m$ von F aus auf $F_i\,F_k$ projiciert. Verbindet man nun die 3 Paare von Punkten $G_{ik}'\,G_{lm}'$, welche man auf diese Weise von G_3' erhält, so gehen diese 3 Geraden durch einen Punkt G' von G_3'. Ebenso gehen die 3 Linien $P_{ik}'\,P_{lm}'$ durch einen Punkt S' von C_3'. Schneidet man jetzt je die beiden Linien $G_{ik}'\,G_{lm}'$ und $P_{ik}'\,P_{lm}'$ mit einander, so bekommt man dadurch 3 Schnittpunkte, welche mit G' und S' einen Kegelschnitt bestimmen. Dieser Kegelschnitt enthält die Punkte $P_1' \ldots P_5'$. Letztere Punkte sind also bestimmt als die 5 weitern

[1]) Man vergl. Rohn: „Eine einfache lineare Konstr. der ebenen rat. C_5." Math. Annalen, Bd. 25, pag. 598.

Schnittpunkte desselben mit C_3'. So ist die Bestimmung der 5 Schnittpunkte der C_5' mit einer Geraden zurückgeführt auf die Bestimmung der 5 Schnittpunkte einer rationalen Kurve dritter Ordnung und eines Kegelschnittes, welcher durch einen schon bekannten Punkt dieser Kurve geht. Die Lösung der gestellten Aufgabe fünften Grades ist damit in die einfachste geometrische Form gebracht.

Die aufgestellte Transformation wird für die Untersuchung vieler Kurven ein sehr geeignetes Hülfsmittel sein. Es sollen hier nur noch 2 einfache Anwendungen derselben gegeben werden. Sie soll verwendet werden a) zur Bestimmung der Asymptoten eines durch 5 Punkte gegebenen Kegelschnittes, b) zur Entwicklung einiger Eigenschaften der Lemniskate.

a) Ein Kegelschnitt werde transformiert mit Hülfe eines Kreisbüschels, dessen reelle oder imaginäre Grundpunkte A und B auf dem Kegelschnitt liegen unter der Voraussetzung, dass der Hauptpunkt F der Transformation ebenfalls der Kurve angehöre. Die abgeleitete Kurve sechster Ordnung zerfällt dann in die beiden Geraden FA und FB, in den Kreis durch die 3 Punkte ABF und in einen durch F gehenden Kreis K', der abhängig ist von dem gegebenen Kegelschnitt. Den Punkten von AB entsprechen involutorisch die Punkte der unendlich fernen Geraden. Schneidet daher K' die Gerade AB in den Punkten U und V, so sind die Richtungen der Geraden FU und FV die Asymptotenrichtungen des gegebenen Kegelschnittes. Die Asymptoten selbst werden dann am einfachsten gefunden mit Hülfe des Pascal'schen Satzes.

Man bekommt daher für die Art eines durch 5 Punkte bestimmten Kegelschnittes folgendes Kriterium: Die 5

Punkte seien in irgend einer Reihenfolge bezeichnet durch 1 ... 5. Der Kreis durch 123 schneide die Gerade 35 zum zweiten mal in 3′, der Kreis durch 124 schneide die Gerade 45 zum zweiten mal in 4′. Der Kegelschnitt ist dann Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem der Kreis durch 3′ 4′ 5 die Gerade 12 schneidet, berührt oder nicht schneidet.

b) α) Die Lemniskate sei gegeben durch den Doppelpunkt F, die beiden Doppelpunktstangenten g und h und einen einfachen Punkt F_3. Man lege durch F und F_3 irgend einen Kreis K, welcher der Lemniskate überdies in einem vorläufig noch unbekannten Punkt F_4 begegnet. Transformiert man nun die Lemniskate durch ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte F_3 und F_4 sind, so entsteht als abgeleitete Kurve ein Kegelschnitt. Dieser berührt die Geraden g und h in ihren Schnittpunkten G und H mit dem Kreis K, und geht durch F_3. Der letzte Schnittpunkt dieses Kegelschnittes mit K ist der unbekannte Fundamentalpunkt F_4. Der definierte Kegelschnitt lässt sich aus den angegebenen 5 Bestimmungsstücken bequem konstruieren. Weil 2 zu einander senkrechte Tangenten desselben mit ihren Berührungspunkten bekannt sind, so findet man einfach das Centrum, den Hauptkreis und die Axen. Der entstehende Kegelschnitt kann Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein; jedoch können nur solche Hyperbeln auftreten, für welche $a \geqq b$. Unter den Kreisen des angenommenen Büschels gibt es einige ausgezeichnete; es soll nur derjenige hervorgehoben werden, welcher zur Konstruktion der Lemniskatentangente in F_3 führt. Die Gerade $F F_3$ schneidet den konstruierten Kegelschnitt ausser in F_3 in einem weitern Punkt, welcher der vierte harmonische ist zu F_3 in Bezug auf F und den Schnittpunkt mit der Geraden $G\,H$. Der durch diesen Punkt gehende Kreis des Büschels berührt die Lemniskate in F_3. Wählt man den ursprünglich angenommenen Kreis K so, dass sein Centrum auf einer Axe der Lemniskate liegt, so ergeben sich daraus einfache Tangentenkonstruktionen.

β) Nimmt man den Radius des Kreises K unendlich gross an, so sind F_3 und F_4 2 einander diametral gegenüberliegende Punkte. Die Transformation geht über in die Transformation nach reciproken Radien mit negativer Potenz. Es geht übrigens die involutorische Verwandtschaft dritter Ordnung immer in eine quadratische Verwandtschaft über, wenn der Hauptpunkt F auf einer Seite des Fundamentalvierecks liegt. Die Kurve dritter Ordnung, welche im Allgemeinen einer Geraden entspricht, zerfällt dann in eine feste Gerade und einen Kegelschnitt. Die transformierte Kurve der Lemniskate ist eine gleichseitige Hyperbel.

γ) Aus den Eigenschaften der letztern Kurve folgt dann, dass die Lemniskate auch entsteht als Fusspunktskurve derjenigen gleichseitigen Hyperbel, welche erzeugt wird, wenn man als Punkte F_3 und F_4 der vorigen Transformation die Endpunkte der Hauptaxe der Lemniskate nimmt.

δ) Aus der Entstehung als Fusspunktskurve ergeben sich kinematische Konstruktionen der Lemniskate, von denen eine ihrer Einfachheit wegen erwähnt werden soll. Konstruiert man zu einer gleichseitigen Hyperbel H in Bezug auf eine ihrer Tangenten das Spiegelbild H' und lässt H' auf H abrollen ohne zu gleiten, so beschreibt der Mittelpunkt von H' nach γ) eine Lemniskate. Die

Brennpunkte von H' beschreiben bei dieser Bewegung 2 Kreise von demselben Radius r und der Centraldistanz $r\sqrt{2}$. Daraus folgt: Sind gegeben 2 Kreise von demselben Radius r und der Centraldistanz $r\sqrt{2}$ und bewegt sich eine Gerade AB von der Länge $r\sqrt{2}$ so, dass der eine Endpunkt A auf dem ersten Kreis und der andere Endpunkt B auf dem zweiten Kreis derart fortrückt, dass aufeinanderfolgende Lagen von AB nicht zu einander parallel sind, so beschreibt der Mittelpunkt von AB eine Lemniskate. Man erhält einen zweiten Punkt der Normale in irgend einem Punkt der Bahnkurve dadurch, dass man die Verbindungslinie der zugehörigen Lage von A mit dem Mittelpunkt des ersten Kreises schneidet mit der Verbindungslinie der zugehörigen Lage von B mit dem Mittelpunkt des zweiten Kreises. Die Mittelpunkte der beiden Kreise sind die reellen Brennpunkte der Lemniskate.

ε) Transformiert man die Lemniskate mit einem Büschel von konzentrischen Kreisen, deren Centrum in den einen Brennpunkt der Lemniskate fällt, so wird die Transformierte ein Kreis K', welcher die beiden Doppelpunktstangenten g und h berührt in ihren Schnittpunkten mit der Senkrechten zur Axe der Lemniskate in dem angenommenen Brennpunkt. Der Mittelpunkt von K' ist demnach der symmetrische Punkt zum Doppelpunkt in Bezug auf den Brennpunkt. Aus dieser Transformation ergibt sich die Eigenschaft: Zieht man durch den Doppelpunkt der Lemniskate irgend eine Gerade s, so ist der auf s liegende Durchmesser der Kurve gleich der auf s liegenden Sehne des Kreises K'. Oder: Konstruiert man den Kreis, dessen Mittelpunkt im Brennpunkt der Lemniskate ist und welcher die Geraden g und h berührt, so ist der auf einer Geraden durch den Doppelpunkt liegende Radius der Kurve gleich der auf derselben Geraden liegenden Sehne dieses Kreises.[1]) Die Tangentenkonstruktion, welche man hieraus nach der Theorie der sog. reciproken Polaren erhält, führt zu folgenden Entstehungsarten der Lemniskate als Enveloppe von Hyperbeln: Man nehme ausserhalb eines Kreises K einen Punkt F von der Lage, dass die aus ihm an den Kreis gehenden Tangenten zu einander senkrecht stehen; man lege durch F eine beliebige Gerade s, welche K in den Punkten P und Q schneide. Konstruiert man nun diejenige Hyperbel, welche K in P berührt, während die eine Asymptote derselben K in Q berührt und die andere Asymptote durch F geht, so umhüllen die für alle Lagen von s entstehenden Hyperbeln eine Lemniskate. Oder: Konstruiert man unter denselben Voraussetzungen die Hyperbel, welche durch F geht und K in Q berührt, während die eine Asymptote K in P berührt, so umhüllen die zweiten Asymptoten der für alle Lagen von s entstehenden Hyperbeln eine Lemniskate.

ζ) Man transformiere die Lemniskate durch ein Büschel von Kreisen, welche durch einen Punkt P der Kurve gehen und in diesem Punkt die Kurventangente berühren. Die transformierte Kurve ist nach α) ein Kegelschnitt, welcher die Gerade FP in einem zweiten Punkt S schneidet. Dieser Punkt S ist der vierte harmonische zu P in Bezug auf den Punkt F und den Schnittpunkt mit der Linie GH. Dieser Schnittpunkt ist aber hier der Mittelpunkt der Strecke FP. Man

---

[1]) Man vergl.: Exercices de géométrie descriptive par F. J. [Frères des Écoles chrétiennes]. III. Aufl. pag. 552.

findet also S, indem man FP in drei gleiche Teile teilt und den ersten Teilpunkt von F aus nimmt. Der Kreis des Berührungsbüschels, welcher durch S geht, hat mit der Lemniskate in P 3 aufeinander folgende Punkte gemein, d. h. er ist der Krümmungskreis. Es folgt hieraus, dass der Krümmungskreis des Punktes P auf dem radius rector von P eine Sehne abschneidet, welche gleich ist $^2/_3$ des radius rector. Oder: Der Krümmungsradius in einem Punkt der Lemniskate ist $^1/_3$ der Polarnormale; ein aus der Differentialrechnung bekanntes Ergebnis.

Die hier entwickelte Methode zur Bestimmung des Krümmungskreises lässt sich auch auf andere Kurven mit Vorteil anwenden, wie an anderer Stelle gezeigt werden soll.

η) Eine einfache Tangentenkonstruktion mag noch erwähnt werden, welche sich ergibt, wenn man durch Wahl des Hauptpunktes F in einem einfachen Kurvenpunkt P die Lemniskate transformiert in eine Quetelet'sche Fokale. Sie lautet: Man lege durch den symmetrischen Punkt zu P bezüglich des Doppelpunktes die Parallelen zu den Axen der Lemniskate, ferner ziehe man im Doppelpunkt die Senkrechte zur Linie aus dem Doppelpunkt nach P. Die vorigen Parallelen schneiden auf dieser Senkrechten ein Stück ab; der Mittelpunkt dieses Stückes ist ein Punkt der Tangente in P.